Math. Un.
91 5c - 2

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36606450100012

<36606450100012

Bayer. Staatsbibliothek

R

J. L. Lagrange's

mathematatische

W e r k e.

Deutsch herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Z w e i t e r B a n d,

die Vorlesungen über die Functionen-Rechnung enthaltend.

B e r l i n, b e i G. R e i m e r.

1 8 2 3.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorlesungen

über die

Functionen - Rechnung.

Von

J. L. Lagrange,

Mitgliede des Instituts der Künste und Wissenschaften, des Längen-Büreaux und des Senat-Conservateurs, Grosskreuze der Ehren-Legion und Reichsgrafen.

Neue, vom Verfasser durchgesehene, verbesserte und vermehrte Auflage.

Mit Anmerkungen, Erläuterungen und Zusätzen,

deutsch herausgegeben

von

Dr. A. L. Crelle,

Königl. Preuss. Geheimen Ober-Baurathe.

Berlin, bei G. Reimer.

1823.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede des Originals.

Diese Vorlesungen, welche den ersten Theil der Theorie der analytischen Functionen commentiren und ergänzen, enthalten einen Cursus desjenigen Theils der Analysis, welchen man gewöhnlich Infinitesimal-, oder Transcendental-Calcul nennt, der aber nichts weiter ist, als die Functionen-Rechnung.

Diejenigen, welche die Differential-Rechnung studirten, finden in diesen Vorlesungen einfachere und bestimmtere Ansichten dieser Rechnung und neue Ausdrücke und Methoden, oder eine neue Darstellung derjenigen,

welchen noch mehrere Klarheit und Genauigkeit zu wünschen war.

In der gegenwärtigen neuen Auflage sind mehrere Stellen, der Deutlichkeit und Einfachheit wegen, verändert worden, auch finden sich mehrere Zusätze, vorzüglich in der achtzehnten, ein und zwanzigsten und zwei und zwanzigsten Vorlesung. Diese letzte enthält eine vollständige Abhandlung der Variations-Rechnung.

Inhalt

der Vorlesungen über die Functionen-Rechnung.

Erste Vorlesung.

Seite

Vom Gegenstande der Functionen-Rechnung und den Functionen überhaupt 1

Zweite Vorlesung.

Ueber die Entwickelung der Functionen einer veränderlichen Grösse, wenn man dieselbe sich verändern lässt. Allgemeines Gesetz der Entwickelung. Ursprung der abgeleiteten Grössen. Verschiedene Ordnungen der Ableitungen. Ihre Bezeichnung 13

Allgemeine Entwickelung von $f(x+k)$ 13

Ableitungen und Stammgrössen 21

Ableitungen von Functionen mehrerer veränderlicher Grössen 22

Dritte Vorlesung.

Ableitungen von Potenzen. Entwickelung einer beliebigen Potenz eines Binomii 25

Ableitungen von Potenzen 25

Binomial-Formel 37

Methode, die Constanten einer Stammgrösse zu finden. 48

Vierte Vorlesung.

Seite

Ableitungen der Exponential-Grössen und Logarithmen. Entwickelung dieser Grössen in Reihen 51

Ableitungen von Exponential-Grössen 51
Entwickelung der Exponential-Grössen 58
Ableitungen von Logarithmen 66
Entwickelung der Logarithmen 74
Die Reihe für Logarithmen convergent zu machen. 79
Natürliche Logarithmen 92
Anwendung der Exponential-Grössen auf den polynomischen Lehrsatz 94

Fünfte Vorlesung.

Ableitungen der Sinus und Cosinus nach den Bogen und der Bogen nach den Sinus und Cosinus, und Entwickelung dieser Grössen in Reihen 97

Ableitungen der Sinus und Cosinus 97
Entwickelung der Reihen für Sinus und Cosinus . 114
Ausdrücke der Bogen durch ihre Sinus und Cosinus. 133

Sechste Vorlesung.

Ableitungen von Grössen, die aus verschiedenen Functionen einer und derselben veränderlichen Grösse zusammengesetzt sind, oder die von dergleichen Functionen vermittelst Gleichungen abhängen 139

Siebente Vorlesung.

Vom Uebertragen der Abhängigkeit der veränderlichen Grössen in den Ableitungen . . . 165

Achte Vorlesung.

Seite

Von Entwickelung der Functionen, wenn man der veränderlichen Grösse einen bestimmten Werth beilegt. Fälle, in welchen die allgemeine Regel fehlt (est en defaut). Untersuchung dieser Fälle. Von dem Werthe der Brüche, deren Zähler und Nenner zugleich verschwinden . 176

Den Werth von $\frac{0}{0}$ zu finden 196

Den Werth von $\frac{\infty}{\infty}$ zu finden 200

Neunte Vorlesung.

Von der Methode, die Grenzen des Werths der Entwickelung einer Function zu finden, wenn man nur eine bestimmte Zahl von Gliedern nehmen will. Fälle, in welchen die Principien des Differential-Calculs fehlerhaft sind. Fundamental-Lehrsatz. Grenzen mehrerer Reihen. Strenge Art, die Ableitungen in die Theorie der Curven und der veränderlichen Bewegung einzuführen 207

Anwendung der Grenzen-Ausdrücke auf Geometrie und Mechanik 237

Zehnte Vorlesung.

Von den Ableitungs-Gleichungen und ihrem Nuzzen bei der Umformung der Functionen. Analyse der Winkel-Functionen 244

Anwendung der Ableitungs-Gleichungen auf Winkel-Functionen 248

Eilfte Vorlesung.

Seite

Fortsetzung der Analyse der Winkel-Functionen, worin die allgemeinen Ausdrücke zu den Tafeln der vorigen Vorlesung bewiesen werden. 270

Ausdrücke der Cosinus und Sinus vielfacher Bogen. 270

Der Cotesische und der Moivresche Lehrsatz . . . 309

Ausdrücke der Potenzen von Cosinus und Sinus . 314

Zwölfte Vorlesung.

Allgemeine Theorie der Ableitungs-Gleichungen und der willkürlichen Constanten 360

Beweis von der Zahl der Constanten 376

Werthe der Constanten 380

Zahl der Stammgleichungeu 383

Von der Urgleichung 386

Dreizehnte Vorlesung.

(Fortsetzung der vorigen.)

Theorie der zurückleitenden Multiplicatoren . 390

Vierzehnte Vorlesung.

Von den singulairen Ausdrücken zu gegebenen Ableitungs-Gleichungen, welche in ihren Stammgleichungen nicht enthalten sind. Theorie der singulairen Stammgleichungen . . . 409

Es giebt nur eine singulaire Urgleichung 422

Für den singulairen Fall sind $\frac{da}{dx}$, $\frac{da}{dy}$ *etc.* unendlich gross 431

Wiederholte singulaire Stammgleichungen 439

Der zurückleitende Multiplicator ist für den singulairen Fall ∞ gross 442

Uebersicht der vierzehnten Vorlesung 450

Funfzehnte Vorlesung.

Seite
Wie die singulaire Stammgleichung aus der Ableitungs-Gleichung gefunden wird 467

Sechzehnte Vorlesung.

Ableitungs-Gleichungen gegebener singulairer Stammgleichungen. Untersuchung einer Gattung von Gleichungen aller Ordnungen, welche nothwendig singulaire Stammgleichungen haben . 527
Die Ableitungs-Gleichung einer singulairen Stammgleichung zu finden 528
Ableitungs-Gleichungen, welche immer singulaire Stammgleichungen haben 548
Die singulaire Stammgleichung aus der vollständigen, ohne die Constanten zu entwickeln 559

Siebzehnte Vorlesung.

Ueber verschiedene Aufgaben die sich auf die Theorie der singulairen Stammgleichungen beziehen 576
Leibnitzische Aufgabe 576
Umfangende Curven 583
Johann Bernoullis Behandlung der Aufgabe . 587
Tailor fand zuerst direct eine singulaire Stammgleichung aus der Abgeleiteten 593
Fall bei Clairaut 596
Fälle singulairer Stammgleichungen bei Euler . . 604
Anwendung der obigen Theorie auf die Eulersche Aufgabe 611
Uebersicht dessen, was die Theorie der singulairen Stammgleichungen betrifft 614

Achtzehnte Vorlesung.

Seite

Digression über Gleichungen mit endlichen Differenzen; über den Uebergang von diesen Differenzen zu den Differentialen und über die Erfindung der Differential-Rechnung . 617

Von der Differenzen-Rechnung 617

Uebergang von der Differenzen- zur Differential-Rechnung 644

Form-Veränderungen der Functionen erfolgen bei dem Ausdrucke $\frac{0}{0}$ 651

Bemerkungen über die Erfindung der Differential-Rechnnng 658

Neunzehnte Vorlesung.

Von den Functionen zweier oder mehrerer veränderlichen Grössen und ihren Ableitungen. Bezeichnung und Entwickelung dieser Ableitungen 667

Begriffe von der Rechnung mit partiellen Differentialen 667

Ableitung von Functionen mit zwei unabhängig-veränderlichen Elementen 668

Grenzen für die Werthe der entwickelten Functionen 677

Wenn die veränderlichen Grössen, Functionen anderer sind 682

Bedingungen für die Vollständigkeit der Ableitungen. 684

Beispiel von rectifiablen Curven, mit Potenzen der Ableitungen 691

Von den Bezeichnungen 697

Zwanzigste Vorlesung.

Seite

Ableitungs-Gleichungen zwischen mehreren veränderlichen Grössen. Theorie dieser Gleichungen. Allgemeine Methode, die Stammgleichungen von Ableitungs-Gleichungen zwischen mehreren veränderlichen Grössen erster Ordnung zu finden 700

Ableitungs-Gleichungen mit zwei unabhängigen Elementen 700

Allgemeine Zurückleitung von Gleichungen von der lineären Form $\frac{dz}{dx} + \varphi(x, y)\frac{dz}{dy} = \Psi(x, y)$. . 705

Zurückleitung lineärer Ableitungs-Gleichungen zwischen vier veränderlichen Grössen 711

Uebersicht des Vorigen 715

Allgemeiner Satz von den willkürlichen Functionen in den Stammgleichungen 721

Vollständige, allgemeine und singulaire Stammgleichungen 727

Die vollständige Stammgleichung ist nie in der allgemeinen enthalten 730

Die Stammgleichung mit einer willkürlichen Function bei drei veränderlichen Grössen, ist nicht die allgemeinste 733

Beispiel einer allgemeinen, vollständigen und singulairen Stammgleichung 737

Geometrische Bedeutung der vollständigen, allgemeinen und singulairen Stammgleichungen. 739

Anwendung auf mehr als drei veränderliche Grössen. 748

Zurückleitungen beliebiger, nicht blos lineärer Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung zwischen drei veränderlichen Grössen. Schwierigkeiten dabei 751

Seite

Ableitungs-Gleichungen mit mehreren veränderlichen Grössen höherer Ordnungen 776

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Von den Bedingungs-Gleichungen, an welchen sich erkennen lässt, ob eine Function zwischen mehreren veränderlichen Grössen, von einer beliebigen Ableitungs-Ordnung, eine vollständige Ableitung sey. Analogie dieser Bedingungs-Gleichungen mit denen der isoperimetrischen Aufgabe. Geschichte dieser Aufgabe. Variations-Methode 778

Bedingungs-Gleichungen für unbekannte Stammgrössen 778

Begriff dieser Bedingungs-Gleichungen 778

Bedingungs-Gleichungen für Ableitungen von lineärer Form . 780

Bedingungen für beliebige Ableitungen mit zwei veränderlichen Grössen 783

Bedingungs-Gleichungen für beliebige Ableitungen mit mehreren abhängigen Grössen 797

Bedingungs-Gleichungen, wenn das Element der gegebenen Ableitung selbst abhängig ist 798

Bedingungen für Ableitungen höherer Ordnungen . 809

Bedingungen, wenn die Ableitung unentwickelt, durch eine Gleichung gegeben ist 812

Beispiele zu den obigen verschiedenen Fällen . . 820

Die höchste Ableitung darf immer nur in einer Abmessung vorkommen 827

Beispiel an einer unentwickelt gegebenen Ableitung. 829

Von der isoperimetrischen Aufgabe 831

Geschichte der isoperimetrischen Aufgabe 832

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

(Fortsetzung der vorigen.)

Seite

Die Variations-Rechnung, auf Fnnctionen gegründet . . , ... 858

Erklärung der Variations-Rechnung 858

Anwendung auf $v=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$ 865

Anwendung auf eine gegebene Ableitung von der Form

$v=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots\right)$ 929

Wie gegebene Bedingungs-Gleichungen zwischen den Grössen der Aufgabe in Rechnung zu bringen . 935

Von den relativen Grössten oder Kleinsten in der Variations-Rechnung 961

Von der Unterscheidung der Grössten von den Kleinsten. 965

Von den Grössten und Kleinsten, die von Functiotionen mehrerer veränderlicher Grössen abhängen. 966

Beispiele zur Variations-Rechnung 971

Ende des Inhalts.

Verzeichniss

einiger bei der Uebersetzung noch bemerkten Druckfehler des Originals, welche daselbst nicht angezeigt sind.

Seite 2 *Zeile* 7 *v. o. steht ces limites statt ces quantités.*

— 29 — 2 *v. u. steht* $1+\frac{1}{x}$ *statt* $1+\frac{i}{x}$.

— 38 — 10 *v. u. steht*

$$\frac{p^{\lambda} q^{\mu} r^{\nu} \ldots\ldots}{1.2.3\ldots\ldots \times 1.2.3\ldots\ldots\mu \times 1.2.3\ldots\ldots\nu \times \ldots\ldots} \text{ statt }$$

$$\frac{p^{\lambda} q^{\mu} r^{\nu} \ldots\ldots}{1.2.3\ldots\ldots\lambda \times 1.2.3\ldots\ldots\mu \times 1.2.3\ldots\ldots\nu \times \ldots\ldots}.$$

— 48 — 4 *v. o. steht coefficiens statt coefficiens constantes.*

— 48 — 15 *v. o. steht devéloppant le dénominateur statt devéloppant cette fraction.*

— 48 — 4 *v. u. steht* $A\left(\frac{p'}{q} - \frac{pq'}{q2}\right)$ *st tt*

$$A\left(\frac{p'}{q} - \frac{pq'}{q^2}\right).$$

— 49 — 7 *v. u. steht d'une fonction qui etc. statt d'une fonction d'une variable quelconque, qui etc.*

Seite 55 *Zeile* 12 *v. o. steht peuvent développer statt peuvent être développées.*

— 60 — 2 *v. u. fehlt zwischen* $f'x$ *und* $\varphi'''x$ *ein Comma.*

— 60 — 4 *v. u. fehlt zwischen* $f'x$ *und* $F'''x$ *ein Comma.*

— 62 — 3 *v. u. steht* $\frac{i^2}{2}y''$ *statt* $\frac{0^2}{2}y''$.

— 64 — 12 *v. o. steht divisée par x statt divisée par x'.*

— 83 — 8 *v. o. steht on n'eût toujours statt on n'eût toujours que.*

— 87 — 3 *v. o. steht dirigé statt divisé.*

— 91 — 7 *v. u. steht Donc si P est la plus grande valeur positive ou negative des quantités etc. statt Donc si P est la valeur positive ou negative de la plus grande des quantités etc.*

— 103 — 10 *v. u. steht* $i - \frac{i^3}{2} + \frac{i^5}{5} +$ *etc. statt* $i - \frac{i^3}{3} + \frac{i^5}{5} +$ *etc.*

— 130 — 10 *v. o. steht* $f' = -\frac{m}{2}$ *etc. statt* $f'u = -\frac{m}{2}$ *etc.*

— 145 — 9 *v. o. steht* $y^{2m} - 2y \cos^m x + 1 = 0$ *statt* $y^{2m} - 2y \cos m x + 1 = 0$.

— 145 — 11 *v. u. steht* $y^2 - 2 \cos x + 1 = 0$ *statt* $y^2 - 2y \cos x + 1 = 0$.

— 146 — 12 *v. o. steht* $y^2 - 2\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2c}{m}\right)y +$ *statt* $y^2 - 2\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2c}{m}\right)y + 1$.

*

Seite 154 *Zeile* 8 *v. o. steht* $y - xy' + c\sqrt{(1+y'^2)}$ *statt* $y - xy' + c\sqrt{(1+y'^2)} = 0$.

— 154 — 10 *v. o. steht* $y + ax + c\sqrt{(1+a^2)}$ *statt* $y + ax + c\sqrt{(1+a^2)} = 0$.

— 156 — 7 *v. o. steht* $\frac{y''y}{y'} - 1 = 0$ *statt* $\frac{y''x}{y'} - 1 = 0$.

— 161 — 5 *v. u. steht du premier ordre statt du troisiéme ordre.*

— 174 — 7 *v. u. steht* $\Phi(a, b)$ *statt* $\Phi'(a, b)$.

— 189 — 10 *v. u. steht resultant st. resultante.*

— 195 — 10 *v. o. steht* $x, y, y \ldots y^{(n-1)}$ *statt* $x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$.

— 197 — 11 *v. u. steht* $x^2 - 2ay + a^2 - b = 0$ *statt* $x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$.

— 198 — 6 *v. o. steht* $y' - xy'$ *etc. statt* $y - xy'$ *etc.*

— 213 — 7 *v. o. steht ces deux statt ces deux constantes.*

— 213 — 13 *v. o. steht* $x^2 = 2ay + a^2 + b = 0$ *statt* $x^2 = 2ay + a^2 + b$.

— 226 — 11 *v. o. steht* $y''' = \frac{y''^2 - 1}{2(xy''^2 - y')}$ *statt* $y''' = \frac{y''^2 - 1}{2(xy'' - y')}$.

— 231 — 12 *v. u. steht* $\varphi(x, y, y')$ *statt* $\varphi(x, y, y', y'')$.

— 232 — 6. 7. 8. 10. 11 *u.* 12 *v. o. steht überall* $\varphi'(y')$ *statt* $\varphi'(y'')$.

— 238 — 4 *v. u. steht* $\varphi(a,b) = 0$ *statt* $\Phi(a,b) = 0$.

— 239 — 13 *v. o. steht* $\Phi(x, y, a, b) = 0$ *statt* $F(x, y, a, b) = 0$.

— 239 — 2 *v. u. steht et* φ *et* Ψ *statt* φ *et* Ψ.

— 241 — 3 *v. u. steht* $(b - B)$ *statt* $(b - B^2)$.

Seite 242 Zeile 4 *v. u. steht* $-B^2\frac{yy'}{a}$ *statt* $-B^2\frac{yy'}{x}$.

— 243 — 3 *v. u. steht* $y=\pm Ax\pm B$ *statt* $y=\pm(Ax\pm B)$.

— 246 — 12 *v. o. steht* $y-\frac{a}{2}x^2+bx-c=0$ *statt* $y^2-\frac{a}{2}x^2-bx-c=0$.

— 247 — 7 *v. u. steht* $F'''(x, y)=0$ *etc. statt* $F''(x,y)=0$ *etc.*

— 249 — 9 *v. u. steht* $[\varphi'(y)\times$ *etc. statt* $[\varphi'(y')\times$ *etc.*

— 258 — 9 *v. o. steht* $\frac{\varphi'}{\psi'}=\frac{\varphi}{x-\psi}$ *statt* $\frac{\varphi'}{\psi'}=\frac{\psi}{\varphi-x}$.

— 259 — 2 *u.* 3 *v. o. steht l'equation* $F''(x,y)=0$ *statt la quantité* $F'(x,y)$

— 260 — 5 *v. u. steht* $\psi'=0$, $\xi'=0$; *statt* $\psi'=0$, $\xi'=0$ *etc.*

— 266 — 13 *v. o. steht* $b=ak$, *statt* $b^2=ak$

— 270 — 16 *v. o. steht ordonnée statt donnée.*

— 274 — 3 *v. u. steht* $\Phi[x+yy', \sqrt{y(1+y'^2)}]=0$ *statt* $\Phi[x+yy', y\sqrt{(1+y'^2)}]=0$.

— 278 — 12 *v. u. steht* $\Pi u-u\Pi'u-\Phi'u=0$, *statt* $\Pi u-\Pi(x-u)'u-\Phi'u=0$;

— 281 — 2 *v. o. steht seizième; st. quinzième;*

— 284 — 8 *v. u. steht* $\frac{2(k-y^2}{y(p+q-2x)}$; *statt* $\frac{2(k-y^2)}{y(p+q-2x)}$;

— 285 — 5 *v. o. steht du grand axe statt du demi grand axe.*

— 296 — 2 *v. o. steht* y *en* y *statt* y *en* y'.

Seite 296 Zeile 3 *v. o. steht* $y=ax$ *etc. st.* $y'=ax$ *etc.*

— 307 — 3 *v. o. steht* $y=-\frac{x^2}{2}$ *statt* $y=-\frac{x^2}{4}$.

— 308 — 5 *v. u. steht de* y, *on ait statt de* y', *on ait.*

— 314 — 12 *v. o. steht* $\cos^{m-1} x \sin^3 x$ *statt* $\cos^{m-3} x \sin^3 x$.

— 316 — 9 *v. o. steht* $f(x-2dx)$ *st.* $f(x+2dx)$.

— 336 — 7 *v. u. steht* $8m(m-1)(m-2)^3$ *etc. statt* $8m(m-1)(m-2)$ *etc.*

— 337 — 10 *v. o. steht* $8m(m-1)(m+2)$ *etc. statt* $8m(m-1)(m-2)$ *etc.*

— 341 — 4 *v. o. steht* $x''=\varphi(x,y,z)$ *statt* $z''=\varphi(x,y,z)$.

— 355 — 4 *v. o. steht* $z''=-\frac{F'(x)}{F'(y)}$ *statt* $z''=-\frac{F'(x)}{F'(z)}$.

— 357 — 8 *v. o. steht ces variables statt deux variables.*

— 357 — 16 *v. o. steht* $z'-Ny'=0$ *statt* $z'-Nx'=0$.

— 358 — 6 *v. u. steht* $z''+Mz''+N$ *statt* $z''+Mz''=N$.

— 359 — 12 *v. o. steht* φ *statt* φP *und* Q *st.* P.

— 364 — 4 *v. u. steht elles contiennent statt elle contienne.*

— 384 — 15 *v. o. steht celle-ci statt celles-ci.*

— 396 — 2 *v. u. steht* $\left(\frac{z'}{y'}\right)=y-a, \left(\frac{z'}{x'}\right)=x-c$; *statt* $\left(\frac{z'}{x'}\right)=y-a, \left(\frac{z'}{y'}\right)=x-c$;

— 399 — 7 *v. o. steht* $z=(y-a)x'$ *st.* $z'=(y-a)x'$.

Seite 400 Zeile 10 *v. u. steht* $\frac{z}{(y-a)^2} = \varphi' a$. *statt*
$-\frac{z}{(y-a)^2} = \varphi' a$.

— 414 — 10 *v. u. steht fonction de* x, y', y'' *etc.* *statt fonction de* x, y, y', y'' *etc.*

— 416 — 8 *v. o. steht* $Pf'(u')$ *statt* $Pf'(u)$.

— 422 — 5 *v. u. steht* $+\varphi(u,x,y)$ *st.* $\times\varphi(u,x,y)$.

— 426 — 4 *v. u. steht l'isoperimetisme statt l'isoperimetrisme.*

— 432 — 8 *v. o. steht* $dQ(\omega + 2\pi) + d^2Q.\pi$ *statt* $dR(\omega + 2\pi) + d^2R.\pi$.

— 432 *unter der letzten Zeile muss das Wort Par wegfallen.*

— 459 *Zeile* 5 *v.u. steht entre x et y st. entre y et z.*

— 463 — 2 *v. u. steht* $U =$ *statt* $\dot{U} =$

— 479 — 3 *v. o. steht fonctions st. constantes.*

— 479 — 8 *v. u. steht* $\overset{1}{V}x$ *statt* $\dot{V}x$.

— 480 — 12 *v. u. steht indeterminée statt determinée.*

— 480 — 5 *v. u. steht* $y = y'_0 x + \mu$, $z = z'_0 x + \nu$ *statt* $y = (y'_0)x + \mu$, $z = (z'_0)x + \nu$.

— 480 *unt. Zeile steht* $y = (y')_0 x + \pi$, $z = (z')_0 x + \varrho$ *statt* $y = y'_0 x + \pi$, $z = z'_0 x + \varrho$.

— 486 *Zeile* 12 *v. o. steht* $z''(z'y'' - y'z'')$ *statt* $z'(z'y'' - y'z'')$.

— 486 — 14 *v. o. steht* $V^{\frac{3}{2}}$ *st.* V^3 *und* $\sqrt{(1 + y'_{.} + z'^2)}$ *statt* $\sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)}$.

— 486 — 15 *v. o. steht* $V^{\frac{3}{2}}$ *statt* V^3.

— 486 — 17 *v. o. steht* $V^{\frac{3}{2}}$ *statt* V^3.

— 489 — 8 *v. u. steht bracristochrone statt brachistochrone.*

Seite 491 Zeile 8 v. u. steht $z\lambda\varphi z$ statt $2\lambda\varphi z$.

— 496 — 10 v. o. steht $\frac{x_1}{\gamma'_1}+\dot{\gamma}_1=0$ statt $\frac{\dot{x}_1}{\gamma'_1}+\dot{y}_1=0$.

— 497 — 2 v. o. steht $\dot{\gamma}_0-(\gamma'_0)x_0=0$ statt $\dot{y}_0-(\gamma'_0)\dot{x}_0=0$.

— 497 — 10 v. u. steht $\Delta'(y'_0)=0$ st. $\Delta'(\gamma_0)=0$.

— 500 — 12 v. o. steht $\frac{1}{\sqrt{a}}\gamma_1$ statt $\frac{1}{\sqrt{a}}\dot{y}_1$.

— 500 — 2 v. u. steht $\frac{1}{\sqrt{a}}\gamma_1$ statt $\frac{1}{\sqrt{a}}\dot{y}_1$.

In der, dem Original beigefügten Anzeige einiger, unter den obigen nicht mitbegriffenen Druckfehler, steht: auf Seite 330 Zeile 5 von oben solle es heissen $F'''(v,y)$ *statt* $f''''(x,y)$; *es muss aber nicht* $F'''(v,y)$, *sondern* $f'''(x,y)$ *heissen.*

Desgleichen, auf der nemlichen Seite, in der 11ten Zeile von oben solle man $\frac{i^2}{2}f'''(x,y)$ *statt* $\frac{i2}{2}f''(x,y)$ *lesen. Die unrichtig gedruckte Formel ist aber nicht* $\frac{i2}{2}f''(x,y)$, *sondern* $\frac{i^2}{2}f''(x,y)$.

Vorlesungen

über die

Functionen - Rechnung.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Erste Vorlesung.

Vom Gegenstande der Functionen-Rechnung und den Functionen überhaupt.

1.

Die Functionen-Rechnung hat den nemlichen Zweck, wie die Differential- [*und Integral*-] Rechnung, im weitesten Sinne, aber nicht ihre Schwierigkeiten der Principien und Entwickelungen. Sie vereinigt die Differential- [*und Integral*-] Rechnung mit der Algebra, von welcher sie bis jetzt getrennt war, [*zum Nachtheil der Förderung und Verbreitung der Mathematik. Man hält im gemeinen Leben schon die Algebra für eine schwer zu erlernende Wissenschaft und wenn sie unvortheilhaft behandelt wird, ist sie es wirklich. Um wieviel schwerer muss dem Lernenden nicht gar die Differential- und Integral-Rechnung vorkommen, die gar mit dem Unendlichen und Uebersinnlichen umgeht! Gleichwohl sind beide nichts anders als der Ausdruck sehr einfacher und natürlicher Schlüsse durch Zei-*

chen, und wenn es auf Schwierigkeiten ankommt, so sind sie beide kaum der Untersuchung der Eigenschaften der gewöhnlichen Zahlen zu vergleichen. Die sogenannte Differential- und Integral-Rechnung ist nichts anders, als ein Theil der Algebra, oder, wenn man ein weniger barbarisches, und seiner Neben-Bedeutungen wegen, widerwärtiges Wort zulassen will, der Rechenkunst.]

2.

Man kennt die Schwierigkeiten bei der Voraussetzung unendlich kleiner Grössen, worauf Leibnitz die Differential-Rechnung gründete. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, betrachtete Euler die Differentiale als Nullen, welches aber für die Verhältnisse von Differentialen den Ausdruck Null durch Null giebt, der keiner deutlichen Vorstellung fähig ist.

Maclaurin und d'Alembert bedienten sich des Begriffs der Grenzen und betrachteten das Verhältniss der Differentiale als das Grenz-Verhältniss endlicher, verschwindender Differenzen. Diese Ansicht verschiebt aber nur die Schwierigkeit; denn zuletzt ist doch das Verhältniss verschwindender Differenzen wiederum das Verhältniss von Null zu Null.

3.

Uebrigens ist die Benennung „Grenze" für analytische Ausdrücke, in welchen gewisse Grössen verschwanden, nicht passend, weil die Grössen, nach-

Functionen - Rechnung.

dem sie Null geworden sind, über Null hinaus, negativ werden können. So kann man, z. B. in der Geometrie, nicht eigentlich sagen, dass die Subtangente die Grenze der Subsecante sey; denn die Subsecante kann noch wachsen, nachdem sie der Subtangente gleich wurde.

Wirkliche Grenzen sind, den Vorstellungen der Alten zu Folge, Grössen, welche auf keine Weise überschritten werden können, denen man sich aber so weit nähern kann, als man will. So ist z. B. die Kreis-Linie eine wahre Grenze der in- und umschriebenen Vielecke, weil das eingeschriebene Vieleck, so gross auch die Zahl seiner Seiten sein mag, nie aus dem Kreise heraus, das umschriebene nie in denselben hineintreten kann. Ferner sind Asymptoten wahre Grenzen der Curven, welche sich ihnen nähern.

Ich leugne zwar nicht, dass man durch die Grenzen, wenn man sie gehörig behandelt, die Differential- [*und Integral-*] Rechnung strenge begründen könne, wie Maclaurin, d'Alembert, und mehrere andere Schriftsteller, nach ihnen, thaten. Aber die Schlüsse, deren man sich alsdann bedienen muss, sind dem Geiste des Gegenstandes, wenn nicht entgegen, so doch fremd. Es scheint hier keine andere Metaphysik angemessen, als die, welche in den ersten Principien und den Fundamental - Operationen der Rechnung selbst liegt.

Gegenstand der

4.

Was die Fluxions'-Methode betrifft, so kann man allerdings die Fluxionen, ohne mechanische Vorstellungen zu Hülfe zu nehmen, blos als die Geschwindigkeiten betrachten, mit welchen sich Grössen ändern. Aber der analytische Ausdruck dieser Geschwindigkeiten hängt doch wieder von unendlich-kleinen oder verschwindenden Grössen ab und ist folglich den nemlichen Schwierigkeiten unterworfen, wie die Differential-Rechnung.

5.

Geht man diese verschiedenen Methoden, oder vielmehr diese verschiedenen Ansichten einer und derselben Methode durch, so sieht man leicht, dass sie alle keinen andern Zweck haben, als die ersten Glieder der Entwickelung einer Function zu finden, wenn man diese Glieder von dem Reste der entwickelten Reihe absondert; weil alle Aufgaben, auf deren Auflösung die Differential-Rechnung angewandt wird, einzig und allein dieser ersten Glieder bedürfen. Und, man kann sagen, dass man damit seinen Zweck schon erreichte, ehe man noch bemerkte, dass darin das einzige Ziel der Operation liegt.

6.

Die Methode des Unendlich-Kleinen, die hernach in die Methode verschwindender Grössen und der Grenzen überging, entstand aus der Untersuchung

der Curven, die Fluxions-Methode aus der Untersuchung der Bewegung. Man hat die Sätze, welche man bei diesen Untersuchungen fand, in die Analysis eingeführt, aber man scheint nicht sogleich bemerkt zu haben, dass die für diese Methode gehörenden Aufgaben, analytisch betrachtet, blos die Ausmittelung der abgeleiteten Functionen, welche die ersten Glieder der Entwickelung der gegebenen Functionen sind, oder die umgekehrte Berechnung der Stammgrössen, aus den Ableitungen zum Gegenstande haben.

Newton hatte zwar bei seiner ersten Auflösung der Aufgabe von der Bahn eines, in einem widerstehenden Mittel sich bewegenden, schweren Körpers bemerkt, dass diese Aufgabe durch die ersten Glieder der Reihe für die Ordinate aufgelöset werde; aber er irrte bei der Anwendung seines Princips. Bei der zweiten Auflösung bediente er sich blos der Differential-Rechnung, indem er die Differenzen von vier auf einander folgenden Ordinaten in Rechnung brachte, und obgleich die Stelle blieb, wo es heisst, dass sich die Aufgabe durch die ersten Glieder der Reihe auflösen lasse, so sieht man doch leicht, dass diese Stelle, weder mit dem Vorhergehenden, noch mit dem Folgenden in Verbindung steht.

Es ist also viel natürlicher und einfacher, unmittelbar die Functionen zu entwickeln, ohne den metaphysischen Umweg des Unendlich-Kleinen, oder der Grenzen zu nehmen. Macht man die Differential- [*und Integral-*] Rechnung blos von einer

solchen Entwickelung abhängig, so vereinigt man sie dadurch mit der Algebra.

7.

Zur Zeit der Entstehung der Differential-Rechnung war der Begriff von Functionen weniger umfassend.

Die ersten Analysten gebrauchten das Wort: „Function" nur zur Bezeichnung der verschiedenen Potenzen einer Grösse. Späterhin dehnte man dessen Bedeutung auf eine beliebige Grösse aus, die auf irgend eine Weise aus einer andern Grösse zusammengesetzt ist. Jetzt bezeichnet man durch „Function" allgemein den Werth einer Grösse, die auf irgend eine gegebene Weise von einer oder mehreren Grössen abhängt. [*Deshalb auch bedient sich der Uebersetzer des Worts Function bei seinen eigenen Arbeiten gar nicht, sondern nennt den Gegenstand gerade zu bei seinem Namen, nemlich „abhängige Grösse." Uebrigens braucht die Art der Abhängigkeit auch nicht gegeben zu sein. Function bezeichnet, auch bei Lagrange, jede Grösse, von welcher man blos weiss, dass sie von einer oder mehreren andern Grössen abhängt, ohne Rücksicht, ob die Art der Abhängigkeit gegeben sey, oder nicht. Es ist eine eigene, viel umfassende Art von Aufgaben, die Art oder Form der Abhängigkeit unbestimmter Functionen zu finden.*

Functionen-Rechnung.

8.

Aus diesem Gesichtspuncte betrachtet, ist die Algebra die Wissenschaft von den Functionen und, wie leicht zu sehen, besteht die Auflösungs-Kunst der Gleichungen in nichts anderem, als die Werthe der unbekannten Grössen, in bestimmten Functionen der gegebenen Grössen, zu finden. Diese Functionen bezeichnen alsdann die verschiedenen Operationen, welche man mit den bekannten Grössen vornehmen muss, um die Werthe der gesuchten zu finden. Sie sind nichts anders, als das letzte Resultat der Rechnung.

9.

In der Algebra aber betrachtet man nur diejenigen Functionen, welche aus verallgemeinerten, und durch Buchstaben ausgedrückten, arithmetischen Operationen hervorgehen, statt dass in der eigentlichen Functionen-Rechnung Functionen vorkommen, welche aus algebraischen Reihen-Entwickelungen entstehen, wenn man einem Elemente oder mehreren Elementen der Functionen unbestimmte Veränderungen beilegt. [*Die Functionen-Rechnung kann allerdings auf diese Weise zu einem allgemeinern Theile der Algebra werden, der noch wenig bearbeitet ist; aber nur in so fern, als die Form der abhängigen Grössen unbestimmt ist. Für bestimmte Formen reichen die gewöhnlichen Operationen der Algebra zu.*]

10.

Aus der Entwickelung der Functionen, allgemein betrachtet, entstehen die Ableitungen der verschiedenen Ordnungen. Ist der Algorithm der Ableitungen einmal gefunden, so kann man sie, für sich selbst und unabhängig von den Reihen betrachten, von welchen sie herkommen. Wird also eine gegebene Function als Stammgrösse betrachtet, so lassen sich daraus, nach sehr einfachen und gleichförmigen Regeln, andere Functionen finden, welche ich abgeleitete nenne; und hat man Gleichungen zwischen mehreren veränderlichen Grössen, so kann man auch, entweder von diesen zu den abgeleiteten übergehen, oder zu den Stammgleichungen zurückkehren. Diese Umformungen kommen mit den Differentiations- und Integrations-Operationen überein; in der Functionen-Theorie aber hängen sie von blos algebraischen Operationen ab, die auf einfachen Rechnungs-Principien beruhen.

11.

Die Ableitungen haben in der Geometrie, an den Curven-Flächen unter den Coordinaten, an den Tangenten, den Krümmungs-Halbmessern u. s. w. in der Mechanik, an den Geschwindigkeiten und Kräften, bestimmte Bedeutungen [*wie man in dem ersten Theile sahe*]. Betrachtet man z. B. die Fläche einer Curve als Function der Abscisse, so ist die Ordinate die abgeleitete Function dieser Fläche, oder ihre erste Ableitung, [*Functionen-Theorie*, 2*ter*

Theil §. 27.] das Verhältniss der Ordinate zur Subtangente ist die erste Ableitung der Ordinate, und folglich die zweite Ableitung der Curven-Fläche [*Functionen-Theorie*, 2*ter Theil §.* 4. 5.]. Der Krümmungs-Halbmesser hängt von den beiden ersten Ableitungen der Ordinate ab [*Functionen-Theorie*, 2*ter Theil §.* 22. 23.] u. s. w. Eben so, wenn man den von einem bewegten Körper durchlaufenen Raum als eine Function der während der Bewegung verflossenen Zeit betrachtet, ist die Geschwindigkeit die erste, und die beschleunigende Kraft die zweite Ableitung des Raumes. [*Functionen-Theorie*, 3*ter Theil*, 1*ster Abschnitt.*] Dass die Functionen-Rechnung für die Elemente der Geometrie der Curven und der Mechanik Ausdrücke liefert, die eben so einfach verständlich sind, als die algebraischen Ausdrücke von Potenzen und Wurzeln, ist vielleicht nicht einer ihrer geringsten Vorzüge.

12.

Betrachtet man eine Function in Beziehung auf eine der Grössen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, [*welche Grössen man Elemente der abhängigen Grösse nennen kann,*] so abstrahirt man von dem Werthe des Elements, und sieht blos auf die Art, wie die Function daraus zusammengesetzt ist, das heisst, auf die Art, wie das Element mit sich selbst und den übrigen Grössen verbunden ist. Die Function bleibt also unveränderlich dieselbe, wie sich auch der Werth des Elementes ändern mag, während

die übrigen, damit verbundenen Grössen, constant bleiben. Hieraus folgt für Functionen von selbst der Unschied unveränderlicher und veränderlicher Grössen.

13.

In der Algebra unterscheidet man blos bekannte und unbekannte Grössen, und bezeichnet gewöhnlich die bekannten durch die ersten, die unbekannten durch die letzten Buchstaben des Alphabets. Bei der Anwendung der Algebra auf die Theorie der Curven ist man zuerst genöthigt gewesen, unter den in der Gleichung der Curve vorkommenden Grössen, die gegebenen, wie Axen, Parameter u. s. w. von den unbestimmten, den Coordinaten, zu unterscheiden. Späterhin hat man diese Grössen, angemessener, in constante und veränderliche getheilt. Die Rechnung mit Functionen führt auf die nemliche Unterscheidung.

Wir wollen also schlechtweg jeden Rechnungs-Ausdruck, in welchem eine oder mehrere Grössen, auf irgend eine Weise, vorkommen, entweder mit Grössen vermischt, die gegebene und bestimmte Werthe haben, während die andern Grössen beliebige Werthe haben können, oder von denselben abgesondert, Functionen der veränderlichen Grössen nennen [*deutsch: abhängige Grössen*].

14.

In der Regel wollen wir die veränderlichen Elemente der Functionen durch die letzten Buchstaben

Functionen-Rechnung.

des Alphabets x, y *etc.* und die in den Functionen vorkommenden Constanten durch die ersten Buchstaben a, b, c.... bezeichnen. Um die Functionen einer einzelnen veränderlichen Grösse, wie x, zu bezeichnen, wollen wir vor dem x ein f oder F setzen. Soll aber die Function einer, schon aus x zusammengesetzten, Grösse bezeichnet werden, wie x^2, oder $a + bx$ *etc.* so werden wir die zusammengesetzte Grösse in Klammern einschliessen. So soll fx eine Function von x, hingegen $f(x^2)$, $f(a + bx)$ *etc.* sollen Functionen von x^2, $a + bx$ *etc.* bezeichnen.

Um eine Function zweier von einander unabhängiger Grössen, wie x, y, zu bezeichnen, wollen wir $f(x, y)$ schreiben u. s. w. Kommen andere Zeichen vor, so werden wir sie besonders erklären.

Haben zwei Functionen zweier, von einander verschiedener veränderlicher Grössen x und y einerlei Form und einerlei Constanten, so sind sie gleich, und können, in einer und derselben Rechnung, auf die nemliche Weise bezeichnet werden. Z. B. fx und fy sind zwei gleiche Functionen, welche identisch das Nemliche bedeuten, wenn $y = x$ ist. Sind aber die beiden Functionen, zwar auf einerlei Weise zusammengesetzt, jedoch mit verschiedenen Constanten verbunden, so kann man sie, allgemein gesprochen, in einer und derselben Rechnung, nicht mehr auf einerlei Art bezeichnen. Sind indessen die beiden Functionen nur allein durch den Werth einer Constante verschieden, welcher in der einen a in der andern b sein mag, so lassen sie sich ebenfalls noch durch

das nemliche Zeichen ausdrücken, z. B. durch $f(x, a)$ und $f(x, b)$, als gleiche Functionen von x, a und x, b. In diesem Fall müssen dann die Grössen a und b in dem Ausdrucke der Functionen angegeben werden, weil diese Grössen, obgleich constant, in jeder Function, nunmehr als veränderlich, von einer zur andern, betrachtet werden können.

Wir übergehen das weitere Detail von den verschiedenen Formen der Functionen, und wollen dagegen untersuchen, wie die Functionen auseinander abzuleiten sind, in welcher Operation wesentlich die Functionen-Rechnung besteht.

[*Wenn man die sogenannte Infinitesimal-Rechnung überblickt, so wird man finden, dass sich über die Metaphysik und die Geschichte dieser Wissenschaft schwerlich mit wenigen Worten Eindringenderes und Erschöpfenderes sagen lässt als Lagrange hier thut. Die vorstehenden Ansichten sind völlig klar. Diejenigen welche, später, nach Lagrange, mehr oder weniger von seinen Ansichten abwichen, und vielleicht mehr oder weniger wieder zu den alten Ansichten zurückkehrten, entfernten sich um eben so viel von der Wahrheit.*

Der Inhalt dieses ersten Abschnitts steht auch, besonders abgedruckt, im 6ten Heft des Journals de l'ecole polytechnique S. 232, unter dem Titel: Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques.]

Zweite Vorlesung.

Ueber die Entwickelung der Functionen einer veränderlichen Grösse, wenn man dieselbe sich verändern lässt. Allgemeines Gesetz der Entwickelung. Ursprung der abgeleiteten Grössen. Verschiedene Ordnungen der Ableitungen. Ihre Bezeichnung.

Allgemeine Entwickelung von $f(x+k)$.

15.

Man nehme eine Function fx irgend einer veränderlichen Grösse x an. Setzt man $x+k$ statt x, wo k irgend eine unbestimmte Grösse bezeichnet, [*im Original steht i. Wie im ersten Theil, und aus den daselbst angeführten Gründen, setze ich k statt i,*] so erhält man $f(x+k)$, welches, nach der Theorie der Reihen, in eine Reihe von der Form $fx + kp + k^2 q + k^3 r \ldots$ entwickelt werden kann, in welcher die Coefficienten p, q, $r \ldots$ der Potenzen von k, neue Functionen von x sind, die von der

Stammgrösse fx abgeleitet werden können, von der Grösse k aber unabhängig sind.

16.

Es ist klar, dass die Gestalt der Functionen p, q, r.... einzig und allein von der Gestalt der gegebenen Stammgrösse fx abhängt. In einzelnen Fällen lassen sich diese Functionen nach den Regeln der gewöhnlichen Algebra finden, wenn man die gegebene Function in eine, nach den Potenzen von k geordnete, Reihe entwickelt. Diese Ableitung der Functionen ist eine allgemeinere algebraische Operation, als die Potenziirung und Wurzelausziehung, und die vorzüglichsten Aufgaben der Geometrie und Mechanik hängen von derselben ab, wie wir in der Functionen-Theorie zeigten.

17.

Um aber Nichts unerwiesen vorauszusetzen, wollen wir damit anfangen, die Gestalt der Reihe zu untersuchen, in welche sich eine beliebige Function fx entwickeln lässt, wenn man darin $x+k$ statt x setzt, und von welcher wir behaupteten, dass sie nur Potenzen von k mit ganzen positiven Exponenten enthalten könne. Dieser Umstand wird zwar schon durch die Entwickelung der verschiedenen bekannten Functionen bestätigt, aber Niemand hat noch, so viel ich weiss, sie *a priori* zu beweisen versucht, welches gleichwohl, und zwar um so mehr, nöthig zu sein scheint, da es einzelne Fälle giebt, in welchen eine solche Entwicke-

von $f(x+k)$.

lung nicht Statt findet. [*Uebersetzer überzeugt sich von dieser Nothwendigkeit nicht. Er hat die Gründe seiner Meinung im ersten Theil, beim ersten Abschnitte, angegeben. Besondere Fälle haben auf die allgemeine Entwickelung keinen Einfluss.*]

18.

Ich will zuerst zeigen, dass in der Reihe, welche durch die Entwickelung von $f(x+k)$ entsteht, k nicht in Potenzen von gebrochenen Exponenten vorkommen kann, in so fern x nicht besondere Werthe hat.

In der That ist klar, dass eine Wurzel von k nur von Wurzelgrössen von x in fx herkommen könnte und dass die Substitution von $x+k$ statt x die Zahl der Wurzeln weder vermehren noch vermindern, noch ihre Natur ändern kann, so lange x und k unbestimmte Grössen sind. Auf der andern Seite weiss man, aus der Theorie der Gleichungen, dass jede Wurzelgrösse so viele verschiedene Werthe hat, als ihr Exponent [*der Nenner des gebrochenen Exponenten*] Einheiten, und nicht mehrere oder weniger [*worunter auch gleiche Werthe sein können*], dass also jede irrationale Function so viele verschiedene Werthe hat, als man Combinationen der verschiedenen in ihr vorkommenden Wurzelgrössen machen kann. Könnte also die Entwickelung von $f(x+k)$ ein Glied von der Form $uk^{\frac{m}{n}}$ enthalten, so müsste die Function fx nothwendig irrational sein und folg-

lich eine bestimmte Zahl verschiedener Werthe haben, welche Zahl nothwendig für die Grösse $f(x+k)$ und deren Entwickelung die nemliche sein müsste. Könnte nun aber diese Entwickelung durch die Reihe

$$fx + pk + qk^2 \ldots + uk^{\frac{m}{n}}$$

ausgedrückt werden, so würde sich jeder Werth von fx mit jedem der Werthe von $\sqrt[n]{(k^m)}$ combiniren, und die Function $f(x+k)$ würde, entwickelt, mehr Werthe haben, als unentwickelt, welches unmöglich ist. [*Man sehe die Anmerkung zu §. 2. im ersten Theile des ersten Bandes.*]

Dieser Beweis ist allgemein und strenge, so lange die Werthe von x und k unbestimmt sind. Er hört auf, es zu sein, sobald x und k bestimmte Werthe annehmen, denn dergleichen Werthe können Wurzelgrössen in fx aufheben, die gleichwohl in $f(x+k)$ bleiben. Wir werden diese Fälle, und was daraus folgt, besonders untersuchen.

19.

Die Entwickelung von $f(x+k)$ kann also, allgemein, keine Potenzen von k mit gebrochenen Exponenten enthalten.

Es ist leicht zu zeigen, dass auch keine Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen können.

Denn, wäre unter den Gliedern der Entwickelung eines von der Form $\frac{r}{k^m}$, wo m eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist dieses Glied, für $k = 0$, unendlich

lich gross. Also müsste fx unendlich gross sein, welches nur für besondere Werthe von x der Fall sein kann.

20.

Wir sind also versichert, dass, wenn fx eine beliebige Function von x bezeichnet, die Grösse $f(x+k)$, allgemein gesprochen, allemal in eine Reihe von der Form

$$fx + kp + k^2 q + k^3 r + k^4 s \ldots.$$

entwickelt werden kann, in welcher p, q, $r \ldots.$ neue, von fx abgeleitete Functionen von x sind. [*Dieser Schluss scheint etwas zu rasch; denn man sieht nicht ein, wie daraus, dass in der Entwickelung der Grösse $f(x+k)$, deren Form als unbekannt angenommen wird, kein Glied mit Potenzen von k vorkommen kann, deren Exponenten gebrochen oder negativ sind, wenn man auch den obigen Beweis dieses Umstandes gelten lässt, folge, dass die Entwickelung von $f(x+k)$ allemal grade die Gestalt $fx + kp + k^2 q \ldots.$ haben müsse. Kann sie auch keine Glieder mit $k^{\frac{m}{n}}$ oder k^{-m} haben, so braucht sie, wie es scheint, deswegen noch nicht grade der Reihe $fx + kp + k^2 q \ldots.$ gleich zu sein; denn es giebt unstreitig, ausser $k^{\frac{m}{n}}$, k^{-m}, und k, k^2, $k^3 \ldots.$ Theils noch andre schon bekannte Formen mit k, Theils können, möglicherweise, noch wieder*

Allgemeine Entwickelung

andere Formen erfunden werden. Der Beweis für die Gestalt der Reihe ist also wohl nicht zulänglich. Glücklicherweise ist, dem Anscheine nach, gar kein solcher Beweis nöthig, sondern die Gestalt der Entwickelung kann willkürlich vorausgesetzt werden. Man sehe die oben erwähnte Anmerkung im ersten Theil.]

21.

Obgleich die Form der Ableitungen insbesondere von der Form ihrer Stammgrösse abhängt, so findet doch eine allgemeine Abhängigkeit zwischen den Ableitungen Statt, welche wir untersuchen wollen.

Man setzte, die unbestimmte Grösse x gehe in $x + e$ über, wo e eine beliebige unbestimmte Grösse bedeutet, die von k unabhängig ist, so wird offenbar $f(x + k + e)$ aus $f(x + k)$. Das Nemliche aber erhält man auch, wenn man in $f(x + k)$, $k + e$ statt k setzt. Also ist das Resultat das selbe, man mag in die Reihe $fx + kp + k^2 q + k^3 r \ldots.$, die der Function $f(x + k)$ gleich vorausgesetzt wird, $k + e$ statt k, oder $x + e$ statt x setzen.

Setzt man $k + e$ statt k, so erhält man

$$fx + (k + e)p + (k + e)^2 q + (k + e)^3 r \ldots.$$

oder, wenn man die einzelnen Glieder entwickelt und, der Kürze wegen, nur die beiden ersten Glieder jeder Potenz schreibt, weil die Vergleichung dieser Glieder hinreichend ist,

$$\begin{aligned} fx + kp + k^2 q + k^3 r + k^4 s \ldots. \\ + ep + 2keq + 3k^2 er + 4k^3 es \ldots. \end{aligned}$$

von $f(x+k)$.

Um, zweitens, $x+e$ statt x in die Reihe zu setzen, erwäge man, dass fx, weil es in $fx+kp\ldots.$ übergeht, wenn man $x+k$ statt x setzt, nothwendig in $fx+ep\ldots.$ übergehen muss, wenn man $x+e$ statt x schreibt. Eben so müssen, wenn $p+kp'\ldots.$, $q+kq'\ldots.$, $r+kr'\ldots.$ bedeuten, was aus p, q, $r\ldots.$ wird, wenn man darin $x+k$ statt x setzt,

$$p+ep'\ldots.,\quad q+eq'\ldots.,\quad r+er'\ldots.$$

die Entwickelungen der nemlichen Grössen sein, wenn man darin $x+e$ statt x setzt.

Die Reihe $fx+kp+k^2q\ldots.$ geht also, wenn man darin, zweitens, $x+e$ statt x setzt und die Glieder, welche die Quadrate und höhern Potenzen von e enthalten, weglässt, in

$$\begin{aligned}&fx+kp+k^2q+k^3r+k^4s\ldots.\\&\quad+ep+kep'+k^2eq'+k^3er'\ldots.\end{aligned}$$

über.

Dieses Resultat muss dem vorigen gleich sein, unabhängig von den Grössen k und e, die jeden beliebigen Werth erhalten können. Die Glieder mit gleichen Potenzen von k und e müssen also, einzeln, gleich sein. Man erhält daher

$$2q=p',\quad 3r=q',\quad 4s=r'\ldots.,$$

woraus folgt

$$q=\tfrac{1}{2}p',\quad r=\tfrac{1}{3}q',\quad s=\tfrac{1}{4}r'\ldots.$$

Man bezeichne, allgemein, die erste Ableitung von fx, [*also den Coefficienten zur ersten Potenz von k, in der Entwickelung von $f(x+k)$*], durch $\frac{dfx}{dx}$;

durch $\frac{d^2 fx}{dx^2}$ die erste Ableitung von $\frac{dfx}{dx}$, durch $\frac{d^3 fx}{dx^3}$ die erste Ableitung von $\frac{d^2 fx}{dx^2}$ *etc.*, welche Grössen nichts anders sind als die Coefficienten zur ersten Potenz von k in der Entwickelung der Grössen $f(x+k)$, $\frac{df(x+k)}{dx}$, $\frac{d^2 f(x+k)}{dx^2}$ *etc.*, so erhält man

$$p = \frac{dfx}{dx},$$

und da p' die erste Ableitung von p ist, so ist $p' = \frac{d^2 fx}{dx^2}$, folglich

$$q = \tfrac{1}{2}\frac{d^2 fx}{dx^2}.$$

Ferner ist q' die erste Ableitung von q, also $q' = \frac{1}{2}\frac{d^3 fx}{dx^3}$, folglich

$$r = \frac{1}{2.3}\frac{d^3 fx}{dx^3} \text{ u. s. w.}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Reihe $fx + kp + k^2 q \ldots$, welche die Entwickelung von $f(x+k)$ ist, so erhält man folgende Grundformel:

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2 fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3 fx}{dx^3} + \frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4 fx}{dx^4} \ldots$$

Dieser Ausdruck der Entwickelung von $f(x+k)$ zeigt, wie die Glieder der Reihe, eins vom andern abhängen, besonders hat derselbe den Vorzug, dass man durch ihn, wenn man die erste Ableitung irgend einer Stammgrösse anzugeben weiss, auch alle

übrige Ableitungen finden kann, welche in der Reihe vorkommen. [*Dieses ist wohl nicht ganz genau ausgedrückt. Die allgemeine Form der Reihe hilft dazu nichts und wenn z. B. fx und* $\frac{dfx}{dx}$ *nicht einerlei Art z. B. nicht beide Potenzen, oder nicht beide Logarithmen und dergleichen sind, so lässt sich noch nicht* $\frac{d^2fx}{dx^2}$ *aus* $\frac{dfx}{dx}$ *finden, wenn man gleich weiss, wie* $\frac{dfx}{dx}$ *aus fx abgeleitet wird.*]

Ableitungen und Stammgrössen.

22.

Wir wollen *fx* Stammgrösse der Grössen $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, die davon hergeleitet sind, hingegen diese, Ableitungen der Stammgrösse nennen. Ferner soll $\frac{dfx}{dx}$ erste Ableitung oder Ableitung erster Ordnung, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, welche die erste Ableitung der vorigen ist, soll zweite Ableitung, oder Ableitung zweiter Ordnung, $\frac{d^3fx}{dx^3}$ oder die Ableitung von $\frac{d^2fx}{dx^2}$ dritte Ableitung oder Ableitung dritter Ordnung u. s. w. heissen.

Unter dem Worte „Ableitung“ allein soll immer die erste Ableitung und unter Stammgrösse die-

jenige verstanden werden, zu welcher die erste Ableitung gehört.

Ist die Stammgrösse nicht durch f, sondern durch einen einzelnen Buchstaben bezeichnet, z. B. fx durch y, wo y durch irgend eine Gleichung zwischen x und y gegeben sein kann, so kann man die Ableitungen von y auf eine ähnliche Weise bezeichnen, nemlich durch $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ *etc.*

Auf diese Weise geht y in

$$y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} \ldots.$$

über, wenn man $x + k$ statt x setzt.

Ableitungen von Functionen mehrerer veränderlichen Grössen.

23.

Hat man Functionen mehrerer veränderlicher Grössen $x, y \ldots.$ z. B. $f(x, y \ldots.)$, so werden die Ableitungen, nach den verschiedenen veränderlichen Grössen, durch $\frac{df(x, y \ldots.)}{dx}$, $\frac{df(x, y \ldots.)}{dy}$ $\ldots.$, $\frac{d^2f(x, y \ldots.)}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x, y \ldots.)}{dx\,dy}$ u. s. w. bezeichnet.

[*Lagrange bedient sich in den Leçons noch der nemlichen Bezeichnungen und Benennungen*

veränderlichen Grössen.

wie in der Théorie des fonctions. Der Uebersetzer hat in dieser Uebersetzung, aus den im ersten Theile angegebenen Gründen, statt der Lagrangischen Zeichen die Leibnitzischen genommen und nur im Ganzen die Benennungen beibehalten. Was über beide Arten der Bezeichnung im ersten Theile bemerkt worden, findet auch hier Anwendung.

Wegen Veränderung der Zeichen konnte der letzte Paragraph nicht wörtlich übersetzt werden. Lagrange führt einen einzelnen Fall an, der wegbleiben musste, weil selbst die neuen, sonst so unzulänglichen Zeichen in demselben den Vorzug vor den alten haben. Nemlich Lagrange sagt, die erste Ableitung z. B. der Grösse $\frac{a + bx + cy}{d + ex + gy}$ *könne, mit seinen Zeichen, durch* $\left(\frac{a + bx + cy}{d + ex + gy}\right)'$ *bezeichnet werden, welches allerdings mit den alten Zeichen so bequem nicht angeht.*]

24.

Obgleich man die Ableitungen erhält, wenn man die Stammgrösse, nachdem darin das Element um k verändert worden, entwickelt, so sind dieselben doch, wie leicht zu sehen, von der Grösse k, welche gleichsam nur Werkzeug zur Bildung der Ableitungen ist, ganz unabhängig. Hat man also erst durch die

Berechnung des ersten Gliedes der Entwickelung allgemeine Regeln gefunden, um von einer Stammgrösse zu ihrer ersten Ableitung zu gelangen, so kann man von der weitern Entwickelung abstrahiren und die Ableitung der Functionen als eine algebraische Operation verrichten, die aber allgemeiner und viel umfassender ist, als die Potenziirung.

Dritte Vorlesung.

Ableitungen von Potenzen. Entwickelung einer beliebigen Potenz eines Binomii.

Ableitung von Potenzen.

25.

Weil eine erste Ableitung, wie $\frac{dfx}{dx}$, nichts anders ist, als der Coefficient von k in der Entwickelung der Stammgrösse fx, wenn man in dieselbe $x+k$ statt x setzt, so besteht die Aufgabe, die erste Ableitung einer beliebigenPotenz x^m zu finden, darin, das Glied mit k in der, nach Potenzen von k fortschreitenden, Entwickelung der Potenz $(x+k)^m$ zu finden.

Wenn der Coefficient m eine beliebige, ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ist, so lässt sich durch leichte algebraische Operationen zeigen, dass die beiden ersten Glieder der mten Potenz des Binomii folgende sind: $x^m + mx^{m-1}k$; also ist, wenn man $fx = x^m$ oder $fx = Ax^m$ setzt, wo A eine beliebige Constante bezeichnet,

Ableitung von

$$\frac{dfx}{dx} = mAx^{m-1},$$

für den Fall, wenn *m* irgend eine rationale Zahl bedeutet.

Da jede irrationale Zahl zwischen rationalen Grenzen eingeschlossen ist, die so enge zusammengerückt werden können, als man will, so liesse sich der vorige Satz, ohne Weiteres, auf eine beliebige irrationale Zahl *m* ausdehnen, weil man, wenn man die Grenzen zusammenzöge, den Fehler so weit vermindern könnte, als man will. Da es aber hier mehr auf die Form der Ableitung, als auf ihren absoluten Werth in einzelnen Fällen ankommt, so glauben wir, um nichts bei diesem wichtigen Satze zu wünschen übrig zu lassen, einen strengen und allgemeinen Beweiss desselben geben zu müssen. [*Der Unterschied zwischen Form und Werth eines Ausdrucks, dessen hier gedacht wird, ist auch in vielen andern Fällen berücksichtigenswerth. Die obige Bemerkung bezieht sich darauf, dass man nicht vom Besondern auf das Allgemeine schliessen dürfe. Ein Ausdruck kann in vielen Fällen Richtiges geben, ja er kann selbst in allen Fällen annährend die Wahrheit treffen, ohne deshalb die wahre Form zu haben.*]

26.

Da nach algebraischen Principien

$$(x+k)^m = x^m\left(1+\frac{k}{x}\right)^m$$

ist, so kommt es, wenn man, der Kürze wegen, $\frac{k}{x} = \omega$ setzt, nur darauf an, den Coefficienten von ω in der Entwickelung von $(1 + \omega)^m$ für jedes beliebige m zu finden.

Da dieser Coefficient, was er auch sein möge, unabhängig von ω ist, so kann derselbe nur noch von m abhängen; denn der Ausdruck $(1 + \omega)^m$ enthält nur die zwei unbestimmten Grössen ω und m. Man kann ihn also, allgemein, durch Fm bezeichnen, wo F irgend eine unbestimmte und unbekannte Abhängigkeits-Form bezeichnet. Da nun für $\omega = 0$, $(1 + \omega)^m = 1^m = 1$ ist, so ist

$$(1 + \omega)^m = 1 + \omega Fm \ldots\ldots$$

[*Allgemeiner ist* $(1+\omega)^m = 1^m (1 + \omega Fm \ldots\ldots)$; *denn* 1^m *kann mehrere, von* 1 *verschiedene Werthe haben. Wenn* m *ein Bruch* $\frac{p}{q}$ *mit einem graden Nenner* q *ist, so hat* 1^m *die beiden reellen einander gleichen und entgegengesetzten Werthe* $+1$ *und* -1 *und ausserdem* $q-2$ *unmögliche Werthe. Ist der Nenner* q *ungerade, so hat* 1^m *den einen reellen Werth* 1 *und* $q-1$ *andere unmögliche Werthe. Hier bleibt also Lagrange nur bei dem einen reellen Werth* $+1$ *von* 1^m *stehen, der allerdings immer Statt findet, wenigstens so lange* m *reel ist.*]

Also ist auch, für irgend einen beliebigen andern Exponenten n,

$$(1 + \omega)^n = 1 + \omega Fn \ldots\ldots$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$(1+\omega)^{m+n} = 1 + \omega\,(Fm + Fn)\ldots;$$

denn die Theorie der Potenzen beruht einzig und allein auf dem Satze $a^m \times a^n = a^{m+n}$, was auch a, m und n sein mögen. Man kann sagen, dass selbst in diesem Satze das Wesen der Potenziirung liegt, wenn die Exponenten nicht durch Zahlen ausgedrückt werden können. [*Diese Bemerkung ist ebenfalls wichtig. Als Producte gleicher Factoren kann man, allgemein, Potenzen nicht ansehen. Potenzen mit beliebigen Exponenten, wie* a^m *und* a^n, *sind vielmehr Grössen, für welche die Bedingung statt findet, dass* $a^m \times a^n = a^{m+n}$, *oder für welche* $f(a,m) \times f(a,n) = f(a, m+n)$ *ist, wenn man* a^m *durch* fa *bezeichnet. Aus dieser Definition* folgt *erst umgekehrt, für den besondern Fall, wenn* m *und* n *ganze Zahlen bedeuten, dass* a^m *und* a^n *Producte gleicher Factoren sind. Dergleichen genaue Definitionen ergeben sich bald, wenn man näher über die Operationen des Calculs nachdenkt, und, z. B. bei der Bedeutung der Formeln auf* alle *Werthe eines Ausdrucks, nicht blos auf* einen *Rücksicht nimmt. Man findet zu dergleichen weitern Entwickelungen der Begriffe bei* Lagrange *und* Euler *häufig die Andeutungen.*]

Also ist $Fm + Fn$ der Coefficient von ω in der Entwickelung der Potenz $(1+\omega)^{m+n}$. Dieser Coef-

ficient ist aber auch $F(m+n)$, weil $(1+\omega)^m$ in $(1+\omega)^{m+n}$ übergeht, wenn man $m+n$ statt m setzt. Die durch F bezeichnete Abhängigkeits-Form muss also von der Art sein, dass

$$F(m+n) = Fm + Fn$$

ist, was auch m und n sein mögen.

Um die Form der Function F aus dieser Bedingung allgemein zu finden, setze man: m gehe in $m+k$ und n in $n-k$ über, wo k eine beliebige Grösse bedeutet, so behält $F(m+n)$ den nemlichen Werth, [*denn* $m+n$ *ist alsdann* $m+k+n-k = m+n$,] hingegen die Grössen Fm, Fn werden zu

$$F(m+k) \text{ und } F(n-k),$$

folglich geht die obige Gleichung in folgende über:

$$Fm + Fn = F(m+k) + F(n-k)$$

[*denn die obige Gleichung* $F(m+n) = Fm + Fn$ *giebt, wenn man* $m+k$ *statt* m *und* $n-k$ *statt* n *setzt*, $F(m+k+n-k)$, *oder* $F(m+n) = F(m+k) + F(n-k)$, *also, weil* $F(m+n) = Fm + Fn$ *war*, $Fm + Fn = F(m+k) + F(n-k)$]. Nun erhält man, wenn man $F(m+k)$ entwickelt,

$$Fm + k\frac{dFm}{dm} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fm}{dm^2} + \ldots .$$

wie wir oben sahen, und wenn man $F(n-k)$ entwickelt, weil jetzt k negativ ist,

$$Fn - k\frac{dFn}{dn} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fn}{dn^2} - \ldots .$$

Die obige Gleichung geht also in folgende über:

Ableitung von

$$[Fm + Fn = Fm + k\frac{dFm}{dm} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fm}{dm^2} + \ldots$$

$$+ Fn - k\frac{dFn}{dn} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fn}{dn^2} - \ldots$$

oder]

$$k\left(\frac{dFm}{dn} - \frac{dFn}{dn}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2Fm}{dm^2} + \frac{d^2Fn}{dn^2}\right) + \ldots = 0$$

welche Statt finden muss, was auch k sein mag. Also ist nothwendig

$$\frac{dFm}{dm} - \frac{dFn}{dn} = 0,\ \frac{d^2Fm}{dm^2} + \frac{d^2Fn}{dn^2} = 0 \text{ u.s.w.}$$

Die erste von diesen Bedingungen giebt

$$\frac{dFm}{dm} = \frac{dFn}{dn},$$

woraus folgt, dass der Werth der Function $\frac{dFm}{dm}$ von m unabhängig ist, weil er der nemliche bleibt, wenn man den Werth der Grösse m [*z. B. in n*] verändert. Der Werth von $\frac{dFm}{dm}$ muss also in Beziehung auf m constant sein, folglich ist

$$\frac{dFm}{dm} = a,$$

wo a eine Constante bedeutet; dieser Werth von $\frac{dFm}{dm}$ thut auch den übrigen Bedingungen genug, denn er giebt $\frac{d^2Fm}{dm^2}\left[= \frac{da}{dm}\right] = 0$, $\frac{d^3Fm}{dm^2}$

Potenzen.

$\left[=\frac{d^2 a}{dm^2}\right]=0$ *etc.* und eben so $\frac{d^2 Fn}{dn^2}\left[=\frac{da}{dn}\right]$

$\frac{d^3 Fn}{dn^3}\left[=\frac{d^2 a}{dn^2}\right]=0$ *etc.*

Es kommt also nur darauf an, den Werth der Stammgrösse von Fm aus dem Werthe a der Ableitung $\frac{dFm}{dm}$ zu finden.

Es ist leicht, zu sehen, dass Fm nur von der Form $am+b$ sein kann, wo b eine willkürliche [*oder vielmehr unbestimmte*] Constante bedeutet, und es lässt sich zeigen, dass nur dieser Ausdruck allein, a zur ersten Ableitung habe.

Man kann solches auch, wie folgt, direct beweisen. Da nemlich allgemein

$$F(m+k)=Fm+k\frac{dFm}{dm}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2 Fm}{dm^2}\ldots.$$

ist, so ist in dem gegenwärtigen Falle

$$\frac{dFm}{dm}=a,\ \frac{d^2 Fm}{dm^2}=0,\ \frac{d^3 Fm}{dm^3}=0\ldots.,$$

also

$$F(m+k)=Fm+ak.$$

Da nun k willkürlich ist, so ist die Grösse $m+k$, wenn man $k=-m$ setzt, gleich Null; folglich ist alsdann $F(m+k)$ von m unabhängig und mithin irgend einer Constante b gleich.

Also ist [*für* $k=-m$] $b=Fm-ak$ und folglich

$$Fm=am+b.$$

Ableitung von

Substituirt man nun diesen Werth von Fm, so erhält man allgemein

$$(1+\omega)^m = 1 + (am+b)\omega \ldots,$$

was auch m sein mag.

In diesem Ausdrucke sind a und b, von m unabhängige Constanten, deren Werthe für besondere Fälle bestimmt werden müssen.

Zu dem Ende setze man $m = 0$, so ist

$$1 = 1 + b\omega, \text{ also } b = 0.$$

[*Dieses bleibt auch, wenn man, wie oben, auf die verschiedenen Wurzeln von* 1 *sieht, denn es ist* $(1+\omega)^m = 1^m + (am+b)\omega \ldots$, *also für* $m = 0$, $1^m = 1^m + b\omega$, *folglich* $b = 0$]. Man setze ferner $m = 1$, so ist

$$1 + \omega = 1 + a\omega \ldots$$

[*weil* $b = 0$ *war*], also $a = 1$. Mithin ist endlich

$$(1+\omega)^m = 1 + m\omega,$$

folglich, weil $(x+k)^m = x^m(1+\omega)^m$ war, wo $\omega = \frac{k}{x}$ ist,

$$A(x+k)^m = Ax^m + Amx^{m-1}k \ldots$$

was auch m sein mag. Die erste Ableitung von Ax^m ist also allgemein Amx^{m-1}, ganz wie oben für den Fall, wenn m rational ist.

27.

Dieser Beweis ist völlig streng und allgemein. Er hängt nur von den Ableitungen der einfachsten

Form

Form ab, und giebt, schon gleich beim Anfange, ein merkwürdiges Beispiel vom Gebrauche der Ableitungen in der Analysis.

Man kann also allgemein den Satz aufstellen, dass man die erste Ableitung der Potenz einer beliebigen veränderlichen Grösse erhält, wenn man die Potenz der nemlichen Grösse, für einen um Eins verminderten Exponenten, mit dem Exponenten der gegebenen Potenz multiplicirt.

[*Dieser Beweis, bei welchem die Hauptsache ist, zu zeigen, dass unter der allgemeinen Bedingung* $F(m+n) = Fm + Fn$, *nur* $Fm = m$, $Fn = n$ *sein kann, ist unstreitig ungemein sinnreich, eben so wie das dazu angewandte Mittel,* $m+k$ *statt* m *und* $n-k$ *statt* n *zu setzen, welches zusammen den Werth von* $m+n$ *nicht verändert, so einfach es auch ist. Allein der Beweis ist etwas weitläuftig und in so fern unbequem, als er der Zurückleitungen bedarf. Kürzer ist folgender Beweis.*

I. Aus $F(m+n) = Fm + Fn$ *folgt, für* $m = n$,

$$F(2m) = 2Fn.$$

Nun setze man

$$F(n+m) = Fn + Nm + N'm^2 + N''m^3 \ldots.$$

wo $N, N', N'' \ldots.$ *unbestimmte, von* m *unabhängige, Coefficienten sind, so ist auch, weil* $F(n+m) = Fn + Fm$ *war,*

$$Fn + Fm = Fn + Nm + N'm^2 + N''m^3 \ldots.;$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten Fn abzieht,

$$Fm = Nm + N'm^2 + N''m^3 \ldots,$$

und daraus folgt, wenn man 2m statt m setzt,

$$F(2m) = 2Nm + 4N'm^2 + 8N''m^3 \ldots$$

Da nun $F(2m) = 2Fm$ *war, so ist*

$$2(Nm + N'm^2 + N''m^3 \ldots)$$
$$= 2Nm + 4N'm^2 + 8N''m^3 \ldots,$$

folglich

$$2N'm^2 + 6N''m^3 + 14N'''m^4 \ldots = 0,$$

woraus folgt:

$$N' = 0,\ N'' = 0,\ N''' = 0 \text{ etc.};$$

also, weil $Fm = Nm + N'm^2 + N''m^3 \ldots$ *war,*

$$Fm = Nm = am,$$

wie oben, weil N, nach der Voraussetzung, eine von m unabhängige Grösse, also eine Constante, z. B. a ist. Der übrige Theil des Beweises bleibt der selbe wie oben.

II. Es giebt auch noch ein anderes Verfahren, die erste Ableitung, nicht allein von Potenzen, sondern, allgemein, von jeder beliebigen Grösse, deren Abhängigkeits-Gesetz von ihrem Elemente gegeben ist, zu finden. Selbiges beruht auf einer, der, oben von Lagrange, *bei der Gleichung* $F(m + n) = Fm + Fn$ *angewandten, ähnlichen Idee, und ist einer eigentlichen Theorie der Functionen gut angemessen.*

Ich will solches, da man es sonst nicht findet, für den gegenwärtigen und die folgenden ein-

zelnen Fälle mittheilen. Ich werde darauf, wegen der weitern allgemeinern Entwickelung, gelegentlich, wo mehr Raum dazu vorhanden, wieder zurückkommen.

Die Eigenschaft der Potenzen besteht nemlich darin, dass z. B. für zwei beliebige veränderliche Grössen x und y und für ein beliebiges m, $x^m . y^m = (xy)^m$, oder, wenn man die Potenzirungs-Operation durch f bezeichnet,

$$fx . fy = f(xy)$$

ist. Man setze in diese Gleichung $x(1+k)$ statt x, so muss man, wenn man will, dass $f(xy)$ unverändert den nemlichen Werth behalten soll, $\frac{y}{1+k} = y(1-k+k^2-k^3 \ldots)$ statt y setzen. Dieses giebt, weil nunmehr

$$f(xy) = f(x(1+k)) . f(y(1-k+k^2 \ldots)) = fx . fy,$$

oder

$$fx . fy = f(x+xk) . f(y-yk+yk^2 \ldots)$$

ist, wenn man die beiden Ausdrücke $f(x+xk)$ und $f(y-yk+yk^2 \ldots)$ nach der allgemeinen Formel $f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots$ entwickelt, und zu dem Ende, für den ersten xk statt k, für den zweiten $-yk+yk^2 - \ldots$ statt k setzt,

$$fx . fy = \left(fx + kx\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2x^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots\right)$$

$$\times\left(fy + (-yk+yk^2 \ldots)\right)\frac{dfy}{dy} + \left(\frac{-yk+yk^2 \ldots}{2}\right)^2\frac{d^2fy}{dy^2} \ldots,$$

Ableit: von Potenzen.

oder

$$fxfy = fxfy + k\left(fy \cdot x\frac{dfx}{dx} - fx \cdot y\frac{dfy}{dy}\right) + \frac{k^2}{2}\left(fy \cdot \frac{x^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots\right) \ldots$$

Da nun die Coefficienten zu gleichen Potenzen von k zusammen Null sind, so ist

$$fy \cdot x\frac{dfx}{dx} - fx \cdot y\frac{dfy}{dy} = 0;$$

woraus folgt:

$$\frac{x\frac{dfx}{dx}}{fx} = \frac{y\frac{dfy}{dy}}{fy}.$$

Diese Gleichung kann nicht anders Statt finden, als wenn $\frac{x\frac{dfx}{dx}}{fx}$ *und* $\frac{y\frac{dfy}{dy}}{fy}$ *Constanten sind, denn sonst würde, weil x von y nicht abhängt, der eine Theil der Gleichung seinen Werth verändern können, während der andere der nemliche bleibt, welches unmöglich ist. Es ist also nothwendig*

$$\frac{x\frac{dfx}{dx}}{fx} = \frac{y\frac{dfy}{dy}}{fy} = a,$$

woraus folgt:

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{afx}{x} = \frac{ax^m}{x} = ax^{m-1},$$

wie oben.

Dass $a = m$ ist, wird wie oben bewiesen und es ist also dazu nur eine ähnliche Untersuchung einer andern Gleichung von der Form $F(x+y) = Fx + Fy$ nöthig.]

Binomial-Formel.

28.

Aus dem Obigen [*Art.* 27.] und aus dem Gesetze der Entwickelung der Functionen folgt ein einfacher und allgemeiner Beweiss der Binomial-Formel, der, vielleicht unter allen die man bisher gegeben hat, allein strenge ist. Da nemlich, wenn $Fx = Ax^m$, wie oben gefunden,

$$\frac{dFx}{dx} = mAx^{m-1}$$

ist, so erhält man, eben so, wenn man von Neuem die Ableitung dieser letzten Grösse nimmt,

$$\frac{d^2Fx}{dx^2} = m.(m-1)Ax^{m-2}$$

und aus dem nemlichen Grunde, wenn man abermals die Ableitung nimmt,

$$\frac{d^3Fx}{dx^3} = m(m-1)(m-2)Ax^{m-5} \text{ u. s. w.}$$

Da nun allgemein

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} \dots$$

ist, so erhält man, für den Fall $fx = x^m$, die Reihe

Binomial-

$$(x+k)^m = x^m + mx^{m-1}k + \frac{m.(m-1)}{2}x^{m-2}k^2$$
$$+ \frac{m.(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}k^3 \ldots\ldots$$

Dividirt man diese ganze Gleichung durch x^m und setzt alsdann k statt $\frac{k}{x}$, so erhält man

$$(1+k)^m = 1 + mk + \frac{m.m-1}{2}k^2 + \frac{m.m-1.m-1}{2.3}k^3 \ldots$$

Dieser Ausdruck folgt zwar unmittelbar auch aus dem obigen, wenn man $x = 1$ setzt. Es wäre aber kein strenges Verfahren, ihn auf diese Weise abzuleiten, weil, wie schon bemerkt, die Entwickelung von $f(x+k)$ nach Potenzen von k mit ganzen positiven Exponenten für besondere Werthe von x unpassend sein kann.

Multiplicirt man ferner die obige Gleichung mit a^m, und setzt b statt ak, so erhält man

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{2}.a^{m-2}b^2 \ldots$$

was auch a, b und m sein mögen.

[*Auch ohne Ableitungen kann man sogleich den ganzen entwickelten Ausdruck einer beliebigen Potenz einer zweitheiligen Grösse, wie* $(x+k)^m$, *in welchem dann der Coefficient zur ersten Potenz von k, oder der Coefficient des zweiten Gliedes, die erste Ableitung von* x^m *ist, wie folgt, finden.*

Wenn nemlich fx *und* fy *einerlei Potenzen zweier verschiedenen Grössen* x *und* y *bedeuten,*

Formel.

so lässt sich die erste allgemeine Eigenschaft der Potenzen, wie oben, durch

$$fx\,fy = f(xy)$$

ausdrücken.

Es wäre nicht schwer vorauszusehen, welche Reihen-Form man dem Ausdrucke von fx geben müsse, wenn man fx und fy, für jedes x und y, in Reihen entwickeln will. Da es aber gut ist, zu sehen, wie die Analysis auch die Unzulässlichkeit einer vorausgesetzten Form anzeigt, so nehme man, ohne weiter erst die Art der auszudrückenden Grösse zu untersuchen, für fx die allgemeine Form

$$fx = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots\ldots$$

an, wo α, β, γ.... unbekannte und von x unabhängige Grössen sind. Man erhält alsdann, vermöge der Bedingung $fx\,fy = f(xy)$,

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots\ldots)(\alpha + \beta y + \gamma y^2 \ldots) = \alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2 \ldots\ldots,$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha\beta y + \alpha\gamma y^2 \ldots\ldots &= \alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2 \ldots\ldots \\ + \alpha\beta x + \beta^2 xy \ldots\ldots & \\ + \alpha\gamma x^2 \ldots\ldots, & \end{aligned}$$

woraus folgt, $\alpha^2 = \alpha$, also $\alpha = 1$. Ferner

$$\alpha\beta y + \alpha\beta x = \beta xy,$$

welches allgemein nur möglich ist für $\beta = 0$. Ferner

$$\alpha\gamma y^2 + \beta x^2 y + \alpha\gamma x^2 = \gamma x^2 y^2,$$

welches nur möglich ist für $\gamma = 0$ u. s. w.

Binomial-

Es wäre also $fx = 1$ und folglich $fy = 1$, woraus folgt, dass die vorausgesetzte Form nicht allgemein, für jedes x und y, sondern nur dann passet, wenn fx und fy Potenzen von 1 sind.

Hätte man eine andre allgemeine Form

$$fx = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots.$$

vorausgesetzt, so hätte man

$$(\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots.)(\alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 \ldots.)$$
$$= \alpha x y + \beta x^2 y^2 + \gamma x^3 y^3 \ldots.,$$

oder

$$\begin{aligned}\alpha^2 xy + \alpha\beta xy^2 + \alpha\gamma xy^3 \ldots. &= \alpha xy + \beta x^2y^2 + \gamma x^3y^3 \ldots.\\ + \alpha\beta x^2 y + \beta^2 x^2 y^2 \ldots. &\\ + \alpha\gamma x^3 y \ldots. &\end{aligned}$$

und daraus ebenfalls $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ etc. gefunden, wie vorhin.

Die Grösse fx, von der durch die Bedingung $fx fy = f(xy)$ bestimmten Form, lässt sich also, für ein beliebiges x und y, nicht in eine Reihe wie $\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots.$, oder $\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots.$ entwickeln.

Daraus, dass man, wenn man diese Reihe voraussetzt, für fx etwas Constantes findet, folgt nun aber, dass man für fx einen Ausdruck annehmen muss, der schon einen von x unabhängigen constanten Theil enthält, oder einen Theil, der für $x = 0$ übrig bleibt. Man kann also, da dieser constante Theil willkürlich ist, z. B. $f(1+x)$ statt fx setzen. Diese Grösse muss sich nun in eine der beiden oben angenommenen Reihen, und zwar,

Formel.

eben weil für $x = 0$ *ein constanter Theil übrig bleiben soll, in eine Reihe der ersten Art, oder von der Form* $\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots$ *entwickeln lassen. Man kann also setzen*

$$f(1 + x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots$$

folglich auch

$$f(1 + y) = (\alpha + \beta y + \gamma y^2 \ldots).$$

Nun sind die beiden Grössen x *und* y *willkürlich; also ist eine von der andern ein beliebiges Vielfache. Setzt man daher* $y = nx$, *so ist* n *eine willkürliche Grösse. Eben daraus aber, weil* n *willkürlich ist, lässt sich schliessen, dass sich* n, *in den entwickelten Grössen, gänzlich mit sich selbst aufheben müsse. Doch kann man sich davon auch durch die That überzeugen.*

Man erhält nemlich, vermöge $f(1 + x) . f(1 + nx) = f((1 + x)(1 + nx))$, *oder, vermöge* $f((1 + x) f(1 + nx)) = f(1 + (1 + n) x + nx^2)$,

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots)(\alpha + n\beta x + n^2\gamma x^2 + n^3\delta x^3 \ldots)$$
$$= \alpha + \beta((1 + n)x + nx^2) + \gamma((1 + n)x + nx^2)^2 \ldots,$$

oder, wenn man entwickelt,

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + \alpha\beta nx + \alpha\gamma n^2 x^2 &+ \alpha\delta n^3 x^3 \ldots = \\
+ \alpha\beta x + \beta^2 nx^2 &+ \beta\gamma n^2 x^3 \ldots \\
+ \alpha\gamma x^2 &+ \beta\gamma nx^3 \ldots \\
&+ \alpha\delta x^3 \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta(1 + n)x + \beta nx^2 &+ 2\gamma n(1 + n)x^3 \ldots \\
+ \gamma(1 + n)^2 x^2 &+ \delta(1 + n)x^3 \ldots;
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\alpha^2 = \alpha, \text{ also } \alpha = 1,$$

Binomial-

$$\alpha\beta n + \alpha\beta = \beta + \beta n; \text{ also } \beta = \beta.$$

Ferner

$$\alpha\gamma(1+n^2) + \beta^2 n = n\beta + (1+n)^2\gamma, \text{ oder}$$

$$\gamma + \gamma n^2 + \beta^2 n = n\beta + \gamma + 2\gamma n + \gamma n^2, \text{ oder}$$

$$\beta^2 n - \beta n = 2\gamma n,\ \gamma = \frac{\beta.\beta-1}{2}. \text{ Ferner}$$

$$\alpha\delta(1+n^3) + \beta\gamma n(1+n^2) = 2\gamma n(1+n) + \delta(1+n),$$

woraus, nach der nöthigen Rechnung, folgt:

$$\delta = \frac{\beta.\beta-1.\beta-2}{2.3} \text{ u. s. w.}$$

Die Ausdrücke der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ *enthalten also sämmtlich kein n; folglich hat sich überall n mit sich selbst aufgehoben, wie im Voraus zu sehen war.*

Durch diese allgemeine Entwickelung sind schon die Coefficienten der vorausgesetzten Reihe gefunden. Indessen kann man sie, wenn man vorher darauf Rücksicht nimmt, dass sich n nothwendig überall aufheben muss, auch noch kürzer finden. Da nemlich die Werthe der Coefficienten, für jedes n, nothwendig dieselben sein müssen, so kann man n willkürlich irgend einen bestimmten Werth geben, also auch einen sehr einfachen Werth, z. B. 1. Dann ist die Grund-Bedingung $fx\,fy = f(xy)$ *folgende:*

$$(f(1+x))^2 = f((1+x)^2) = f(1+2x+x^2).$$

Dieses giebt, wenn man $f(1+x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots$ *setzt,*

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots)^2$$

$$= \alpha + \beta(2x+x^2) + \gamma(2x+x^2)^2 + \delta(2x+x^2)^3 \ldots$$

Formel.

oder

$$\alpha^2 + \alpha\beta x + \alpha\gamma x^2 + \alpha\delta x^3 \ldots = \alpha + 2\beta x + \beta x^2 + 4\gamma x^3 \ldots$$
$$+ \alpha\beta x + \beta^2 x^2 + \beta\gamma x^3 \ldots \quad + 4\gamma x^2 + 8\delta x^3 \ldots$$
$$+ \alpha\gamma x^2 + \beta\gamma x^3 \ldots$$
$$+ \alpha\delta x^3 \ldots,$$

woraus folgt

$$\alpha^2 = \alpha, \text{ also } \alpha = 1$$
$$2\alpha\beta = 2\beta, \text{ also } \beta = \beta$$
$$2\alpha\gamma + \beta^2 = 4\gamma + \beta, \text{ also } \gamma = \frac{\beta . \beta - 1}{2}$$
$$2\alpha\delta + 2\beta\gamma = 4\gamma + 8\delta, \text{ also } \delta = \frac{\beta . \beta - 1 . \beta - 2}{2 \cdot 3}$$

u. s. w. wie oben. Diese Entwickelung der Coefficienten ist derjenigen mit n deshalb vorzuziehen, weil daraus leichter das Fortschreitungs-Gesetz der Coefficienten zu sehen ist. Die Berücksichtigung von n ist aber nöthig, um sich zu überzeugen, dass die Grundbedingung, für $n = 1$, durch $(f(1+x))^2 = f((1+x)^2)$ eben so allgemein ausgedrückt wird, als durch $f(1+x)f(1+mx) = f((1+x)(1+mx))$.

Bis hierher ist also gefunden, dass allgemein

$$f(1+x) = 1 + \beta x + \frac{\beta . \beta - 1}{2} x^2 + \frac{\beta . \beta - 1 . \beta - 2}{2 \cdot 3} x^3 \ldots,$$

oder, weil $f(1+x) = (1+x)^m$ ist, allgemein, für jedes beliebige m,

$$(1+x)^m = 1 + \beta x + \frac{\beta . \beta - 1}{2} x^2 + \frac{\beta . \beta - 1 . \beta - 2}{2 \cdot 3} x^3 \ldots$$

ist.

Binomial-

Der Coefficient β, welcher nur von m abhängen kann, ist noch unbestimmt.

Man kann ihn durch ein, dem vorigen ganz ähnliches Verfahren, wie folgt, finden.

Die zweite allgemeine Eigenschaft der Potenzen besteht nemlich darin, dass, für zwei beliebige Exponenten m und μ,

$$x^m . x^\mu = x^{m+\mu},$$

oder

$$(1+x)^m (1+x)^\mu = (1+x)^{m+\mu}$$

ist. Bezeichnet man den zu dem Exponenten m gehörigen, unbestimmt bleibenden Coefficienten β durch φm, weil derselbe nur von m abhängen kann, so sind die zu den Exponenten μ und m+μ gehörigen ähnlichen Coefficienten nothwendig φμ und φ(m+μ).

Nun ist vermöge des oben gefundenen Ausdrucks,

$$(1+x)^m = 1 + x\varphi m + x^2 \frac{\varphi m(\varphi m - 1)}{2} \ldots,$$

folglich auch

$$(1+x)^\mu = 1 + x\varphi\mu + x_2 \frac{\varphi\mu(\varphi\mu - 1)}{2} \ldots \text{ und}$$

$$(1+x)^{m+\mu} = 1 + x\varphi(m+\mu) + x^2 \frac{\varphi(m+\mu)(\varphi(m+\mu)-1)}{2} \ldots;$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung $(1+x)^m (1+x)^\mu = (1+x)^{m+\mu}$, *so erhält man*

Formel.

$$1 + x\varphi m + x^2 \frac{\varphi m(\varphi m - 1)}{2} \ldots$$
$$+ x\varphi\mu + x^2 \varphi m \varphi \mu \ldots$$
$$+ x^2 \frac{\varphi\mu(\varphi\mu - 1)}{2} \ldots$$

$$= 1 + x\varphi(m+\mu) + x^2 \frac{\varphi(m+\mu)(\varphi(m+\mu) - 1)}{2} \ldots$$

Vergleicht man die Coefficienten zu gleichen Potenzen von x, so erhält man

$$\varphi(m+\mu) = \varphi m + \varphi\mu$$
$$\varphi(m+\mu)(\varphi(m+\mu)-1) = \varphi m(\varphi m-1) + 2\varphi m\varphi\mu + \varphi\mu(\varphi\mu-1)$$

u. s. w.

Setzt man den Werth von $\varphi(m+\mu)$, den die erste dieser Gleichungen giebt, in die folgenden, so werden dieselben dadurch, wie man sich durch die wirkliche Substitution und auch allgemein überzeugen kann, alle von selbst erfüllt. Also besteht das, was man erhält, in der einzigen Bedingung, dass

$$\varphi(m+\mu) = \varphi m + \varphi\mu$$

sein muss. Diese Bedingung müssen also die unbestimmt gebliebenen Coefficienten der zweiten Glieder der Reihen, in welche sich, dem Obigen zu Folge, die Grössen $(1+x)^m$, $(1+x)^\mu$ und $(1+x)^{m+\mu}$ entwickeln lassen, erfüllen.

Man setze nun, auf eine ähnliche Weise, wie oben, für φm die Reihe

$$\varphi m = A + Bm + Cm^2 \ldots,$$

wo $A, B, C \ldots$ unbestimmte und von m unabhängige Coefficienten sind. Alsdann ist nothwendig

Binomial-

$$\varphi\mu = A + B\mu + C\mu^2 \dots \text{ und}$$
$$\varphi(m+\mu) = A + B(m+\mu) + C(m+\mu^2) \dots$$

folglich, vermöge der gefundenen Grund-Bedingung $\varphi(m+\varphi) = \varphi m + \varphi\mu$,

$$\left.\begin{matrix} A + Bm + Cm^2 \dots \\ + A + B\mu + C\mu^2 \dots \end{matrix}\right\} = A + B(m+\mu) + C(m+\mu)^2 \dots$$

Hieraus folgt

$$2A = A, \text{ also } A = 0$$
$$B = B$$
$$C(m^2+\mu^2) = C(m^2+\mu^2+2m\mu), \text{ also } C = 0.$$

Eben so $D = 0$, $E = 0$ *etc.*

Also ist nothwendig

$$\varphi m = Bm$$

und folglich geht der Ausdruck von $(1+x)^m$ *in*

$$(1+x)^m = 1 + Bmx + \frac{Bm.Bm-1}{2}x^2 + \frac{Bm.Bm-1.Bm-2}{2.3}x^3 \dots$$

über.

Der Coefficient B bleibt abermals unbestimmt. Da aber derselbe nicht mehr, weder von x, noch von m abhängen kann und in $(1+x)^m$ *weiter keine veränderliche Grössen als x und m vorkommen, so kann derselbe nur noch eine Constante sein. Oder, mit andern Worten: er muss der nemliche sein für jeden beliebigen Werth von x und m. Man kann ihn also finden, wenn man diesen Grössen, oder einer von ihnen, einen beliebigen Werth beilegt, der der Reihe eine Gestalt giebt, aus welcher B leicht zu finden ist. Das*

Formel.

Nächste ist, $m = 1$ *zu setzen. Dieses giebt*

$$1 + x = 1 + Bx + \frac{B.B-1}{2}x^2 + \frac{B.B-1.B-2}{2.3}x^3 \ldots,$$

woraus folgt:

$$B = 1$$
$$B.B-1 = 0$$
$$B.B-1.B-2 = 0 \text{ etc.}$$

Alle diese Gleichungen geben, übereinstimmend, $B = 1$; *also ist allgemein:*

$$B = 1,$$

nnd folglich, allgemein,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m.m-1}{2}x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^3 \ldots$$

Man schreibe $\frac{k}{x}$ *statt* x, *so erhält man*

$$\left(1 + \frac{k}{x}\right)^m = 1 + m\frac{k}{x} + \frac{m.m-1}{2}\frac{k^2}{x^2} \ldots$$

Multiplicirt man mit x^m, *so erhält man, schliesslich:*

$$(x+k)^m = x^m + mx^{m-1}k + \frac{m.m-1}{2}x^{m-2}k^2 \ldots,$$

welches, wie man sieht, der bekannte Ausdruck der entwickelten Potenz eines Binomii ist.

Dieser Beweis der Binomial-Formel ist völlig strenge und allgemein und dabei rein analytisch. Auch bedarf derselbe nicht der Ableitungs-Operation oder irgend einer besondern Methode, wie der Combinationen und dergl. Er bedarf nichts

weiter als der gewöhnlichen Begriffe der Algebra und ist daher auch völlig elementar.

Den Ausdruck der ersten Ableitung von x^m *erhält man nun unmittelbar. Diese erste Ableitung* $\frac{dx^m}{dx}$ *ist der Coefficient zur ersten Potenz von* k *in* $(x+k)^m$; *also ist solche allgemein:*

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1},$$

wie oben.]

Methode, die Constanten einer Stammgrösse zu finden.

29.

Die obige Methode, direct die Stammgrösse einer Constante zu finden, kann auch auf andere Fälle angewendet werden. Man setze nemlich in den allgemeinen Ausdruck

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots\ldots$$

$k = -x$, so hört $f(x+k)$ auf, von x abhängig zu sein, und ist folglich alsdann einer Constante b gleich, welche nichts anders als der Werth von fx für $x = 0$ ist. Man erhält also

$$b = fx - x\frac{dfx}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots\ldots,$$

woraus folgt:

$$fx = b + x\frac{dfx}{dx} - \frac{x^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots\ldots$$

Wenn

einer Stammgrösse zu finden.

Wenn nun $\frac{dfx}{dx} = a$, so ist $\frac{d^2fx}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3fx}{dx^3} = 0$ *etc.*, also $fx = b + ax$.

Wenn $\frac{dfx}{dx} = ax$, so ist

$$\frac{d^2fx}{dx^2} = a, \ \frac{d^3fx}{dx^3} = 0, \ \frac{d^4fx}{dx^4} = 0 \ldots,$$

also $fx = b + ax^2 - \frac{ax^2}{2} = b + \frac{ax^2}{2}$.

Wenn $\frac{dfx}{dx} = ax^2$, so ist

$\frac{d^2fx}{dx^2} = 2ax$, $\frac{d^3fx}{dx^3} = 2a$, $\frac{d^4fx}{dx^4} = 0$, $\frac{d^5fx}{dx^5} = 0$ *etc.*,

also $fx = b + ax^3 - ax^3 + \frac{ax^3}{3} = b + \frac{ax^3}{3}$ u. s. w.

Allgemein, wenn $\frac{dfx}{dx} = ax^n$ ist, so erhält man, wenn man die Ableitungen nimmt,

$$\frac{d^2fx}{dx^2} = nax^{n-1}, \ \frac{d^3fx}{dx^3} = n.n-1.ax^{n-2} \ etc.,$$

also, wenn man diese Ausdrücke substituirt,

$$fx = b + ax^{n+1}\left(1 - \frac{n}{2} + \frac{n.n-1}{2.3} - \frac{n.n-1.n-2}{2.3.4} \ldots\right).$$

Nun ist, wenn man $(1-1)^{n+1}$ entwickelt,

$$(1-1)^{n+1} = 1 - (n+1) + \frac{n+1.n}{2} - \frac{n+1.n.n-1}{2.3} + \ldots = 0.$$

[*Dieses ist nur der Fall, wenn* $n+1$ *positiv ist; denn sobald* $n+1$ *negativ ist, ist* $(1-1)^{n+1}$ *nicht Null, sondern unendlich gross.*] Also ist

Meth. die Const. ein. Stammgr. zu finden.

$$(n+1)\left(1-\frac{n}{2}+\frac{n.n-1}{2.3}-\ldots\right)=1,$$

folglich

$$1-\frac{n}{2}+\frac{n.n-1}{2.3}-\frac{n.n-1.n-2}{2.3.4}\ldots=\frac{1}{n+1},$$

was auch n sein mag. [*Aus dieser Art der Entwickelung wenigstens folgt der Ausdruck für jeden Werth von n nicht, sondern, wie vorhin gesagt, nur in dem Falle, wenn n + 1 positiv ist.*] Man erhält also

$$\int x=\frac{ax^{n+1}}{n+1}+b.$$

In der That ist die Ableitung dieser Grösse nach der allgemeinen Regel

$$\frac{a(n+1)x^n}{n+1}=ax^n;$$

denn die Ableitung der Constante b ist Null.

Vierte Vorlesung.

Ableitungen der Exponential-Grössen und Logarithmen. Entwickelung dieser Grössen in Reihen.

Ableitungen von Exponential-Grössen.

30.

Die Untersuchung der Function x^m, in welcher x das veränderliche Element und m eine Constante ist, führt unmittelbar auf diejenige der Function a^x, wo x das veränderliche Element und a eine Constante ist. Grössen der letzten Art heissen Exponential-Grössen, weil sie sich nur mit dem Exponenten zugleich verändern.

Um die Ableitung von a^x zu finden, darf man nur, nach dem allgemeinen Principe, $x + k$ statt x setzen und die Function nach Potenzen von k entwickeln. Der Coefficient mit k ist alsdann die gesuchte Ableitung.

Dieses giebt zunächst

$$a^{x+k} = a^x . a^k.$$

Man setze $a = 1 + b$, so erhält man

Ableitungen von

$$a^k = (1+b)^k$$

und, nach der obigen allgemeinen Formel,

$$a^k = (1+b)^k = 1 + kb + \frac{k.k-1}{2}.b^2 + \frac{k.k-1.k-2}{2.3}b^3 \ldots$$

Ordnet man die Glieder dieser Reihe nach Potenzen von k, so ist leicht zu sehen, dass die beiden ersten Glieder der Entwickelung von a^k folgende sind:

$$1 + \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \ldots\right) k$$

Man setze, der Kürze wegen,

$$b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \ldots, \text{ oder } [\textit{weil } b = a - 1 \textit{ ist}]$$

$$a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} \ldots = c,$$

so sind $1 + ck$ die beiden ersten Glieder der Entwickelung von a^k, folglich sind, wenn man mit a^x multiplicirt, $a^x + ca^x k$, die beiden ersten Glieder der Entwickelung von a^{x+k}. Also ist der Coefficient ca^x, zu k, die erste Ableitung von a^x.

Der Coefficient c hängt, wie man sieht, von der Grösse a ab, welche die Grundzahl oder Basis der Exponential-Grösse a^x heisst. Man nennt diesen Coefficienten gemeinhin den Modul.

Man findet also, dass die erste Ableitung einer Exponential-Grösse dem Producte der nemlichen Grösse in einen constanten Coefficienten gleich ist, welcher von der Grundzahl, oder der Basis der Exponential-Grösse abhängt und der Modul heisst.

Exponential-Grössen.

[*Man kann dieses auch, wie folgt, finden*

I. Vermöge des allgemeinen Ausdrucks

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots\ldots$$

ist nemlich

$$\frac{f(x+k)-fx}{k} = \frac{dfx}{dx} + \frac{k}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^2}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}\ldots\ldots,$$

also ist die erste Ableitung $\frac{dfx}{dx}$ *gleich der Grösse*

$\frac{f(x+k)-fx}{k}$ *für* $k=0$.

Hier, in diesem Falle, ist $fx = a^x$, *also ist* $f(x+k) = a^{x+k} = a^x . a^k$, *folglich* $\frac{f(x+k)-fx}{k}$ $= \frac{a^x . a^k - a^x}{k} = a^x \frac{a^k - 1}{k}$. *Dieses giebt, wenn man, wie oben,* $a = 1 + b$ *setzt,*

$$\frac{dfx}{dx} = a^x \frac{(1+b)^k - 1}{k}, \text{ oder}$$

$$\frac{dfx}{dx} = a^x \frac{1 + kb + \frac{k.k-1}{2}b^2 + \frac{k.k-1.k-2}{2.3}b^3\ldots\ldots - 1}{k},$$

oder

$$\frac{dfx}{dx} = a^x\left(b + \frac{k-1}{2}b^2 + \frac{k-1.k-2}{2.3}b^3\ldots\ldots\right)$$

für $k=0$; *also, wenn man* $k=0$ *setzt,*

$$\frac{dfx}{dx} = a^x\left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}\ldots\ldots\right),$$

oder, weil $b = a - 1$ *ist,*

Ableitungen von

$$\frac{dfx}{dx}=\frac{da^x}{dx}=a^x\left(a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}\ldots\right)$$

wie oben.

II. Das andre bei den Potenzen gebrauchte Verfahren mit allgemeinen Functions-Formen ist in dem gegenwärtigen Falle folgendes.

Die Eigenschaft der Exponential-Grössen nemlich besteht darin, dass, für zwei beliebige veränderliche Grössen x und y und für ein beliebiges a,

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

also, wenn man die Exponirungs-Operation durch f bezeichnet,

$$fxfy = f(x+y)$$

ist.

Man setze in diese Gleichung $x+k$ statt x, so muss man, wenn man will, dass $f(x+y)$ unverändert den nemlichen Werth behalten soll, $y-k$ statt y setzen. Dieses giebt, weil nunmehr $f(x+k)\cdot f(y-k)=f(x+y)=fx\,fy$ ist, wenn man diese Ausdrücke nach der allgemeinen Formel $f(x+k)=fx+k\frac{dfx}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots$ entwickelt,

$$fx\,fy = \left(fx+k\frac{dfx}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots\right)$$
$$\times\left(fy-k\frac{dfy}{dy}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2fy}{dy^2}-\ldots\right),$$

oder

Exponential-Grössen.

$$fx\,fy = fx\,fy + k\left(fy\frac{dfx}{dx} - fx\frac{dfy}{dy}\right) + \frac{k^2}{2}\left(fy\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots\right)\ldots$$

also, da die Coefficienten zu einerlei Potenzen von k, zusammen, gleich Null sind,

$$fy\frac{dfx}{dx} - fx\frac{dfy}{dy} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{\frac{dfx}{dx}}{fx} = \frac{\frac{dfy}{dy}}{fy}.$$

Diese Gleichung kann nur Statt finden, wenn

$$\frac{\frac{dfx}{dx}}{fx} = \frac{\frac{dfy}{dx}}{fy} = Const. = c$$

ist, weil x *von* y *nicht abhängt und dennoch* $\frac{dfx}{dx}.fx$ *seinen Werth nicht ändern soll, wenn man* y *statt* x *setzt.*

Also ist $\frac{dfx}{dx}$, *oder*

$$\frac{d(a^x)}{dx} = c\,.\,a^x;$$

wie oben gefunden wurde.

Die Constante c kann man, wie im Texte, oder wie in der Anmerkung finden.

III. Will man von der Gleichung $(a^x)^m = a^{mx}$, *als allgemeinem Ausdrucke der Eigenschaft der*

Ableitungen von

Exponential-Grösse a^x ausgehen, so kann man die erste Ableitung dieser Grösse, wie folgt, finden.

Man bezeichne nemlich a^x durch fx, so ist die Grund-Bedingung folgende:

$$(fx)^m = fmx;$$

oder, wenn man $mx = y$ und $fx = z$ setzt,

$$z^m = fy.$$

Nun ist, wie weiter unten gezeigt wird, allgemein, die erste Ableitung nach x einer Grösse u, die von einer andern, z. B. z oder y abhängt, welche selbst wieder eine Function von x ist,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Lässt man, für den gegenwärtigen Fall, erstlich $u = z^m$ sein, so erhält man, vermöge des obigen allgemeinen Gesetzes für die erste Ableitung von Potenzen, $\frac{du}{dz} = mz^{m-1}$, also

$$\frac{d(z^m)}{dx} = mz^{m-1}\frac{dz}{dx} = m(fx)^{m-1}\frac{dfx}{dx}.$$

Setzt man dagegen $u = fy$, so erhält man $\frac{dfy}{dx} = \frac{dfy}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, oder weil $y = mx$ und folglich $\frac{dy}{dx} = m$ ist,

$$\frac{dfy}{dx} = \frac{dfy}{dy} \cdot m;$$

also, weil $z^m = fy$ ist, welches zugleich, wie wei-

Exponential - Grössen.

ter unten allgemein gezeigt wird, $\frac{d(z^m)}{dx} = \frac{dfy}{dx}$ *giebt,*

$$m(fx)^{m-1}\frac{dfx}{dx} = m\frac{dfy}{dy}, \text{ oder}$$

$$(fx)^{m-1}\frac{dfx}{dx} = \frac{dfy}{dy}.$$

Man dividire diese Gleichung durch $(fx)^m = f(mx) = fy$, *so erhält man*

$$\frac{dfx}{dx} : fx = \frac{dfy}{dy} : fy.$$

Hieraus folgt, dass sich der Werth der Grösse $\frac{dfx}{dx} : fx$ *nicht ändert, wenn man statt* x *irgend eine beliebige andre Grösse* y *setzt. Also kann* $\frac{dfx}{dx} : fx$ *nur eine Constante* c *sein. Es ist also nothwendig*

$$\frac{dfx}{dx} : fx = c$$

und folglich

$$\frac{dfx}{dx} = cfx, \text{ oder}$$

$$\frac{d(a^x)}{dx} = ca^x,$$

wie oben.]

Entwickelung von

Entwickelung von Exponential-Grössen.

31.

Da die erste Ableitung von a^x, ca^x ist, so ist die zweite Ableitung von a^x [*oder die erste Ableitung von der ersten Ableitung*] $c^2 a^x$, die dritte Ableitung $c^3 a^x$ u. s. w.

Setzt man also $a^x = fx$, so ist

$$\frac{dfx}{dx} = ca^x, \frac{d^2fx}{dx^2} = c^2 a^x \text{ etc.}$$

Substituirt man Dieses in die allgemeine Entwickelung von $f(x+k)$, so erhält man

$$a^{x+k} = a^x + ca^x k + \frac{c^2}{2} a^x k^2 + \frac{c^3}{2.3} a^x k^3 \ldots.$$

und, wenn man mit a^x dividirt.

$$a^k = 1 + ck + \frac{c^2 k^2}{2} + \frac{c^3 k^3}{2.3} \ldots.$$

Dieses ist die Reihe, von welcher wir oben zunächst die beiden ersten Glieder fanden. Sie dient, wie man sieht, eine beliebige Potenz in eine, nach den Potenzen ihres Exponenten geordnete, Reihe zu entwickeln.

32.

Vermittelst dieser Reihe lässt sich unmittelbar der Werth von a durch c ausdrücken.

Setzt man nemlich $k = 1$, so ist

$$a = 1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} \ldots.$$

und, wenn $c = 1$, so erhält man für a folgende sehr einfache Reihe:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \ldots,$$

deren Werth

$$2,718281828459 \ldots$$

ist.

Dieses ist die Zahl, welche man gewöhnlich durch e bezeichnet, und welche folglich die Basis der Exponential-Grösse mit dem Modul 1 ist.

Setzt man in diesem Falle $fx = e^x$, so ist blos $\frac{dfx}{dx} = e^x$, $\frac{d^2fx}{dx^2} = e^x$ *etc.* und folglich

$$e^k = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^4}{2.3.4} \ldots$$

33.

Setzt man in die obige Gleichung $a^k = 1 + ck + \frac{c^2 k^2}{2} \ldots$, $k = \frac{1}{c}$, so erhält man

$$a^{\frac{1}{c}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} \ldots = e.$$

Man hat also zwischen den drei constanten Grössen a, c und e, die Gleichung

$$a^{\frac{1}{c}} = e, \text{ woraus folgt: } a = e^c.$$

Diese Gleichung giebt auch

$$\frac{1}{a} = e^{-c},$$

Entwickelung von

woraus man sieht, dass, wenn c negativ genommen wird, a in $\frac{1}{a}$ übergeht. Setzt man Dieses in die obige gegebene Gleichung $c = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} \ldots$, so erhält man [$-c = \frac{1}{a} - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} - 1\right)^3 \ldots$, oder]

$$c = \frac{a-1}{a} + \frac{(a-1)^2}{2a^2} + \frac{(a-1)^3}{3a^3} \ldots$$

Diese Reihe ist geschickter als die vorige, den Werth von c zu berechnen, wenn a grösser als Eins ist.

Setzt man $a = 10$, so ist

$$c = 0{,}9 + \frac{(0{,}9)^2}{2} + \frac{(0{,}9)^3}{3} \ldots$$

Man findet, wenn man die Rechnung ausführt,

$$c = 2{,}302585092994 \ldots$$

[*Ohne Ableitungen kann man die Grösse* a^x, *wie folgt, sogleich vollständig in eine Reihe entwickeln.*

I. Die allgemeine Eigenschaft der Exponential-Grössen nemlich lässt sich durch

$$fx\,fy = f(x+y)$$

ausdrücken.

Man setze für fx *die Reihe* $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$, *welche nothwendig ein Glied ohne* x *enthalten muss, weil* fx *nicht Null ist, für* $x = 0$; *voraus, so ist*

Exponential-Grössen.

$$fx = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots.$$
$$fy = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta^3 y \ldots.$$
$$f(x+y) = \alpha + \beta(x+y) + \gamma(x+y)^2 + \delta(x+y)^3 \ldots.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung $fx\,fy = f(x+y)$, *so erhält man*

$$\begin{array}{llll} \alpha^2 + \alpha\beta x + \alpha\gamma x^2 + \alpha\delta x^3 \ldots. & = & \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots. \\ \quad + \alpha\beta y + \beta^2 xy + \beta\gamma x^2 y \ldots. & & \quad + \beta y + 2\gamma xy + 3\delta x^2 y \ldots. \\ \qquad + \alpha\gamma y^2 + \beta\gamma xy^2 \ldots. & & \qquad + \gamma y^2 + 3\delta xy^2 \ldots. \\ \qquad\quad + \alpha\delta y^3 \ldots. & & \qquad\quad + \delta y^3 \ldots. \end{array}$$

Hieraus folgt, wenn man die Coefficienten zu gleichen Potenzen von x *und* y *vergleicht,*

$\alpha^2 = \alpha$, *also* $\alpha = 1$

$\beta^2 = 2\gamma$, *also* $\gamma = 1\ \beta^2$

$\beta\gamma = 3\delta$, *also* $\delta = \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2.3}\beta^3$ *etc.;*

also fx, *oder*

$$a^x = 1 + \beta x + \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{2.3} \ldots.,$$

wo noch der Coefficient β *zu bestimmen übrig ist.*

Es ist

$$\frac{a^x - 1}{x} = \beta + \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{2.3} \ldots.,$$

also ist β *gleich* $\frac{a^x - 1}{x}$, *für* $x = 0$. *Man setze* $a = 1 + b$, *so ist, vermöge des oben allgemein bewiesenen binomischen Satzes,*

$$a^x = 1 + xb + \frac{x.x-1}{2}b^2 + \frac{x.x-1.x-2}{2.3}b^3 \ldots.,$$

folglich

Entwickelung von

$$\frac{a^x - 1}{x} = b + \frac{x-1}{2} b^2 + \frac{x-1 . x-2}{2.3} b^3 \ldots.$$

Dieses giebt für $x = 0$, $b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \ldots.$

mithin erhält man, weil $b = a - 1$ *ist,*

$$\beta = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} \ldots.$$

Dieses ist der Werth von β *und folglich nunmehr der entwickelte Ausdruck der Grösse* a^x *vollständig gefunden.*

Da $a^x = 1 + \beta x + \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{2.3} \ldots.$ *ist, so ist auch*

$$a^k = 1 + \beta k + \frac{\beta^2 k^2}{2} + \frac{\beta^3 k^3}{2.3} \ldots. \text{ und}$$

$$a^{x+k} = a^x \left(1 + \beta k + \frac{\beta^2 k^2}{2} + \frac{\beta^3 k^3}{2.3} \ldots.\right)$$

wie oben.

II. Die Eigenschaft der Exponential-Grössen lässt sich auch durch

$$(fx)^m = f(mx)$$

ausdrücken; denn es ist z. B. $(a^x)^m = a^{mx}$. *Will man von* d i e s e m *Ausdrucke ausgehen, so setze man wieder*

$$fx = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots.$$

Dieses giebt, vermöge $(fx)^m = f(mx)$,

Exponential - Grössen.

$$a^m + m(\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \ldots)$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}(\beta^2 x^2 + 2\beta\gamma x^3 + \gamma^2 x^4 \ldots$$
$$+ 2\beta\delta x^4 \ldots)$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2.3}(\beta^3 x^3 + 3\beta^2\gamma x^4 \ldots)$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}(\beta^4 x^4 \ldots)$$
$$= \alpha + m\beta x + m^2\gamma x^2 + m^3\delta x^3 + m^4\varepsilon x^4 \ldots$$

Daraus folgt, wenn man die Coefficienten zu gleichen Potenzen von x gleich setzt,

$$a^m = \alpha, \text{ also } \alpha = 1$$
$$m\beta = m\beta$$
$$m\gamma + \frac{m.m-1}{2}\beta^2 = m^2\gamma$$
$$m\delta + \frac{m.m-1}{2}2\beta\gamma + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}\beta^3 = m^3\delta$$
$$m\varepsilon + \frac{m.m-1}{2}(\gamma^2 + 2\beta\delta) + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}3\beta^2\gamma$$
$$+ m^4\beta^4 = m^4\varepsilon \text{ u. s. w.}$$

Da hier m ganz willkürlich ist und $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ davon gar nicht abhängen, so kann man m einen beliebigen Werth geben, also diese Grösse auch gleich Null setzen, nachdem man mit m dividirt hat. Dieses giebt

$$\gamma - \frac{1}{2}\beta^2 = 0$$
$$\delta - \frac{1}{2}2\beta\gamma + \frac{1}{3}\beta^3 = 0$$
$$\varepsilon - \frac{1}{2}(\gamma^2 + 2\beta\delta) + \frac{1}{3}3\beta^2\gamma - \frac{1}{4}\beta^4 = 0 \text{ etc.,}$$

Entwickelung von

woraus folgt

$$\gamma = \frac{\beta^2}{2},\ \delta = \frac{\beta^3}{2.3},\ \varepsilon = \frac{\beta^4}{2.3.4}\ etc.,$$

also fx, *oder*

$$a^x = 1 + \beta x + \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{2.3} \ldots$$

wie in (I.). Der unbestimmt bleibende Coefficient β *wird wie oben gefunden.*

III. Hierbei ist der in der Folge Anwendung findende Umstand zu bemerken, dass man, man mag von der Grund-Bedingung $fx\,fy = f(x+y)$ *oder von* $(fx)^m = f(mx)$ *ausgehen, für* fx *genau das Nemliche findet; denn die Grund-Bedingungen geben für* fx, *beide, die Reihe* $1 + \beta x + \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{2.3} \ldots$ *und für beide ist* $\beta = a - 1 - \frac{(a-1)}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} \ldots$ *Hieraus folgt, dass eine Grösse* fx, *wenn sie der Gleichung* $fx\,fy = f(x+y)$ *entspricht, auch die Eigenschaft* $(fx)^m = f(mx)$ *hat, und umgekehrt.*]

34.

Jede veränderliche Grösse lässt sich durch eine, zu einer Potenz mit veränderlichem Exponenten erhobene Constante ausdrücken. Also ist der Exponent dieser Potenz eine Function der gegebenen Grösse. Derselbe ist im allgemeinsten Sinne der L o g a r i t h m e

der

der gegebenen Grösse, woraus man sieht, dass die logarithmischen Functionen nichts anders als umgekehrte Exponential-Functionen sind.

35.

Wir wollen im Allgemeinen den Logarithmen einer Grösse durch das Wort *log*, als Zeichen, vor das Zeichen der Grösse gesetzt, andeuten. Also soll $log\,x$ der Logarithme oder die logarithmische Function von x bezeichnen, welche die Gleichung $x = a^{log\,x}$ bestimmt, in welcher a, die Basis der Exponential-Grösse, zugleich die Basis des logarithmischen Systems ist. [*Diese auch sonst gewöhnliche Bezeichnung ist unbestimmt und folglich unzureichend. Denn da es zu jeder Zahl schon deswegen unzählige Logarithmen giebt, weil unzählige Basen möglich sind, so fehlt bei dem Zeichen log eine Anzeige, nemlich, die, der Basis. Die Basis muss daher nothwendig ebenfalls noch angegeben werden, welches bequem geschieht, wenn man z. B. ihr Zeichen, oder ihren Werth über das Wort log setzt, z. B.* $\overset{a}{log}$, $\overset{b}{log}$, $\overset{10}{log}$ *etc. Die so vervollständigte Bezeichnung* $\overset{a}{log}\,x$, $\overset{b}{log}\,x$, $\overset{10}{log}\,x$ *etc. ist dann ganz bestimmt, und keine Verwechselung mehr möglich. Im gemeinen Leben kommen freilich fast nur allein die briggischen Logarithmen vor, deren Basis 10 ist und wenn allenfalls die natürlichen oder Neperschen Logarith-*

men noch vorkommen, so kann man sich dadurch helfen, dass man die briggischen Logarithmen durch log, die Neperschen durch Log bezeichnet, oder dergl.; allein allgemein giebt es nicht blos zwei, sondern unendlich viele Arten von Logarithmen; daher muss man die Basis nothwendig mit anzeigen. Unterlässt man solches, so ist die Bezeichnung $\log x$ *ungefähr eben so unbestimmt, als wenn man z. B. statt* a^m, b^n *u. s. w.* $.^m$, $.^n$ *etc. schriebe.*]

Ableitungen von Logarithmen.

36.

Um nun die erste Ableitung von $\log x$ zu finden, setze man allgemein

$$\log x = fx,$$

welches giebt $x = a^{fx}$ und, wenn man $x + k$ statt x setzt,

$$x + k = a^{f(x+k)}.$$

Diese Gleichung muss identisch sein und folglich für jeden Werth von k Statt finden. Man erhält, wenn man sie entwickelt,

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \dots = fx + \omega,$$

wenn

$$k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} = \omega$$

Logarithmen.

gesetzt wird. Substituirt man Dieses, so erhält man

$$x + k = a^{fx + \omega} = a^{fx} . a^{\omega} = x . a^{\omega}$$

[*weil nemlich* $a^{fx} = x$ *war*] und, wenn man mit x dividirt,

$$1 + \frac{k}{x} = a^{\omega}.$$

Vermöge des obigen Ausdrucks ist aber allgemein

$$a^{\omega} = 1 + c\omega + \frac{c^2 \omega^2}{2} \dots;$$

also ist

$$1 + \frac{k}{x} = 1 + c\omega + \frac{c^2\omega^2}{2} \dots$$

Setzt man hierin wieder den Werth von $\omega \left[= k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{d^2x} \dots \right]$ und ordnet die Glieder nach Potenzen von k, so erhält man folgende identische Gleichung:

$$\frac{k}{x} = kc\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\left(c^2\left(\frac{dfx}{dx}\right)^2 + c\frac{d^2fx}{dx^2}\right) \dots$$

und, wenn man die Glieder [*mit gleichen Potenzen von* k] vergleicht,

$$\frac{1}{x} = c\frac{dfx}{dx},$$

woraus folgt:

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{1}{cx}.$$

Die Vergleichung der andern Glieder giebt die Wer-

Ableitungen von

the von $\frac{d^2fx}{dx^2}$, $\frac{d^3fx}{dx^3}$ *etc.*; aber es ist besser diese Glieder, der Reihe nach, aus $\frac{dfx}{dx}$ abzuleiten.

Die Constante c hängt von der Basis a des logarithmischen Systems ab und zwar, vermöge der oben gefundenen Ausdrücke. In Beziehung auf die Logarithmen heisst diese Constante Modul: des logarithmischen Systems.

Man findet also allgemein, dass die erste Ableitung des Logarithmen einer veränderlichen Grösse gleich ist der Einheit, dividirt durch das Product der veränderlichen Grösse in den Modul des logarithmischen Systems.

[*Das Nemliche kann man wieder auf folgende Weise und zwar durch ein, der ersten Methode bei den Exponential-Grössen ähnliches, Verfahren finden.*

I. Es sey $fx = \overset{a}{log}\, x$, *so ist* $f(x+k) = \overset{a}{log}(x+k)$ $= \overset{a}{log}\left(x\left(1+\frac{k}{x}\right)\right) = \overset{a}{log}\, x + \overset{a}{log}\left(1+\frac{k}{x}\right)$, *also ist, weil allgemein* $\frac{dfx}{dx} = \frac{f(x+k)-fx}{k}$ *für* $k = 0$,

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{\overset{a}{log}\, x + \overset{a}{log}\left(1+\frac{k}{x}\right) - \overset{a}{log}\, x}{k} = \frac{\overset{a}{log}\left(1+\frac{k}{x}\right)}{k}$$

für $k = 0$.

Logarithmen.

Es sey $k = mx$, *so dass* $k = 0$, *wenn* $m = 0$, *so ist*

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{\overset{a}{\log}(1+m)}{mx} = \frac{1}{x}\,\frac{\overset{a}{\log}(1+m)}{m} \text{ für } m = 0.$$

Nun war oben in (31.)

$$a^x = 1 + cx + \frac{c^2 x^2}{2} \ldots\ldots$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen für die Basis a, *so erhält man, weil* $\overset{a}{\log}\, a^x = x$ *ist,*

$$x = \overset{a}{\log}\left(1 + cx + \frac{c^2 x^2}{2} \ldots\right)$$

Man setze $cx + \frac{c^2 x^2}{2} \ldots = m$, *so ist*

$$x = \overset{a}{\log}(1 + m);$$

also ist

$$\frac{\overset{a}{\log}(1 + m)}{m} = \frac{x}{cx + \frac{c^2 x^2}{2} \ldots},$$

oder

$$\frac{\overset{a}{\log}(1 + m)}{m} = \frac{1}{c + \frac{c^2 x}{2} + \frac{c^3 x^2}{2.3} \ldots}.$$

Wenn nun hier $x = 0$ *gesetzt wird, so ist auch* $m = 0$; *also erhält man den Werth des Quotienten* $\frac{\overset{a}{\log}(1 + m)}{m}$ *für* $m = 0$, *wenn man in den Ausdruck desselben* $x = 0$ *setzt. Dieses giebt den*

Ableitungen von

Werth von $\frac{\overset{a}{\log}(1+m)}{m}$ *für* $m=0$, $=\frac{1}{c}$, *also ist, weil* $\frac{dfx}{dx}=\frac{\overset{a}{\log}(1+m)}{mx}$ *für* $m=0$ *war,*

$$\frac{dfx}{dx}=\frac{1}{cx},$$

wie oben.

II. Das zweite Verfahren mit Functions-Zeichen ist hier folgendes.

Die Eigenschaft der Logarithmen ist, dass für zwei beliebige veränderliche Grössen x und y, und für eine beliebige Basis a des Systems,

$$\overset{a}{\log}\, x+\overset{a}{\log}\, y=\overset{a}{\log}\,(x.y),$$

also, wenn man die Logarithmirungs-Operation durch f bezeichnet,

$$fx+fy=f(x.y)$$

ist.

Man setze $x(1+k)=x+xk$ *statt* x, *und*

$$\frac{y}{1+k}=y(1-k+k^2\ldots.)=y-yk+yk^2\ldots.$$

statt y, *so bleibt* $f(x.y)$ *unverändert das Nemliche und man erhält*

$$fxy=fx+fy=fx+kx+\frac{dfx}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots.$$

$$+fy+(-ky+k^2y\ldots.)\frac{dfy}{dy}+\frac{(-ky\ldots)^2}{2}\frac{d^2fy}{dy^2}\ldots.,$$

oder

Logarithmen.

$$\int x + \int y = \int x + \int y$$
$$+ k\left(x\frac{d\int x}{dx} - y\frac{d\int y}{dy}\right)$$
$$+ \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2\int x}{dx}\ldots\right)\ldots$$

Hieraus folgt, weil die Coefficienten zu gleichen Potenzen von k zusammen Null sind,

$$x\frac{d\int x}{dx} - y\frac{d\int y}{dy} = 0, \text{ oder}$$

$$x\frac{d\int x}{dx} = y\frac{d\int y}{dy}.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn $x\frac{d\int x}{dx}$ $= y\frac{d\int y}{dy} =$ *Const. ist, weil die Grösse* $x\frac{d\int x}{dx}$ *ihren Werth nicht ändern soll, wenn man y statt x setzt. Also ist* $x\frac{d\int x}{dx} = \text{Const.} = \frac{1}{c}$ *und folglich* $\frac{d\int x}{dx}$, *oder*

$$\frac{d\overset{a}{\log} x}{dx} = \frac{1}{cx},$$

wie oben. Die Constante c findet man wie oben.

III. Will man von der Gleichung

$$m \log x = \log(x^m),$$

als allgemeinem Ausdruck der Eigenschaft der Logarithmen, ausgehen, so kann man die erste Ableitung derselben, wie folgt, finden.

Man setze $\log x = \int x$ *und* $x^m = y$, *so dass*

Ableitungen von

$mfx = fy$, *so erhält man, aus ähnlichen Gründen wie bei den Exponential-Grössen,*

$$m\frac{dfx}{dx} = \frac{dfy}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Da aber $x^m = y$ *ist, so ist* $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$, *also*

$$m\frac{dfx}{dx} = \frac{dfy}{dy} mx^{m-1}, \text{ oder } \frac{dfx}{dx} = \frac{dfy}{dy} x^{m-1}.$$

Man dividire diese Gleichung mit $y = x^m$, *so erhält man*

$$\frac{dfx}{dx} : y = \frac{dfy}{dy} : x, \text{ oder}$$

$$x\frac{dfx}{dx} = y\frac{dfy}{dy}.$$

Hieraus folgt, dass sich der Werth der Grösse $x\frac{dfx}{dx}$ *nicht ändert, wenn man statt* x *irgend eine beliebige andere Grösse* y *setzt; also ist nothwendig*

$$x\frac{dfx}{dx} = \frac{1}{c}$$

und folglich $\frac{dfx}{dx}$, *oder*

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{cx},$$

wie vorhin.

IV. Da Logarithmen und Exponential-Grössen *entgegengesetzte* *Functionen sind, so kann man auch die Ableitung der einen aus der Ableitung der andern noch weit kürzer finden.*

Logarithmen.

Weiter unten nemlich wird gezeigt, dass, allgemein, wenn y von x und z von y abhängt $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ *ist. Da nun z auch wiederum gleich x selbst sein kann und* $\frac{dx}{dx} = 1$ *ist, so ist allgemein* $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$. *Kennt man also von einer beliebigen, von x abhängenden Grösse y, die erste Ableitung* $\frac{dy}{dx}$ *nach x, so ist sogleich, umgekehrt, die erste Ableitung von x nach y gleich* $\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}$.

Hier nun ist für die Exponential-Grösse $a^x = y$, *x der Logarithme von y und oben wurde gefunden, dass* $\frac{dy}{dx} = cy$, *oder* $\frac{d(a^x)}{dx} = ca^x$ *ist. Also findet man unmittelbar* $\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cy}$, *oder*

$$\frac{d \overset{a}{\log} y}{dy} = \frac{1}{cy},$$

wie oben.

Es ist wohl gut, wenn man bei solchen Entwikkelungen, wo möglich, nicht bei jeder einen andern Kunstgriff anwendet, sondern alle möglichst nach einer und derselben Regel macht. Man kommt schon mit allgemeinen Regeln allemal weiter, als mit einzelnen besondern Methoden.]

Entwickelung der

37.

Da $fx = \overset{a}{log}\, x$,

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{1}{cx}$$

giebt, so erhält man, wenn man, nach der allgemeinen Regel für die Potenzen, der Reihe nach, die Ableitungen der verschiedenen Ordnungen nimmt,

$$\frac{d^2 fx}{dx^2} = -\frac{1}{cx^2},\ \frac{d^3 fx}{dx^3} = \frac{2}{cx^3} \dots$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Entwickelung von $f(x+k)$ $\left[= fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} \dots\right]$, so erhält man für $log\,(x+k)$ die Reihe:

$$[\overset{a}{log}\, x+k =]\ \overset{a}{log}\, x + \frac{k}{cx} - \frac{k^2}{2cx^2} + \frac{k^3}{3cx^3} \dots$$

Hat man also den Logarithmen irgend einer Zahl x, so kann man mittelst dieser Reihe den Logarithmen jeder grössern [*oder kleinern*] Zahl $x+k$ finden. Die Reihe convergirt um so stärker, je kleiner k gegen x ist.

Entwickelung der Logarithmen.

38.

Dem Gesetze der Logarithmen zu Folge ist

$$\overset{a}{log}\,(x+k) - \overset{a}{log}\, x = log\left(\frac{x+k}{x}\right) = log\left(1+\frac{k}{x}\right).$$

Logarithmen.

Setzt man also in den obigen Ausdruck, $\frac{k}{x} = y$, so erhält man $\left[weil\ \overset{a}{log}(x+k) - \overset{a}{log}\,x = \frac{k}{cx} - \frac{k^2}{2cx^2} + \frac{k^3}{3cx^3} \ldots = \frac{y}{c} - \frac{y^2}{2c} + \frac{y^3}{3c} \ldots\ war\right]$ den bekannten Ausdruck

$$\overset{a}{log}(1+y) = \frac{1}{c}\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \ldots\right).$$

Es sey $1 + y = z$, so ist $y = z - 1$, also

$$\overset{a}{log}\,z = \frac{1}{c}\left((z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} \ldots\right).$$

[Ohne Ableitungen kann man die vollständige Reihe für den Logarithmen, wie folgt, finden.

Die Eigenschaft der Logarithmen wird nemlich, wie oben, durch

$$fx + fy = fxy,$$

oder durch

$$log\,x + log\,y = log\,(xy)$$

ausgedrückt.

Damit man für x *und* $y = 0$ *nicht unendliche Grössen erhalte, welches die vorausgesetzten Reihen unbrauchbar machen würde, schreibe man* $1 + x$ *und* $1 + y$ *statt* y, *so ist*

$$f(1+x) + f(1+y) = f((1+x)(1+y)).$$

Ferner setze man $y = mx$, *wodurch, wenn* m *eine ganz unbestimmte Grösse bedeutet, eben so wohl eine von* x *gänzlich unabhängige Grösse ausge-*

drückt werden kann, als durch y selbst; so ist

$$f(1+x)+f(1+mx)=f((1+x)(1+mx)).$$

Eben deshalb aber, weil m eine gänzlich willkürliche Grösse ist, kann dieselbe, wie es bei den Potenzen der Fall war, auch hier auf die Coefficienten der Reihe, in welche $f(1+x)$ *entwickelt werden soll, gar keinen Einfluss haben, indem diese Coefficienten auf jedes beliebige m passen sollen; vielmehr muss sich m in den zu suchenden Ausdrücken der Coefficienten überall aufheben.*

Man kann also auch m, im Voraus, einen beliebigen bestimmten, bequemen Werth, z. B. den Werth 1 geben. Dieses vereinfacht den vorigen Ausdruck und verwandelt ihn in

$$2f(1+x)=f(1+x)^2$$

welcher einfachere Ausdruck aber, wenn es, wie hier, auf Bestimmung der Coefficienten der Reihe für $f(1+x)$ *ankommt, nicht im geringsten weniger allgemein ist, als der ursprüngliche Ausdruck* $f(1+x)+f(1+y)=f((1+x)(1+y))$.

Nun setze man, und zwar weil $f(1+x)$, *oder* $\log(1+k)$ *gleich* o *ist für* $x=0$,

$$f(1+x)=\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3 \ldots.,$$

so erhält man, vermöge $2f(1+x)=f(1+2x+x^2)$,

$$\begin{aligned}2\alpha x+2\beta x^2+2\gamma x^3+2\delta x^4 \ldots. = {} & \alpha(2x+x^2)\\ & +\beta(2x+x^2)^2\\ & +\gamma(2x+x^2)^3\\ & +\delta(2x+x^2)^4 \text{ etc.}\end{aligned}$$

oder

$$2\alpha x + 2\beta x^2 + 2\gamma x^3 + 2\delta x^4 \ldots = 2\alpha x + \alpha x^2 + 4\beta x^3 + \beta x^4 \ldots.$$
$$+ 4\beta x^2 + 8\gamma^3 + 12\gamma x^4 \ldots$$
$$+ 16\delta x^4 \ldots,$$

woraus folgt:

$$\alpha = \alpha$$

$$2\beta = \alpha + 4\beta, \quad \beta = -\frac{1}{2}\alpha$$

$$2\gamma = 4\beta + 8\gamma, \quad \gamma = -\frac{2}{3}\beta = \frac{1}{3}\alpha$$

$$2\delta = \beta + 12\gamma + 16\delta, \; \delta = -\frac{1}{14}\beta - \frac{12}{14}\gamma = +\frac{1}{28}\alpha - \frac{4}{14}\alpha = -\frac{1}{4}\alpha$$

etc.

Also ist

$$f(1+x) = \alpha\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots\right) = \log(1+x).$$

Da hieraus $\alpha\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \ldots\right) = \frac{\log(1+x)}{x}$ *folgt, so erhält man* α*, wenn man in* $\frac{\log(1+x)}{x}$, $x = 0$ *setzt.*

Um den Werth von $\frac{\log(1+x)}{x}$ *für* $x = 0$ *zu finden, setze man z. B.*

$$1 + x = a^y,$$

so ist

$$y = \overset{a}{\log}(1 + x),$$

wodurch nun erst die Grösse $\log(1+x)$ *eine bestimmte Bedeutung erhält. So lange die Basis* a *nicht bestimmt ist, kann* $\log(1+x)$ *unzählige Werthe haben. Man setze ferner* $a = 1 + b$*, so ist*

Entwickelung der Logarithmen.

$$(1+b)^y = 1+x,$$

oder, wenn man Solches nach der Binomial-Formel entwickelt,

$$1+yb+\frac{y.y-1}{2}b^2+\frac{y.y-1.y-2}{2.3}b^3\ldots = 1+x,$$

welches $yb+\frac{y.y-1}{2}b^2\ldots = x$ *und*

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{b+\frac{y-1}{2}b^2+\frac{y-1.y-2}{2.3}b^3\ldots},$$

oder, weil $y = \overset{a}{log}(1+x)$ *ist,*

$$\frac{\overset{a}{log}(1+x)}{x} = \frac{1}{b+\frac{y-1}{2}b^2+\frac{y-1.y-2}{2.3}b^3\ldots}$$

giebt.

Nun ist $y = 0$ *für* $x = 0$, *wie aus* $1+x = a^y$ *leicht zu sehen; also ist der Werth von* $\frac{\overset{a}{log}(1+x)}{x}$ *für* $x = 0$

$$= \frac{1}{b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3\ldots}$$

und dieses ist der Werth des oben unbestimmt gebliebenen Coefficienten α. *Also ist, vollständig, weil* $b = a-1$ *ist,*

$$\overset{a}{log}(1+x) = \frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots}{a-1-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4\ldots}.$$

Die Reihe für Logar. converg. zu machen.

Die erste Ableitung von $\overset{a}{\log} x$ findet man hieraus leicht, wenn man $\frac{k}{x}$ statt x setzt. Dieses giebt $\overset{a}{\log}\left(1+\frac{k}{x}\right) = \overset{a}{\log}(x+k) - \overset{a}{\log} x$; also ist

$$\overset{a}{\log}(x+k) - \overset{a}{\log} x = \alpha\left(\frac{k}{x} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{k^3}{x^3} \ldots\right),$$

oder

$$\overset{a}{\log}(x+k) = \overset{a}{\log} x + \alpha\left(\frac{k}{x} - \frac{1}{2}\frac{\alpha k^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{\alpha k^3}{x^3} \ldots\right),$$

woraus folgt, dass der Coefficient zur ersten Potenz von k, in dem entwickelten Ausdrucke von $\overset{a}{\log}(x+k)$, gleich

$$\frac{\alpha}{x}$$

ist. Dieser Coefficient ist die erste Ableitung von $\overset{a}{\log} x$; welches mit dem Obigen übereinkommt, wenn man α durch $\frac{1}{c}$ bezeichnet.]

Die Reihe für Logarithmen convergent zu machen.

39.

Die obige Reihe convergirt nur dann, wenn z wenig von der Einheit verschieden ist, und ist folglich nur in diesem Falle geschickt, den Logarithmen einer bestimmten Zahl z zu geben. Man kann sie aber für

jeden beliebigen Fall convergent machen, wenn man $\sqrt[r]{z}$ statt z setzt. Denn weil $\overset{a}{log}\sqrt[r]{z} = \frac{\overset{a}{log}\, z}{r}$ ist, so erhält man, wenn man mit r multiplicirt,

$$\overset{a}{log}\, z = \frac{r}{c}\left(\sqrt[r]{z}-1-\frac{1}{2}(\sqrt[r]{z}-1)^2+\frac{1}{3}(\sqrt[r]{z}-1)^3 \ldots\right),$$

wo man für r eine beliebige positive oder negative Zahl setzen kann.

Welche nun auch die Zahl z sein mag, so lässt sich doch allemal daraus die rte Wurzel von einem so hohen Grade ziehen, dass $\sqrt[r]{z}$ nur noch so wenig von der Einheit verschieden ist, als man will. [*Nur muss z in der Regel nicht negativ sein.*] Der obige Ausdruck giebt also allemal den Werth von $\log z$ so genau als man will.

Nimmt man r negativ, so erhält man $\frac{1}{\sqrt[r]{z}}$ statt $\sqrt[r]{z}$ und die Reihe für $\log z$ geht, wenn man die Zeichen verwechselt, in folgende über

$$\overset{a}{log}\, z = \frac{r}{c}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^3 \ldots\right)$$

in welcher alle Glieder positiv sind. Man kann also für $\overset{a}{log}\, z$ nach Belieben die Reihe nehmen, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, oder die andere Reihe, deren Glieder alle positiv sind. Wenn nemlich $z >$ ist, so ist auch $\sqrt[r]{z} > 1$ und, wenn $z < 1$, so ist auch $\sqrt[r]{z} < 1$ [*immer in so fern z posi-*

convergent zu machen.

z positiv ist]. Die Abweichungen [*von* 1] werden um so kleiner sein, je grösser z ist. Also sind $\sqrt[r]{z}-1$ und $1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}$ im ersten Fall positiv, im andern negativ.

Wenn a die Basis der Logarithmen ist, so dass $\log a = 1$, so kann man, vermittelst der obigen Ausdrücke, den Werth des Moduls c so genau finden, als man will. Denn, setzt man $\log a = 1$ [*und* $z=a$] so ist $\left[1 = \frac{r}{c}(\sqrt[r]{a}-1) + \frac{1}{2}(\sqrt[r]{a}-1)^2 \ldots, \textit{ also}\right]$

$$c = r\left(\sqrt[r]{a}-1-\frac{1}{2}(\sqrt[r]{a}-1)^2+\frac{1}{3}(\sqrt[r]{a}-1)^3\ldots\right),$$

oder

$$c = r\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^3\ldots\right).$$

40.

Es ist klar, dass diese beiden Reihen für $\log z$ jedesmal convergiren, sobald man aus z diejenige rte Wurzel gezogen hat, für welche $\sqrt[r]{z}-1$ ein [*positiver*] echter Bruch ist; denn alsdann ist $1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}$ ein noch kleinerer Bruch, weil

$$1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}} = \frac{\sqrt[r]{z}-1}{\sqrt[r]{z}}.$$

[*Nemlich, wenn* $\sqrt[r]{z}-1$ *ein positiver echter Bruch*

Die Reihe für Logarithmen

ist, so ist $\sqrt[r]{z} > 1$ *und* < 2; *also von* $1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}$,

oder $\frac{\sqrt[r]{z}-1}{\sqrt[r]{z}}$ *der Nenner* $\sqrt[r]{z} > 1$, *folglich*

$\frac{\sqrt[r]{z}-1}{\sqrt[r]{z}} < \sqrt[r]{z}-1$].

Da nun in der ersten Reihe die Glieder mit den Zeichen wechseln, nemlich das zweite mit dem dritten, das vierte mit dem fünften etc. so sind ihre Summen, Paarweise, negativ. [*Denn es ist z. B.* $\sqrt[r]{z}-1 > (\sqrt[r]{z}-1)^2$, *weil* $\sqrt[r]{z}-1$ *ein positiver echter Bruch ist, also ist um so mehr* $\frac{1}{2}\sqrt[r]{z}-1 > \frac{1}{3}(\sqrt[r]{z}-1)^2$; *folglich ist* $-\frac{1}{2}\sqrt[r]{z}-1 + \frac{1}{3}(\sqrt[r]{z}-1)^2$ *eine negative Grösse. Eben so verhält es sich, Paarweise, mit den übrigen Gliedern.*] Mithin folgt aus der ersten Reihe:

$$\overset{a}{\log} z < \frac{r}{c}(\sqrt[r]{z}-1)$$

[*weil nemlich alle übrigen Glieder, Paarweise genommen, negative Summen haben*].

Hingegen aus der zweiten Reihe folgt, weil alle ihre Glieder positiv sind,

$$\overset{a}{\log} z > \frac{r}{c}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right).$$

Dieses giebt zwei Grenzen für den Werth von

convergent zu machen.

log z, die man so enge zusammenziehen kann, als man will, wenn man nur *r* gross genug annimmt.

Auf dieselbe Weise erhält man, wenn $\sqrt[r]{a} < 2$ ist,

$$c < r(\sqrt[r]{a} - 1) \text{ und}$$
$$c > r\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right).$$

Da

$$1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} = \frac{\sqrt[r]{z} - 1}{\sqrt[r]{z}},$$

so ist der Abstand zwischen den beiden Grenzen für

$$log\, z: \left[\frac{r}{c}\left(\sqrt[r]{z} - 1 - \frac{\sqrt[r]{z} - 1}{\sqrt[r]{z}}\right) = \right]$$
$$\frac{r}{c}(\sqrt[r]{z} - 1) . \left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right).$$

Nimmt man also den einen oder den andern der beiden obigen Ausdrücke für *log z*, $\left[\textit{nemlich } \frac{r}{c}(\sqrt[r]{z} - 1) \textit{ und } \frac{r}{c}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)\right]$ so kann man sicher sein, dass der Irrthum in Plus und Minus nothwendig kleiner ist, als die Grösse $\frac{r}{c}(\sqrt[r]{z} - 1) . \left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)$ [*weil ein Fehler allemal kleiner ist, als der Abstand seiner Grenzen.*]

Aus diesem Ausdrucke folgt, dass man z. B. einen Logarithmen bis auf 5 Decimal-Stellen genau

findet [*das heisst so, dass der Fehler keine ganze Decimal-Stelle beträgt, obgleich die Ziffer in der Stelle sich durch einen viel kleinern Fehler ändern kann*], wenn man diejenige Wurzel von z nimmt, die nach dem Comma noch 5 Nullen hat. [*denn da in dem Zahlen-Ausdrucke von* $\sqrt[r]{z}$, *vor dem Comma natürlich* 1 *steht, so ist* $\sqrt[r]{z}-1$ *ein Bruch mit* 5 *Stellen hinter dem Comma. Noch kleiner ist* $1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}$. *Also hat* $\frac{r}{c}(\sqrt[r]{z}-1).\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)$ *wenigstens* 5 *Nullen hinter dem Comma, weil* $\frac{r}{c}$ *gleichzeitig nie mehr als* 5 *Nullen vor dem Comma hat. Mithin ist der grösste mögliche Fehler ein Bruch mit mehr als* 5 *Nullen hinter dem Comma und folglich der Ausdruck des Logarithmen bis auf* 5 *Decimal-Stellen genau.*]

Da der Fehler immer mehr abnimmt, je grösser der Wurzel-Exponent r ist, so kann man sagen, dass er verschwindet, oder für Null zu achten ist, wenn man r unendlich gross setzt. Man kann also auf diese Weise einen oder den andern der beiden Ausdrücke $\frac{r}{c}(\sqrt[r]{z}-1)$ und $\frac{r}{c}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)$ für den genauen Ausdruck des Logarithmen von z annehmen.

41.

Daraus folgt, dass die Logarithmen eigentlich in die Reihe der Potenzen gehören und das erste Glied

einer Reihe ausmachen, deren Exponenten von Null an, ab- oder zunehmen, oder das letzte Glied in der Reihe der Wurzeln, deren Exponenten ins Unendliche zunehmen. [*In der That erhält man, wenn man* $\overset{a}{\log} z = \frac{r}{c}(z^{\frac{1}{r}} - 1)$, *oder* $\overset{a}{\log} z = \frac{r}{c}(1 - z^{-\frac{1}{r}})$ *und darin r unendlich gross setzt, hiervon aber, wie von jeder andern Potenz, die Ableitung nimmt,*

$$\frac{d\overset{a}{\log} z}{dz} = \frac{r}{c} \cdot \frac{1}{r} z^{\frac{1}{r} - 1} \quad \text{und} \quad \frac{d\overset{a}{\log} z}{dz} = \frac{r}{c} \cdot \frac{1}{r} z^{-\frac{1}{r} - 1},$$

oder

$$\frac{d\overset{a}{\log} z}{dz} = \frac{1}{c} z^{\frac{1}{r} - 1} \quad \text{und} \quad \frac{d\overset{a}{\log} z}{dz} = \frac{1}{c} z^{-\frac{1}{r} - 1},$$

welches Beides, weil $\frac{1}{r}$, *für ein unendlich grosses r, Null ist,*

$$\frac{d\overset{a}{\log} z}{dz} = \frac{1}{cz}$$

giebt, ganz wie in (36 und 37). Dieser Umstand ist um deswillen merkwürdig, weil er wieder an einem Beispiele zeigt, dass die Rechnung nie Ausnahmen leidet. Es ist nemlich für Potenzen allgemein und ohne Ausnahme gezeigt worden, dass $\frac{dz^m}{dz}$, *oder die erste Ableitung von* z^m *gleich* mz^{m-1} *und folglich, umgekehrt, die Stammgrösse von* mz^{m-1}, z^m, *oder von* z^{m-1}, $\frac{z^m}{m}$ *ist. Ist nun*

Die Reihe für Logarithmen

die erste Ableitung gleich $\frac{1}{z}$, *oder* $m = 0$, *so scheint es, dass es dazu keine Stammgrösse nach der allgemeinen Regel gebe, weil* $\frac{z^0}{0}$ *unendlich gross ist. Das Resultat scheint also in diesem Falle unrichtig zu sein und die Rechnung zu fehlen, oder eine Ausnahme zu erfordern. Allein so ist es nicht. Man findet vielmehr die Stammgrösse von* $\frac{1}{z}$ *ganz nach der allgemeinen Regel, wenn man nur auf alle Umstände achtet und namentlich die Constante nicht aus der Acht lässt, die bei jeder Zurückleitung hinzukommen, oder die jede Stammgrösse, noch ausser den veränderlichen Grössen, enthalten kann. Diese Constante ist hier* -1 *und die Stammgrösse von* $\frac{1}{z}$ *ist allerdings, ganz nach der allgemeinen Regel,* $\frac{z^0 - 1}{0}$, *oder, wenn man* $\frac{1}{r}$ *statt* 0 *schreibt, wo r eine unendlich grosse Zahl bedeutet,* $r(z^{\frac{1}{r}} - 1)$ *für den natürlichen Logarithmen und* $\frac{r}{c}(z^{\frac{1}{r}} - 1)$ *für eine beliebige Basis. Dass die Constante* -1 *sein muss, folgt daraus, dass die Stammgrösse von* $\frac{1}{z}$ *nothwendig eine veränderliche Grösse sein muss, welches* $\frac{z^0}{0}$ *allein nicht ist. Da nun*

convergent zu machen.

der Nenner in $\frac{z^0}{0}$ *Null ist*, *so muss auch nothwendig der Zähler Null sein*, *weil nur* $\frac{0}{0}$ *eine veränderliche Grösse ausdrücken kann. Also muss nothwendig die der Grösse* z^0 *gleiche Einheit*, *von* z^0, *für die Constante abgezogen werden*, *und die vollständige und richtige Stammgrösse von* $\frac{1}{z}$ *ist*, *ganz der allgemeinen Regel für Potenzen zu Folge*, $\frac{z^0 - 1}{0}$. *Die Rechnung leidet in der That überall*, *wenn man nur auf alle Umstände Rücksicht nimmt*, *nie Ausnahmen.*

Man kann auch aus dem Ausdrucke $\frac{1}{c}.\frac{z^0-1}{0}$ *für die Stammgrösse von* $\frac{1}{z}$ *leicht die Reihe für diese Stammgrösse entwickeln. Setzt man nemlich* m *statt* 0 *und* $1+y$ *statt* z, *so ist*

$$\frac{1}{c}\frac{(1+y)^m-1}{m} = \frac{1}{c}\frac{1+my+\frac{m.m-1}{2}y^2\ldots.-1}{m}$$

$$= \frac{1}{c}\left(y+\frac{m-1}{2}y^2+\frac{m-1.m-2}{2\cdot 3}y^3\ldots.\right)$$

und, *weil* $m = 0$ *sein soll*,

$$\frac{1}{c}\left(\frac{(1+y)^m-1}{m}\right) = \frac{1}{c}\left(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3\ldots.\right),$$

wie in (38.).

Dass diese zu $\frac{1}{z}$ *gehörige Stammgrösse die*

Die Reihe für Logarithmen

Eigenschaft der Logarithmen oder Exponenten hat, lässt sich ebenfalls zeigen; denn $\frac{1}{z}$ *ist nichts anders als* $\frac{dz}{du}:z$. *Nun sey* $z = u^n$, *so ist* $\frac{dz}{du} = nu^{n-1}$, *also* $\frac{dz}{du}:z = \frac{nu^{n-1}}{u^n} = \frac{n}{u}$. *Also ist die Stammgrösse zu* $\frac{n}{u}$ *gleich* fu^n, *während sie zugleich offenbar* nfu *ist; denn die Stammgrösse zu* $\frac{1}{u}$ *ist gleich* fu, *also ist die Stammgrösse zu* $n.\frac{1}{u}$, *oder zu* $\frac{n}{u}$, $= nfu$. *Mithin ist* $nfu = f(u^n)$, *oder* $nfz = f(z^n)$, *welches die Eigenschaft der Logarithmen ist. Man sehe auch über die Gleichartigkeit der Logarithmen mit Potenzen den ersten Band der Sammlung mathematischer Aufsätze des Uebersetzers. (Seite 210. Art. 167.)*]

In obiger Rücksicht kann man auch sagen, dass zu einer gegebenen Zahl immer unendlich viele verschiedene Logarithmen gehören, weil eine Wurzel von einem unendlich grossen Exponenten nothwendig unendlich viele verschiedene Werthe hat. [*Und zwar für eine und dieselbe Basis. Denn in den Ausdrücken* $\overset{a}{\log} z = \frac{r}{c}(\sqrt[r]{z} - 1)$ *und* $\overset{a}{\log} z = \frac{r}{c}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)$ *hängt nur c allein von der Basis ab. Da nun* $\sqrt[r]{z}$ *an sich selbst r verschiedene Werthe, also unendlich viele verschiedene Werthe haben kann, wor-*

convergent zu machen.

unter, namentlich, unendlich viele unmögliche Werthe sein können, so gehören zu einer und derselben Zahl nnendlich viele Logarithmen von einer und derselben Basis.]

42.

Die leichteste Art, die obigen Ausdrücke anzuwenden ist, dass man für r eine Potenz der Zahl 2 annimmt, weil man dann nur wiederholt die Quadratwurzel auszuziehen braucht. Auf diese Weise hat Briggs die ersten Logarithmen berechnet. Er hatte bemerkt, dass, wenn man aus einer beliebigen Zahl wiederholt die Quadratwurzel auszieht und, nach einer solchen Wurzelausziehung, bei zwei mal so vielen Decimal-Stellen stehen bleibt, als sich Nullen hinter dem Comma befinden, während vor dem Comma blos nur noch die Einheit ist; dass dann der Decimal-Theil der Wurzel genau die Hälfte des Decimal-Theils der vorhergehenden Wurzel ausmacht, so dass diese Decimal-Theile sich gegen einander verhalten, wie die Logarithmen der Wurzeln selbst. Dieses folgt, wie man sieht, aus den obigen Ausdrücken.

Setzt man also z. B. $r = 2^{60}$, so findet man für

$a = 10$,

$$\sqrt[r]{a} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527\ 03251\ldots,$$

$$\frac{1}{r} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354\ldots,$$

so dass

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt[r]{a} - 1} = \frac{86736173798840354}{199717420812550527} = 0{,}43429\ 44819\ldots$$

Die Reihe für Logarithmen

Aus dieser Zahl ist die oben für c angegebene genommen.

Verlangt man nun z. B. den Logarithmen von 3, so setze man $z = 3$ und ziehe wieder 60 mal die Quadratwurzel aus, so findet man

$$\sqrt[r]{z} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932 \ldots$$

und hieraus

$$\overset{a}{log}\, z = \frac{\sqrt[r]{z} - 1}{\sqrt[r]{a} - 1} = \frac{9528942640745893 2 \ldots\ldots}{19971742081255052 7 \ldots\ldots} =$$
$$= 0{,}47712\ 12547\ 19662 \ldots\ldots$$

43.

Diese Rechnung ist, wie man sieht, wegen der grossen Menge von Wurzelausziehungen sehr mühsam, wenn das Resultat genau sein soll. Sie lässt sich indessen mit Hülfe der obigen Reihen abkürzen und vervollständigen. Denn es ist allemal, was auch z sein mag, hinreichend, wenn man daraus nur so lange die Wurzel zieht, bis man zu einer Zahl $\sqrt[r]{z}$ gelangt, die weiter nichts als die Einheit vor dem Comma hat. Alsdann sind die Potenzen von $\sqrt[r]{z} - 1$ um so kleiner, je höher sie steigen, und man darf immer nur eine gewisse Zahl von Gliedern nehmen, um die Logarithmen auf so viel Decimal-Stellen genau zu haben, als man will. [*Bekanntlich kann man die Logarithmen gegebener Zahlen auf vielerlei Art berechnen und die Rechnung durch mancherlei*

convergent zu machen.

Kunstgriffe abkürzen, besonders dann, wenn man schon die Logarithmen einiger Zahlen kennt und daraus die Logarithmen andrer benachbarter Zahlen finden will. Unter den allgemeinen elementaren Methoden ist diejenige, nach welcher man im Voraus die Potenzen der Basis des Systems mit den Exponenten

1; 2; 3.... 0,1; 0,2; 0,3.... 0,01; 0,02; 0,03.... *u.s.w.*

berechnet, und mit derjenigen Potenz, die zunächst kleiner als die gegebene Zahl ist, von welcher der Logarithme gefunden werden soll, diesen, und so, weiter, die entstehenden Quotienten dividirt und dadurch die Decimal-Stellen des Logarithmen, eine nach der andern, findet, eine der natürlichsten. Zur Berechnung mehrerer, besonders nahe an einander liegender Logarithmen dienen verschiedene, zur Abkürzung dieser Rechnung ersonnene eigenthümliche Formeln. Man findet dergleichen z. B. bei Lacroix (traité du calc. diff. et int. tom. I. S. 40. etc.) bei Garnier, in der Analyse algebrique; im ersten Bande der Annales des math. von Gergonne etc. Ein andrer Fall ist, wenn die Logarithmen aller natürlichen Zahlen, oder, wenn Logarithmen-Tafeln berechnet werden sollen. Dazu ist unstreitig keine Methode geschickter, als die Methode mit höhern Differenzen. Man sehe deshalb die Einleitung zu den Logarithmen-Tafeln von Hobert und Ideler, die Nachricht von den grossen Pronyschen Ta-

ſeln, die beide so berechnet sind, Legendre geometrie, meine Uebersetzung S. 456 etc. Desgleichen findet man über practische Berechnung der Logarithmen, Nützliches in der Einleitung, zu den Tafeln von Callet und in andern Werken.

Im Vorbeigehen will ich noch unter den vielen Reihen, die den Logarithmen einer beliebigen Zahl geben, folgender erwähnen, die weniger bekannt ist, nemlich

$$\log x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2^3}\,\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}{2.3} + \frac{1}{2^5}\,\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^5}{2.4.5} - \frac{1}{2}\,\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^7}{2.4.6.7} \ldots\ldots$$

Sie kann zunächst aus der Reihe, die einen Kreisbogen durch den Sinus ausdrückt, gefunden werden. Setzt man, wie oben Lagrange thut, x^m *statt* x, *so kann man diese Reihe ebenfalls so convergent machen, als man will. Die Reihe hat Aehnlichkeit mit der bekannten Reihe*

$$\log x = x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right) \ldots$$

ist aber, wie man sieht, von derselben verschieden.

Natürliche Logarithmen.

44.

Die Logarithmen, welche die Einheit zum Modul haben, heissen natürliche oder hyperboli-

sche Logarithmen, weil sie die Fläche einer gleichseitigen Hyperbel ausdrücken, wenn die Abscissen auf einer der Asymptoten genommen werden. [*Nemlich die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel auf den Asymptoten ist* $xy = 1$, *folglich ist für die Hyperbel* $y = \frac{1}{x}$. *Nun ist die Fläche jeder Curve unter den Coordinaten gleich der Stammgrösse von y; also ist die Fläche der Hyperbel gleich der Stammgrösse von* $\frac{1}{x}$, *folglich gleich dem Logarithmen von x.*] Diese Logarithmen hat Neper zuerst berechnet. Ihre Basis ist die Zahl *e*. [*Lagrange sagt hier, diese Logarithmen sollen, um sie von den andern zu unterscheiden, durch l bezeichnet werden. Sie sind oben durch* $\overset{e}{\log}$ *bezeichnet worden. Man sehe deshalb die obige Anmerkung.*]

Also hat $\overset{e}{\log} x$ zur ersten Ableitung die Grösse $\frac{1}{x}$ und der allgemeine Ausdruck $x = a^{\overset{e}{\log} x}$ ist für diese Logarithmen $x = e^{\overset{e}{\log} x}$. [*Nemlich, in der Gleichung* $a^y = x$ *ist y der Logarithme der Zahl x für die Basis a; also ist* $x = a^{\overset{a}{\log} x}$], so dass allgemein $a^{\overset{a}{\log} x} = e^{\overset{e}{\log} x}$ [*weil nemlich* $x = a^{\overset{a}{\log} x}$ *und zugleich* $x = e^{\overset{e}{\log} x}$ *ist*]. Da nun aber $a = e^c$

Anwend. der Exponential-Grössen auf

war [33.], so ist $e^{c \overset{e}{log}\, x} = e^{\overset{e}{log}\, x}$ und folglich $c \overset{a}{log}\, x = \overset{e}{log}\, x$. Daraus folgt, dass sich die Logarithmen von einerlei Zahlen, in verschiedenen Systemen, umgekehrt wie die Modul der Systeme verhalten.

Endlich giebt die Gleichung $a = e^c$, $c = \overset{e}{log}\, a$, woraus folgt, dass der Modul c eines logarithmischen Systems, dessen Basis gleich a ist, nichts anders ist, als der natürliche Logarithme der Basis. Man kann also in der Folge, in den Ableitungen von a^x und $\overset{a}{log}\, x$, $\overset{e}{log}\, a$ statt c setzen.

Dieses giebt $a^x \overset{e}{log}\, a$ für die erste Ableitung von a^x und $\frac{1}{x \overset{e}{log}\, a}$ für die erste Ableitung von $\overset{a}{log}\, x$.

In dem Systeme der gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln ist die Basis a gleich der Zahl 10. Der Modul dieses Systems ist also $\overset{e}{log}\, 10$, welches

2,30258 50929 94....

ausmacht.

Anwendung der Exponential-Grössen auf den polynomischen Lehrsatz.

45.

Ehe ich diese Vorlesung schliesse, kann ich nicht umhin, einer sehr einfachen Anwendung des Ausdrucks

den polynomischen Lehrsatz.

$$e^k = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^4}{2.3.4} \ldots\ldots$$

auf die Entwickelung einer beliebigen Potenz einer Grösse, die aus so vielen Gliedern zusammen gesetzt sein kann, als man will, zu gedenken.

Man setze nemlich $k(p+q+r\ldots\ldots)$ statt k, so erhält man

$$\begin{aligned} e^{k(p+q+r\ldots\ldots)} = 1 + & \; k\,(p+q+r\ldots\ldots) \\ & + \frac{k^2}{2}(p+q+r\ldots\ldots)^2 \\ & + \frac{k^3}{2.3}(p+q+r\ldots\ldots)^3 \ldots\ldots \end{aligned}$$

Das Glied, welches k^m enthält, ist also

$$\frac{(p+q+r\ldots\ldots)^m}{1.2.3\ldots\ldots m}.$$

Auf der andern Seite ist

$$\begin{aligned} e^{k(p+q+r\ldots\ldots)} &= e^{kp}.e^{kq}.e^{kr}\ldots\ldots \\ &= \left(1+kp+\frac{k^2}{2}p^2+\frac{k^3}{2.3}p^3\ldots\ldots\right) \\ &\times \left(1+kq+\frac{k^2}{2}q^2+\frac{k^3}{2.3}q^3\ldots\ldots\right) \\ &\times \left(1+kr+\frac{k^2}{2}r^2+\frac{k^3}{2.3}q^3\ldots\ldots\right)\ldots\ldots, \end{aligned}$$

folglich ist der Coefficient zu k^m, in der Entwickelung dieser verschiedenen Producte, multiplicirt mit $1.2.3\ldots m$, gleich dem Werthe von $(p+q+r\ldots\ldots)^m$. [*Denn dieser Coefficient war, wie vorhin gezeigt worden,*

$$= \frac{(p+q+r\ldots\ldots)^m}{1.2.3\ldots\ldots m}.]$$

Nun ist klar, dass dieser Coefficient aus so vielen Gliedern von der Form

$$\frac{p^{\lambda}.q^{\mu}.r^{\nu}\ldots.}{1.2.3\ldots.\lambda \times 1.2.3\ldots.\mu \times 1.2.3\ldots.\nu\ldots.}$$

zusammengesetzt sein muss, als Gleichungen

$$\lambda + \mu + \nu \ldots. = m$$

möglich sind, wenn man für λ, μ, ν.... ganze positive Zahlen nimmt. Die Potenz $(p + q + r\ldots.)^m$ ist also aus eben einer solchen Zahl von Gliedern von der Form

$$\frac{1.2.3\ldots.m.p^{\lambda}.q^{\mu}.r^{\nu}\ldots.}{1.2.3\ldots.\lambda \times 1.2.3\ldots.\mu \times 1.2.3\ldots.\nu\ldots.}$$

zusammengesetzt, welches mit dem, was die Combinations-Theorie giebt, übereinstimmt. [*Diese Anwendung auf den viel behandelten sogenannten polynomischen Lehrsatz ist sehr merkwürdig. Sie zeigt, dass auch die gewöhnliche Analysis das Resultat mit grosser Leichtigkeit giebt.*]

Fünfte

Fünfte Vorlesung.

Ableitungen der Sinus und Cosinus nach den Bogen und der Bogen nach den Sinus und Cosinus, und Entwickelung dieser Grössen in Reihen.

Ableitungen der Sinus und Cosinus.

46.

Winkel kommen in der Analysis nur mit ihren Sinus und Cosinus vor, die man durch *sin* und *cos*, vor die Zeichen der Winkel gesetzt, bezeichnet. [*Unter Winkel wird immer das Maas desselben nemlich der dazu gehörige Kreisbogen, und zwar in der Regel für den Halbmesser 1 verstanden.*] Man hat also die beiden Winkel-Functionen $\sin x$ und $\cos x$ deren allgemeine, aus der Natur des Kreises genommene Eigenschaften darin bestehen, dass für zwei beliebige Winkel x und y,

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \text{ und}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

ist.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Ableitungen der

[*Wenn man diese Gleichungen aus der Natur des Kreises nimmt, so begründet man diesen Theil des Calculs auf die Geometrie, welches nicht ganz consequent zu sein scheint. Denn streng genommen ist der Calcul allein reine Mathematik. Er allein ist blosse Vernunftwissenschaft, oder eine Zusammensetzung von reinen Vernunftschlüssen, ohne alle Anschauung. Die Geometrie hat ihre eigenthümlichen, von Gegenständen der Anschauung hergenommenen Sätze und ist schon eine Verbindung derselben mit den abstracten Schlüssen des Calculs, so wie, weiter, die Mechanik, welche wieder ihre eigenthümlichen Begriffe von Kraft und Geschwindigkeit hat, eine Verbindung derselben mit den Sätzen der Geometrie und des Calculs, also mit den eigenthümlichen Sätzen jener und den reinen Schlüssen des Calculs ist.*

Die Geometrie folgt also erst auf den Calcul, und Alles was der Anschauung bedarf, gehört nicht zum Calcul.

Kommen daher irgendwo im Calcul geometrische Sätze vor, so kommt das Zusammengesetzte früher vor als das Einfache und Fremdartiges wird vermengt mit dem Eigenthümlichen, welches einer guten Ordnung zuwider zu sein scheint. Es ist daher zu wünschen, dass man den Calcul von allen geometrischen, mechanischen und andern fremdartigen Sätzen reinige und nichts von der Art darin dulde, wie das Geometrische ist, ungefähr so, wie man in der Geometrie mit Recht

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Sinus und Cosinus.

darauf hält, dass darin keine Begriffe von Bewegung gebraucht werden.

Allerdings macht dieses in dem obigen Falle Schwierigkeiten. Allein es scheint möglich, namentlich die obigen Gleichungen rein analytisch aufzustellen, wenn man, wie folgt, verfährt.

I. Man verlange nemlich z. B. die Eigenschaften zweier durch f und φ bezeichneten Functionen, welche die Eigenschaft haben, dass allgemein, für jeden beliebigen Werth der veränderlichen Grössen x und y, wenn r eine Constante bedeutet,

$$1.\quad r\varphi(x-y) = \varphi x\varphi y + fxfy$$

ist. Mehr ist für die Analysis nicht nöthig.

Man setze $x = y$, so erhält man

$$2.\quad r\varphi 0 = \varphi x^2 + fx^2$$

und, weil $\varphi 0$ nur eine Constante a sein kann,

$$3.\quad ra = \varphi x^2 + fx^2.$$

Ferner setze man in (1.) $y = 0$, so ist, weil φy, für $y = 0$, gleich a war,

$$4.\quad r\varphi x = a\varphi x + fxf0$$

und wenn man $f0$, welches wieder nothwendig eine Constante ist, b nennt, $r\varphi x = a\varphi x + bfx$, oder $(r-a)\varphi x = bfx$, oder

$$5.\quad \frac{r-a}{b} = \frac{fx}{\varphi x}.$$

Ableitungen der

Dieses ist nur möglich, wenn entweder $fx = m\varphi x$ *ist, wo* m *eine Constante ist, oder, wenn* $r - a = 0$ *und* $b = 0$ *ist, weil Veränderliches nicht Constantem gleich sein kann und also entweder* $\frac{fx}{\varphi x} = \frac{r-a}{b}$, *für jedes* x, *gleich* m, *oder gleich einer beständigen Grösse, oder* $\frac{r-a}{b}$ *für jeden Werth der Grössen* r, a *und* b *gleich* $\frac{0}{0}$, *das heisst, gleich einer unbestimmten, oder veränderlichen Grösse gleich sein muss.*

Die Voraussetzung $fx = m\varphi x$ *findet nicht Statt; denn sie giebt, auf die Gleichung* (3.) *angewendet,* $ra = \varphi x(1 + m^2)$, *oder* $\varphi x = \frac{ra}{1+m^2}$, *welches unmöglich ist, weil weder* φx, *für jedes* x, *einer constanten Grösse* $\frac{ra}{1+m^2}$, *noch diese, für jedes* r, a *und* m, *gleich* $\frac{0}{0}$ *sein kann. Es bleibt also nur übrig, dass* $\frac{r-a}{b} = \frac{0}{0}$ *ist. Folglich ist nothwendig* $r - a = 0$ *und* $b = 0$, *oder*

$$6.\quad r = a = \varphi 0 \text{ und } b = f0 = 0,$$

folglich in (3.)

$$7.\quad \varphi x^2 + fx^2 = r^2,$$

wo r *willkürlich ist, und also, nach Belieben, auch* $= 1$ *gesetzt werden kann.*

Sinus nnd Cosinus.

II. Man setze weiter, in (1.) $x-y$ statt y, so erhält man $r\varphi y=\varphi x\varphi(x-y)+fxf(x-y)$, oder, wenn man mit r multiplicirt, $r^2\varphi y= r\varphi x\varphi(x-y)+rfxf(x-y)$, oder, weil $r\varphi(x-y) =\varphi x\varphi y+fxfy$ ist, (1.) $r^2\varphi y=\varphi x^2\varphi y+\varphi xfxfy +rfxf(x-y)$, oder $(r^2-\varphi x^2)\varphi y=\varphi xfxfy +rfxf(x-y)$, also, weil $r^2-\varphi x^2=fx^2$ ist (7.) $fx^2\varphi y=\varphi xfxfy+rfxf(x-y)$, folglich

$$8.\quad rf(x-y)=fx\varphi y-\varphi xfy.$$

III. Man setze in (1.) $x=0$, so erhält man $r\varphi(-y)=\varphi 0\,\varphi y+f0fy$, oder, weil $\varphi 0=r$ und $f0=0$ ist (6.), $r\varphi(-y)=r\varphi y$, oder

$$9.\quad \varphi(-y)=\varphi y.$$

Diese Gleichung folgt auch aus (1.), wenn man x und y verwechselt. Denn dadurch verändert $\varphi x\varphi y +fxfy$ seinen Werth nicht, hingegen $x-y$ wechselt das Zeichen. Also ist $r\varphi(x-y)=r\varphi-(x-y)$, oder, allgemein, $\varphi(-y)=\varphi y$, wie vorhin.

IV. Man setze in (8.) $x=0$, so erhält man $rf(-y)=f0\,\varphi y-\varphi 0fy$, oder, weil $\varphi 0=r$ und $f0=0$ ist (6.) $rf(-y)=-rfy$, oder

$$10.\quad f(-y)=-fy.$$

Diese Gleichung (10.) folgt wieder auch aus (8.), wenn man x und y verwechselt. Dann nemlich ist $fx\varphi y$ negativ und φxfy positiv und $x-y$ wechselt das Zeichen, also ist $rf(x-y)=-rf-(x-y)$, oder, allgemein, $f(-y)=-fy$, wie vorhin.

Ableitungen der

V. Man setze in (1.) $-y$ *statt* y, *so erhält man* $r\varphi(x+y) = \varphi x \varphi(-y) + fxf(-y)$, *also, weil* $\varphi(-y) = \varphi y$ (9.) *und* $f(-y) = -fy$ *ist* (10.),

$$11. \quad r\varphi(x+y) = \varphi x \varphi y - fxfy.$$

VI. Man setze in (8.) $-y$ *statt* y, *so erhält man* $rf(x+y) = fx\varphi(-y) - \varphi xf(-y)$, *also, weil* $\varphi(-y) = \varphi y$ (9.) *und* $f(-y) = -fy$ *ist*, (10.)

$$12. \quad rf(x+y) = fx\varphi y + \varphi xfy.$$

VII. Derjenige Werth von fx, *für welchen* $fx = r$ *ist, werde durch* $\frac{1}{2}\pi$ *bezeichnet, so dass* $f(\frac{1}{2}\pi) = r$ *ist, so ist, vermöge* (10.) $f(-\frac{1}{2}\pi) = -r$ *und, vermöge* (7.) $\varphi(\pm\frac{1}{2}\pi) = 0$, *weil, allgemein, für jedes* x, $fx^2 + \varphi x^2 = r^2$, *also auch* $f(\pm\frac{1}{2}\pi)^2 + \varphi(\pm\frac{1}{2}\pi)^2 = r^2$, *oder* $r^2 + \varphi(\pm\frac{1}{2}\pi)^2 = r^2$ *ist. Also ist*

$$13. \quad f(\pm\tfrac{1}{2}\pi) = \pm r \text{ und } \varphi(\pm\tfrac{1}{3}\pi) = 0.$$

Dieses giebt, wenn man, in (11.) $x = y = \pm\frac{1}{2}\pi$ *setzt*, $r\varphi(\pm\pi) = -r^2$, *also* $\varphi(\pm\pi) = -r$ *und das zugehörige* $f(\pm\pi) = 0$, *wegen* (7.). *Ferner, wenn man in* (11.) $x = y = \pi$ *setzt*, $r\varphi(\pm 2\pi) = r^2$, *also* $\varphi(\pm 2\pi) = r$ *und das zugehörige* $f(\pm 2\pi) = 0$. *Setzt man in* (11.) $x = \pm 2\pi$, $y = \pm\pi$, *so erhält man* $r\varphi(\pm 3\pi) = -r^2$, *also* $\varphi(\pm 3\pi) = -r$ *und das zugehörige* $f(\pm 3\pi) = 0$. *Fährt man so fort, so findet man, dass für alle grade Zahlen, die durch* $2n$ *bezeichnet werden*

Sinus und Cosinus.

können, wo alsdann n jede beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$14.\quad \varphi(\pm 2n\pi) = r,$$

nnd für jede ungrade Zahl $2n+1$,

$$15.\quad \varphi(\pm(2n+1)\pi) = -r,$$

desgleichen für jede grade und ungrade Zahl n,

$$16.\quad f(\pm n\pi) = 0$$

ist.

Nun setze man ferner in (11 *und* 1) $x = \pm n\pi$ $y = \frac{1}{2}\pi$, *so erhält man, wegen* $\varphi(\pm\frac{1}{2}\pi) = 0$ (13.) *und* $f(\pm n\pi) = 0$ (16.) $\varphi(\pm n\pi \pm \frac{1}{2}\pi)$, *oder*

$$17.\quad \varphi\left(\pm \frac{2n \pm 1}{2}\pi\right) = 0.$$

Man setze in (8 *und* 13.) *erstlich* $x = \pm 2n\pi$ *und* $y = \frac{1}{2}\pi$, *so erhält man, vermöge* (14 *und* 13.) $rf(\pm 2n\pi - \frac{1}{2}\pi) = 0 - r.r = -r^2$ *und* $rf(\pm 2n\pi + \frac{1}{2}\pi) = 0 + r.r = r^2$, *also*

$$18.\quad f\frac{\pm 4n \pm 1}{2}\pi = \pm r.$$

Man setze in (8 *und* 13.) *zweitens,* $x = \pm(2n+1)\pi$ *und* $y = \frac{1}{2}\pi$, *so erhält man, vermöge* (15 *und* 13.) $rf(\pm(2n+1)\pi - \frac{1}{2}\pi) = 0 - r.-r = r^2$ *und* $rf(\pm(2n+1)\pi + \frac{1}{2}\pi) = 0 + r.-r = -r^2$, *also*

Ableitungen der

$$19.\quad f\left(\frac{\pm 4n \pm 3}{2}\pi\right) = \pm r.$$

Ferner setze man in (1.) $x = 2n\pi$ *und* $y = \pm x$, *so erhält man* $r\varphi(2n\pi \pm x) = r\varphi x \pm 0$, *also* $\varphi(2n\pi \pm x) = \varphi x$ *und, vermöge* (9.)

$$20.\quad \varphi(\pm(2n\pi \pm x)) = \varphi x.$$

Man setze in (13.) $x = \pm 2n\pi$ *und* $y = x$, *so erhält man* $rf(\pm 2n\pi + x) = 0 + rfx$, *also*

$$21.\quad f(\pm 2n\pi + x) = fx.$$

Man setze endlich in (8.) $x = \pm(2n+1)\pi$ *und* $y = x$, *so erhält man* $rf(\pm(2n+1)\pi - x) = 0 + rfx$, *also*

$$22.\quad f(\pm(2n+1)\pi - x) = fx.$$

VIII. Alle diese Ansdrücke folgen, wie man sieht, ganz allein, ohne alle weitere Bedingungen, oder fremde Sätze, aus der vorausgesetzten Gleichung Nr. 1. Findet also diese Gleichung Nr. 1. Statt, so finden auch alle übrige Gleichungen Statt, für jeden beliebigen Werth von x und y.

IX. Nun kann man diesen, rein analytisch gefundenen und ausgedrückten Gleichungen, beliebig, wenn man will, eine geometrische Bedeutung geben. Man kann nemlich z. B. irgend eine Curve in der Ebene annehmen und die Länge ihrer Bogen, von einem bestimmten Puncte ab gerechnet, durch x, y etc., die zugehörigen Ordinaten der veränderlichen Erdpuncte der Bogen, für

irgend eine Axe, durch fx, fy die Abscissen, rechtwinklich darauf, durch φx, φy bezeichnen. So lange Nichts für die Abhängigkeits-Form f und φ der Coordinaten von der Länge der Bogen festgesetzt, das heisst, so lange keine Gleichung zwischen fx, fy φx, φy gegeben ist, ist die Curve gänzlich unbestimmt. Sobald dagegen eine solche Gleichung vorgeschrieben ist, muss die Curve, um derselben zu genügen, eine bestimmte Gestalt haben. Man setze nun, die angenommene Curve sei von der Art, dass für jedes beliebige x und y die oben vorausgesetzte Gleichung Nr. 1.,

$$\varphi(x+y) = \varphi x \varphi y + fx fy$$

Statt findet, so entsprechen dieser Curve sogleich alle übrigen, oben gefundenen Ausdrücke, weil dieselben, ohne alle weitere Bedingung, aus der Gleichung Nr. 1. folgen. Es würde also nur darauf ankommen, die Gleichung dieser Curve zwischen ihren Coordinaten zu finden. Unter den oben gefundenen Ausdrücken giebt derjenige Nr. 7. diese Gleichung zwischen den Coordinaten fx und φx, für jeden beliebigen Punct der Curve, unmittelbar. Diese Gleichung ist

$$fx^2 + \varphi x^2 = r^2.$$

Sie zeigt, dass die, durch die vorausgesetzte Gleichung Nr. 1. bestimmte, Curve die Eigenschaft hat, dass die Summe der Quadrate der Abscisse

Ableitungen der

und Ordinate überall dem Quadrate einer constanten Grösse r gleich ist. Diese Eigenschaft ist diejenige eines **Kreises**, *dessen Halbmesser gleich r ist, wenn die Abscissen, auf irgend einen Durchmesser, aus dem Mittel-Puncte genommen werden. Also ist die durch die Gleichung Nr. 1. bestimmte Curve,* **unter der Bedingung, dass x und y Bogenlängen bedeuten**, *ein* **Kreis**. *Alle oben gefundenen Ausdrücke entsprechen folglich* **dem Kreise**. *Sie sind, wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, die Abscissen des Kreises aus dem Mittel-Puncte, durch den Bogen ausgedrückt, durch* $\cos x$, *die Ordinaten durch* $\sin x$ *bezeichnet, folgende (nemlich in so fern man diejenigen aushebt, welche eigentliche Resultate sind, und zwar in der allgemeinsten Gestalt)*

$$r \cos(x \mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y \quad (1 \text{ und } 11.)$$

$$\cos 0x = r,\ \sin 0x = 0 \quad (6.)$$

$$\cos x^2 + \sin x^2 = r^2 \quad (7.)$$

$$r \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (8 \text{ und } 13.)$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad (9.)$$

$$\sin(-x) = -\sin x \quad (10.)$$

$$\varphi(\pm 2n\pi) = r \ (14.) \text{ wenn } (f \tfrac{1}{2}\pi) = r$$

$$\varphi(\pm(2n+1)\pi) = -r \quad (15.)$$

$$\varphi\left(\pm \frac{2n+1}{2}\pi\right) = 0 \quad (17.)$$

$$f(\pm n\pi) = 0 \quad (16.)$$

$$f\left(\pm \frac{4n \pm 1}{2}\pi\right) = \pm r \quad (18.)$$

Sinus und Cosinus.

$$f\left(\pm\frac{4n\pm3}{2}\pi\right)=\pm r \quad (19.)$$

$$\varphi(\pm(2n\pi\pm x))=\varphi x \quad (20.)$$

$$f(\pm 2n\pi + x)=fx \quad (21.)$$

$$f(\pm(2n+1)\pi - x)=fx \quad (22.)$$

Dieses ist, wie man sieht, eine vollständige Sammlung der bekannten Formeln für die Sinus und Cosinus und die analytischen Resultate stimmen mit den sonst gewöhnlichen, aus der Figur genommenen, genau. Die Figur ist aber zu allen diesen Ausdrücken keinesweges nöthig und die Ausdrücke bestehen rein analytisch, wenn man auch den Grössen x und y die willkürliche Bedeutung von Bogen einer Curve nicht beilegt; ja die analytischen Formeln sind, wie sich zeigen lässt, noch allgemeiner, als die geometrischen. Letztere sind von jenen nur besondere Fälle, die dadurch particularisirt werden, dass man grade x und y Bogen-Längen einer Curve bedeuten lässt. Das Ganze ist lediglich ein Gegenstand und reines Eigenthum des Calculs.]

47.

Um nun die Ableitungen von $\sin x$ und $\cos x$ zu finden, darf man nur darin $x+k$ statt x setzen und die Functionen $\sin(x+k)$ und $\cos(x+k)$ nach den Potenzen von k entwickeln. Die Coefficienten zu k in diesen Entwickelungen sind die gesuchten Ableitungen.

Ableitungen der

Vermöge der obigen Ausdrücke ist

$$\sin(x+k) = \sin x \cos k + \cos x \sin k$$
$$\cos(x+k) = \cos x \cos k - \sin x \sin k.$$

Es kommt also nur darauf an, die Grössen $\sin k$ und $\cos k$ in Reihen zu entwickeln.

Ich bemerke zunächst, dass die Entwickelung von $\sin k$, wie sie auch beschaffen sein mag, von der Form

$$\sin k = Ak^m + Bk^n \ldots.$$

sein muss, wo $m, n \ldots.$ positive Zahlen [*nicht nothwendig ganze Zahlen*] sind, welche zunehmen. Denn, da der Sinus mit dem Bogen zugleich Null ist, so kann sein Ausdruck in Potenzen des Bogens, keine negative Potenzen desselben enthalten.

Nun erhält man, wenn man [*in* $\sin(x+k) = \sin x \cos k + \cos x \sin k$] $k = x$ setzt,

$$\sin(2k) = 2 \sin k \cos k = 2 \sin k \sqrt{(1 - \sin k^2)}.$$

Wenn aber $\sin k = Ak^m + Bk^n \ldots.$ ist, so ist

$$\sin(2k) = 2^m Ak^m + 2^n Bk^n \ldots.$$

[*nemlich, wenn man, auch rechterhand,* $2k$ *statt* k *setzt*]. Auf der andern Seite ist [$\sin k^2 = (Ak^m + Bk^n \ldots.)^2$, *oder*]

$$\sin k^2 = A^2 k^{2m} + 2ABk^{m+n} \ldots.$$

also [$\sqrt{(1 - \sin k^2)} = \sqrt{(1 - A^2 k^{2m} + 2ABk^{m+n} \ldots.)}$ *und wenn man einen Augenblick* $A^2 k^{2m} + 2ABk^{m+n} \ldots = P$ *setzt* $\sqrt{(1 - \sin k^2)} = \sqrt{(1 - P)} = 1 - \frac{1}{2} P + \frac{1}{8} P^2 \ldots.$, *nach dem binomischen Lehrsatze;*

Sinus und Cosinus.

also $\sqrt{(1 - \sin k^2)} = 1 - \frac{1}{2}(A^2 k^{2m} + 2ABk^{m+n} \ldots)$
oder]

$$\sqrt{(1 - \sin k^2)} = 1 - \tfrac{1}{2} A^2 k^{2m} - ABk^{m+n} - \ldots,$$

folglich, [*wenn man mit* $2 \sin k = 2Ak^m + 2Bk^m \ldots$ *multiplicirt,*]

$$2 \sin k \sqrt{(1 - k^2)} = 2Ak^m + 2Bk^n \ldots$$
$$- A^3 k^{3m} - 2A^2 Bk^{2m+n} \ldots$$
$$\ldots\ldots$$

Diese Reihe muss mit

$$2^m Ak^m + 2^n Bk^n \ldots,$$

welche den Werth von $\sin 2k$ ausdrückt, übereinstimmen. Vergleicht man also die ersten Glieder in beiden Reihen, welche die nemliche Potenz k^m von k enthalten, so findet man

$$2A = 2^m A,$$

also

$$m = 1.$$

Dieses beweiset, dass das erste Glied der Entwickelung von $\sin k$ nothwendig Ak ist. Folglich sind die beiden ersten Glieder der Reihe für $\cos k$, $1 - \frac{A^2 k^2}{2}$, [*denn es war* $\cos k = \sqrt{(1 - \sin k^2)} = 1 - \frac{1}{2} A^2 k^{2m} \ldots$] Substituirt man Dieses [*nemlich* $Ak \ldots$ *statt* $\sin k$ *und* $1 - \frac{A^2 k^2}{2} \ldots$ *statt* $\cos k$] in die obigen Ausdrücke für $\sin(x + k)$ und $\cos(x + k)$

Ableitungen der

und bleibt bei der ersten Potenz von k stehen, so erhält man [$\sin(x+k) = \sin x\left(1 - \frac{A^2k^2}{2} \ldots\right) + \cos x (Ak \ldots)$ *und* $\cos(x+k) = \cos\left(1 - \frac{A^2k^2}{2} \ldots\right) - \sin x (Ak \ldots)$, *oder*]

$$\sin(x+k) = \sin x + kA \cos x \ldots \text{ und}$$

$$\cos(x+k) = \cos x - kA \sin x \ldots;$$

folglich ist die erste Ableitung von $\sin x$, $A \cos x$ und von $\cos x$, $-A \sin x$.

Der Coefficient A ist noch eine unbestimmte Constante, die wir nachher aus der Natur des Kreises finden werden.

[*Diese Resultate kann man wieder auch durch die beiden, bei den Ableitungen der Exponential-Grössen und Logarithmen angewendeten Verfahren, kürzer finden.*

I. Es ist nemlich, allgemein,

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{f(x+k) - fx}{k}, \text{ für } k = 0.$$

Dieses giebt für den einen der gegenwärtigen Fälle, wenn man nemlich $fx = \sin x$ *setzt, weil* $f(x+k) = \sin x \cos k + \cos x \sin k$ *ist,*

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{\sin x \cos k + \cos x \sin k - \sin x}{k} \text{ für } k = 0,$$

oder

Sinus und Cosinus.

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{\sin x (\cos k - 1) + \cos x \sin k}{k} \text{ für } k = 0.$$

Nun ist $1 - \cos k = 1 - (\cos \tfrac{1}{2} k^2 - \sin \tfrac{1}{2} k^2) = 2 \sin \tfrac{1}{2} k^2$ *und* $\sin k = 2 \sin \tfrac{1}{2} k \cos \tfrac{1}{2} k$, *also*

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{2 \cos x \sin \frac{1}{2} k \cos \frac{1}{2} k - 2 \sin x \sin \frac{1}{2} k^2}{k} \text{ für } k = 0,$$

oder

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} k (\cos x \cos \frac{1}{2} k - \sin x \sin \frac{1}{2} k)}{k} \text{ für } k = 0.$$

Da nun $\sin \tfrac{1}{2} k = 0$ *und* $\cos \tfrac{1}{2} k = 1$ *ist für* $k = 0$, *und folglich, in dem Factor* $\cos x \cos \tfrac{1}{2} k - \sin x \sin \tfrac{1}{2} k$, *das Glied* $\sin x \sin \tfrac{1}{2} k$ *gegen das Glied* $\cos x \cos \tfrac{1}{2} k$ *wegfällt, so ist*

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} k \cos x \cos \frac{1}{2} k}{k} \text{ für } k = 0,$$

oder, weil $2 \sin \tfrac{1}{2} k \cos \tfrac{1}{2} k = \sin k$ *ist,*

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{\sin k}{k} \cdot \cos x \text{ für } k = 0.$$

Ferner ist allgemein $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$; *also, wenn man von dieser Gleichung die erste abgeleitete nimmt,*

$$2 \sin x \frac{d \sin x}{dx} + 2 \cos x \frac{d \cos x}{dx} = 0$$

und, wenn man das eben gefundene $d \sin x = \frac{\sin k}{k} \cos x$ *substituirt,*

Ableitungen der

$$\sin x \cos x \frac{\sin k}{k} + \cos x \frac{d \cos x}{dx} = 0,$$

woraus folgt,

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\frac{\sin k}{k} \sin x \text{ für } k = 0.$$

Bezeichnet man den noch unbekannten constanten Werth der Grösse $\frac{\sin k}{k}$, *für* $k = 0$, *durch* A, *so erhält man, wie oben,*

$$\frac{d \sin x}{dx} = A \cos x \text{ und } \frac{d \cos x}{dx} = -A \sin x.$$

II. Durch das andre obige allgemeine Verfahren findet man, aus der (in 46. Anmerkung) vorausgesetzten Grundformel

$$\varphi(x-y) = \varphi x \varphi y + fx fy$$

und der davon abgeleiteten analogen Formel

$$\varphi(x+y) = \varphi x \varphi y - fx fy$$

die Ableitungen von $\sin x$ *und* $\cos x$, *wie folgt.*

Man setze in die erste Gleichung $x+k$ *statt* x, *und* $y+k$ *statt* y, *so erhält man, weil* $\varphi(x+k-(y+k)) = \varphi(x-y)$ *ist*,

$$\varphi x \varphi y + fx fy = \left(\varphi x + \frac{kd\varphi x}{dx} \ldots\right)\left(\varphi y + \frac{kd\varphi y}{dx} \ldots\right)$$
$$+ \left(fx + \frac{kdfx}{dx} \ldots\right)\left(fy + \frac{kdfy}{dx} \ldots\right)$$
$$= \varphi x \varphi y + fx fy$$
$$+ k\left(\varphi y \frac{d\varphi x}{dx} + \varphi x \frac{d\varphi y}{dx} + fy \frac{dfx}{dx} + fx \frac{dfy}{dy}\right) \ldots,$$

also,

Sinus und Cosinus.

also, da die Coefficienten aller Potenzen von k gleich Null sein müssen,

$$\varphi y \frac{d\varphi x}{dx} + \varphi x \frac{d\varphi y}{dy} + fy \frac{dfx}{dx} + fx \frac{dfy}{dy} = 0.$$

Man setze in die zweite Gleichung $x + k$ *statt* x, *und* $y - k$ *statt* y, *so ist, weil* $\varphi(x + k + (y - k))$ $= \varphi(x + y)$ *ist,*

$$\varphi x \varphi y - fx fy = \left(\varphi x + k \frac{d\varphi x}{dx} \ldots\right)\left(\varphi y - k \frac{d\varphi y}{dx} \ldots\right)$$
$$- \left(fx + k \frac{dfx}{dx} \ldots\right)\left(fy - k \frac{dfy}{dx} \ldots\right)$$
$$= \varphi x \varphi y - fx fy$$
$$+ k\left(\varphi y \frac{d\varphi x}{dx} - \varphi x \frac{d\varphi y}{dy} + fx \frac{dfy}{dy} - fy \frac{dfx}{dx}\right) \ldots,$$

also, da wieder die Coefficienten zu allen Potenzen von k Null gleich sein müssen,

$$\varphi y \frac{d\varphi x}{dx} - \varphi x \frac{d\varphi y}{dy} + fx \frac{dfy}{dy} - fy \frac{dfx}{dx} = 0.$$

Man addire und substrahire diese Gleichung von der vorhin gefundenen, so erhält man

$$\varphi y \frac{d\varphi x}{dx} + fx \frac{dfy}{dy} = 0 \text{ und}$$
$$\varphi x \frac{d\varphi y}{dy} + fy \frac{dfx}{dx} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{dfy}{dy} : \varphi y = - \frac{d\varphi x}{dx} : fx \text{ und}$$
$$\frac{dfx}{dx} : \varphi x = - \frac{d\varphi y}{dx} : fy.$$

Diese Gleichungen können nicht anders Statt finden, als wenn z. B. $\frac{dfy}{dy} : \varphi y$ *eine Constante ist. Denn, da y nicht von x abhängt, so würde sich* $\frac{dfy}{dy} : \varphi y$, *wenn es einen veränderlichen, von y abhängenden Werth hätte, verändern können, während x, und folglich* $\frac{d\varphi x}{dx} : fx$ *unverändert das Nemliche bleibt, welches der Gleichung widerspricht. Also muss*

$$\frac{dfy}{dy} : \varphi y = Const. = A = \frac{dfx}{dx} : \varphi x$$

und folglich auch

$$-\frac{d\varphi x}{dx} : fx = A = -\frac{d\varphi y}{dy} : fy$$

sein. Daraus folgt

$$\frac{dfx}{dx} = A\varphi x \text{ und } \frac{d\varphi x}{dx} = -Afx,$$

oder

$$\frac{d \sin x}{dx} = A \cos x \text{ und } \frac{d \cos x}{dx} = -A \sin x;$$

wie oben.]

Entwickelung der Reihen für Sinus und Cosinus.

48.

Da nunmehr die beiden ersten Ableitungen [*von* $\sin x$ *und* $\cos x$] bekannt sind, so kann man, weiter,

Sinus und Cosinus.

die übrigen Ableitungen finden. Da nemlich die erste Ableitung von $\sin x$, $A\cos x$ [*und die erste Ableitung von* $\cos x$, $-A\sin x$] ist, so ist die zweite Ableitung von $\sin x$, $-A^2 \sin x$, die dritte, $-A^3 \cos x$ u. s. w. Also ist allgemein, für $fx = \sin x$,

$$\frac{dfx}{dx} = A\cos x,\ \frac{d^2fx}{dx^2} = -A^2\sin x,\ \frac{d^3fx}{dx^3} = -A^3\cos x \quad \text{etc.}$$

Substituirt man Dieses in die allgemeine Reihe für $f(x+k)$, so erhält man

$$\sin(x+k) = \sin x + Ak\cos x - \frac{A^2k^2}{2}\sin k - \frac{A^3k^3}{2\cdot 3}\cos x + \frac{A^4k^4}{2\cdot 3\cdot 4}\sin x \ldots.$$

Man erhält eben so

$$fx = \cos x,\ \frac{dfx}{dx} = -A\sin x,\ \frac{d^2fx}{dx^2} = -A^2\cos x,$$
$$\frac{d^3fx}{dx^3} = A^3\sin x,\ \frac{d^4fx}{dx^4} = A^4\cos x \quad \text{etc.}$$

welches, wenn man substituirt,

$$\cos(x+k) = \cos x - Ak\sin x - \frac{A^2k^2}{2}\cos x + \frac{A^3k^3}{2.3}\sin x + \frac{A^4k^4}{2.3.4}\cos x \ldots$$

giebt.

Man setze, der Kürze wegen,

$$Ak - \frac{A^3k^3}{2.3} + \frac{A^5k^5}{2.3.4.5} \ldots = P$$

$$1 - \frac{A^2k^2}{2} + \frac{A^4k^4}{2.3.4} - \frac{A^6k^6}{2.3.4.5.6} \ldots = Q,$$

Entwickelung der Reihen für

so geben die obigen Ausdrücke für $\sin(x+k)$ und $\cos(x+k)$:

$$\sin(x+k) = Q \sin x + P \cos x \text{ und}$$
$$\cos(x+k) = Q \cos x - P \sin x.$$

hieraus folgt, vermöge der bekannten Ausdrücke,

[$\sin(x+k) = \cos k \sin x + \sin k \cos x$ *und*
$\cos(x+k) = \cos k \cos x - \sin k \sin x$;

$$\cos k \sin x + \sin k \cos x = Q \sin x + P \cos x \text{ und}$$
$$\cos k \cos x - \sin k \sin x = Q \cos x - P \sin x;$$

also, wenn man die erste Gleichung mit $\cos x$, *die zweyte mit* $\sin x$ *multiplicirt, und die Producte von einander abzieht,*

$$\sin k (\cos x^2 + \sin x^2) = P (\cos x^2 + \sin x^2),$$

oder

$$\sin k = P$$

und, wenn man die erste Gleichung mit $\sin x$, *die zweite mit* $\cos x$ *multiplicirt, und die Producte zusammenrechnet,*

$$\cos x (\sin x^2 + \cos x^2) = Q (\sin x^2 + \cos x^2),$$

oder

$$\cos k = Q,$$

also]

$$\sin k = kA - \frac{k^3 A^3}{2 \cdot 3} - \frac{k^5 A^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \ldots$$

$$\cos k = 1 - \frac{k^2 A^2}{2} + \frac{k^4 A^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{k^6 A^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \ldots$$

Es scheint, dass man diese Reihen aus den obigen für $\sin(x+k)$ und $\cos(x+k)$ unmittelbat hätte

Sinus und Cosinus.

ableiten können, wenn man $x = o$ setzte; wir wollten aber auch hier, wie wir es oben thaten, die Schwierigkeiten vermeiden, die daraus entstehen können, dass die Entwickelung von $f(x+k)$ allgemein nur so lange richtig ist, als man x keinen besondern Werth beilegt. [*Etwas Unrichtiges kann wohl eine richtige allgemeine Entwickelung nie geben; ob sie etwas* U n b e s t i m m t e s *giebt, zeigt sich von selbst.*

Will man sogleich die vollständigen Reihen für φx und fx ohne die Ableitungs-Operation entwickeln, so darf man nur wieder von der, in der Anmerkung zu (46.) *vorausgesetzten Grundformel*

$$\varphi(x-y) = \varphi x\,\varphi y - fx\,fy$$

ausgehen. Am leichtesten ist es, nicht sowohl diese Formel selbst, als die beiden daraus folgenden Ausdrücke (Nr. 7 und 11. Anmerk. zu 46.) nemlich

$$\varphi x^2 + fx^2 = 1 \text{ und}$$

$$\varphi x^2 - fx^2 = \varphi(2x)$$

zur Entwickelung von φx und fx anzuwenden. Erwägt man, dass, vermöge der Gleichungen (Nr. 9 und 10. Anmerk. zu 46.) $f(-x) = -fx$ und $\varphi(-x) = \varphi x$ ist, so folgt, dass die Reihe für fx keine Potenzen von x mit graden Exponenten, die Reihe für φx keine Potenzen von x mit und graden Exponenten enthalten kann. Ferner muss eine der Grössen φx und fx nothwendig das Glied 1 haben, weil die Summe von φx^2 und

Entwickelung der Reihen für

fx^2 *immer, also auch für* $x = 0, 1$ *ist und eine der Grössen* φx *und* fx *für* $x = 0, = 1$ *vorausgesetzt wird. Man kann also nur setzen*

$$fx = \alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 \ldots \text{ und}$$
$$\varphi x = 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 \ldots$$

Dieses, auf die beiden obigen Gleichungen $\varphi x^2 + fx^2 = 1$ *und* $\varphi x^2 - fx^2 = \varphi(2x)$ *angewendet, giebt*

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2ax^2 + a^2x^4 + 2x^6 \ldots \\ + 2bx^4 + 2abx^6 \ldots \\ + \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x^4 + 2\alpha\gamma x^6 \ldots \\ + \beta^2 x^6 \ldots \end{array}\right\} = 1$$

und

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2ax^2 + a^2x^4 + 2cx^6 \ldots \\ + 2bx^4 + 2abx^6 \ldots \\ - \alpha^2x^2 - 2\alpha\beta x^4 - 2\alpha\gamma x^6 \ldots \\ - \beta^2 x^6 \ldots \end{array}\right\} = \begin{array}{l} 1 + 4ax^2 + 16bx^4 \\ + 64cx^6 \ldots \end{array}$$

woraus folgt

$$\left.\begin{array}{l} 2a + \alpha^2 = 0, \\ 2a - \alpha^2 = 4a, \end{array}\right\} \text{ also } \begin{array}{l} a = a \\ a = -\tfrac{1}{2}\alpha^2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + 2b + 2\alpha\beta = 0, \\ a^2 + 2b + 2\alpha\beta = 16b, \end{array}\right\} \text{ also } \begin{array}{l} 2a^2 + 4b = 16b,\ b = \tfrac{1}{6}a^2 = +\dfrac{\alpha^4}{2.3.4} \\ 4\alpha\beta = -16b,\ \beta = -\dfrac{4b}{\alpha} = -\dfrac{\alpha^3}{2.3} \end{array}$$

u. s. w.

Also ist

Sinus und Cosinus.

$$fx = \alpha x - \frac{\alpha^3}{2.3} x^3 + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} x^5 \ldots.$$

$$\varphi x = 1 - \frac{\alpha^2}{2} x^2 + \frac{\alpha^4}{2.3.4} x^4 \ldots.,$$

welches die vollständig entwickelten Ausdrücke von fx und φx sind.

Die ersten Ableitungen von fx und φx findet man nun hieraus leicht, wenn man, der Reihe nach, die ersten Ableitungen und die einzelnen Glieder der Reihen für fx nnd φx nimmt. Dieses giebt

$$\frac{dfx}{dx} = \alpha - \frac{\alpha^3}{2} x^2 + \frac{\alpha^5}{2.3.4} x^4 \ldots. \text{ und}$$

$$\frac{d\varphi x}{dx} = -\alpha^2 x + \frac{\alpha^4}{2.3} x^3 \ldots., \text{ oder}$$

$$\frac{dfx}{dx} = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} x^2 + \frac{\alpha^4}{2.3.4} x^4 \ldots.\right) \text{ und}$$

$$\frac{d\varphi x}{dx} = -\left(\alpha x - \frac{\alpha^3}{2.3} x^3 \ldots.\right),$$

woraus folgt, dass, wie leicht zu sehen, $\frac{dfx}{dx} = \alpha\varphi x$ und $\frac{d\varphi x}{dx} = -\alpha fx$ ist, welches mit dem Obigen übereinstimmt, wenn man A statt α schreibt.]

49.

Nun ist klar, dass diese Reihen nothwendig immer convergiren, sobald man den Bogen k so klein annimmt, dass Ak der Einheit gleich oder kleiner als Eins ist. [*Obgleich man den Werth von A*

Entwickelung der Reihen für

noch nicht kennt, kann wohl vorausgesetzt werden, dass es möglich ist, k so klein anzunehmen, dass $Ak =$ oder < 1 ist, weil k so klein angenommen werden kann, als man will. Dass die Reihen, sobald $Ak =$ oder < 1 ist, convergiren, ist klar, weil alsdann alle Glieder derselben echte Brüche sind, die, der Reihe nach, immer kleiner werden; jedoch muss vorausgesetzt werden, dass A nicht etwa negativ oder imaginair ist.] Es ist alsdann

$$\sin k < Ak \text{ und } \sin k > Ak - \frac{A^3 k^3}{2 \cdot 3};$$

denn da die Zeichen der Glieder abwechseln und die Glieder nach einander immer kleiner werden, so sind die Summen des zweiten und dritten, des vierten und fünften Gliedes etc. sämmtlich negativ, hingegen die Summen des dritten und vierten, des fünften und sechsten Gliedes etc. sämmtlich positiv.

Auf der andern Seite wird durch die Archimedischen Sätze bewiesen, dass der Sinus immer kleiner und die Tangente immer grösser als der Bogen ist, wenigstens im ersten Quadranten. Also ist

$$\sin k < k \text{ und } \frac{\sin k}{\cos k} > k.$$

Nun ist $\cos k = \sqrt{(1 - \sin k^2)}$, also ist

$$\frac{\sin k}{\sqrt{(1 - \sin k^2)}} > k, \text{ oder}$$

$$\sin k^2 > k^2 (1 - \sin k^2),$$

woraus folgt [$\sin k^2 (1 + k^2) > k^2$, *oder*]

$$\sin k > \frac{k}{\sqrt{(1 + k^2)}}.$$

Sinus und Cosinus

Vermöge der Natur des Kreises ist also

$$\sin k < k \text{ und } > \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}.$$

[*Diese Schlüsse müssen nothwendig auf den ersten Quadranten beschränkt werden; denn sobald der Sinus, oder der Cosinus, oder beide negativ sind, finden sie nicht Statt. Z. B. es ist* $\frac{-3}{-2} > 1$, *weil* $\frac{-3}{-2} = 1\frac{1}{2}$. *Aber man darf daraus nicht schliessen, dass* $-3 > 1 \cdot -2 > -2$ *sey, welches wirklich nicht der Fall ist. Also darf man auch, wie oben aus* $\frac{\sin k}{\sqrt{(1-\sin k^2)}} > k$, *sobald* $\sin k$ *und* $\sqrt{(1-\sin k^2)}$, *oder* $\cos k$, *negativ sind, nicht schliessen:* $\sin k > k\sqrt{(1-\sin k^2)}$. *Jedoch thut diese Beschränkung der Allgemeinheit des Resultats keinen Eintrag, weil nur eine Constante bestimmt werden soll, die für alle Werthe der veränderlichen Grösse die nemliche bleibt, so dass es also hinreichend ist, wenn man den Werth der Constante nur für irgend einen Werth der veränderlichen Grösse findet.*]

Nimmt man also den Winkel k kleiner als ein rechter, und klein genug an, dass Ak kleiner als die Einheit ist, so ist nothwendig, erstlich:

$$\sin k < Ak \text{ und } > \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}},$$

woraus folgt:

$$Ak > \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}} \text{ und } A > \frac{1}{\sqrt{(1+k^2)}}$$

Entwickelung der Reihen für

[*nemlich, weil, wenn* $\sin k > \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}$ *und zugleich* $< Ak$, Ak *um so mehr grösser, als* $\frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}$ *ist*]
und, zweitens:

$$\sin k > Ak - \frac{A^3 k^3}{2.3} \text{ und } < k;$$

woraus folgt:

$$Ak - \frac{A^3 k^3}{2.3} < k,$$

[*nemlich, wenn* $\sin k < k$ *und zugleich* $> Ak - \frac{A^3 k^3}{2.3}$ *ist. so ist, um so mehr,* $Ak - \frac{A^3 k^3}{2.3} < k$] also

$$A - \frac{A^3 k^3}{2.3} < 1 \text{ und } A < 1 + \frac{A^3 k^3}{2.3}.$$

Da diese Bedingungen Statt finden sollen, wie klein auch k sey, so folgt aus der ersten, dass A nicht kleiner als 1 sein kann; denn, wäre $A < 1$, so wäre $\frac{1}{A} > 1$. Hingegen die erste obige Bedingung $A > \frac{1}{\sqrt{(1+k^2)}}$ giebt $\frac{1}{A} < \sqrt{(1+k^2)}$. So wenig also auch $\frac{1}{A}$ die Einheit übersteigen mag, so wäre es doch möglich, k so anzunehmen, dass $\sqrt{(1+k^2)} < \frac{1}{A}$ wäre, während diese Grösse grösser als $\frac{1}{A}$ sein soll.

Aus der zweiten Bedingung folgt, dass A nicht grösser als 1 sein kann; denn, wie wenig auch

Sinus und Cosinus.

A die Einheit übersteigen mag, würde es doch möglich sein, k so klein anzunehmen, dass $1 + \frac{A^3 k^3}{2 \cdot 3} < A$ ist, während immer $1 + \frac{A^3 k^3}{2 \cdot 3} > A$ sein soll.

Da also nun A weder grösser noch kleiner als 1 sein kann, so folgt, dass nothwendig

$$A = 1$$

sein muss.

Die erste Ableitung von $\sin x$ ist also blos $\cos x$ und die erste Ableitung von $\cos x$ blos $-\sin x$, wo x einen beliebigen Bogen eines Kreises bedeuten kann, dessen Halbmesser $= 1$ ist.

[*Man kann, wenn man den Satz zu Hülfe nehmen will, dass allemal der Sinus kleiner und die Tangente grösser als der zugehörige Bogen ist, wie folgt, noch etwas kürzer beweisen, dass der, oben unbestimmt gebliebene Coefficient A nothwendig* $= 1$ *sein muss.*

In der Anmerkung zu (47.) wurde nemlich, in (I.) gefunden, dass

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{\sin k}{k} \cos x \text{ und } \frac{d \cos x}{dx} = -\frac{\sin k}{k} \sin x$$

ist, für $k = 0$.

Dass $\frac{\sin k}{k}$ *für* $k = 0$ *der nemliche Coefficient ist, der oben mit A bezeichnet wird, ist am kürzesten aus der Lagrangischen Formel für* $\sin k$ *(in 48.) zu sehen. Denn dieselbe giebt, für jedes k,*

Entwickelung der Reihen für

$$\frac{\sin k}{k} = A - \frac{k^2 A^3}{2 \cdot 3} + \frac{k^4 A^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \ldots,$$

also, für $k = 0$,

$$\frac{\sin k}{k} = A.$$

Nimmt man nun an, dass der Sinus allemal kleiner und die Tangente allemal grösser ist, als der Bogen, so ist

$$\frac{\sin k}{k} > 1 \text{ und } \frac{\tang k}{k} > 1.$$

Das letzte giebt $\frac{\sin k}{k \cos k} > 1$, *oder* $\frac{\sin k}{k} > \cos k$. *Da also* $\frac{\sin k}{k} < 1$ *und* $> \cos k$, *so folgt, dass* $\frac{\sin k}{k}$ *für jeden Winkel, von* 0 *bis zu einem rechten, zwischen* 1 *und* $\cos k$ *eingeschlossen ist. Für* $k = 0$ *aber fallen* 1 *und* $\cos k$ *zusammen, also ist* $\frac{\sin k}{k}$, *für* $k = 0$, *wie es wirklich genommen werden soll, nothwendig gleich Eins; mithin ist*

$$A = 1$$

und folglich

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \text{ und } \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

Lagrange hat vielleicht vermeiden wollen, $k = 0$ *zu setzen. Allein dafür hat der Beweiss wieder andre Schwächen bekommen.*

Da indessen der Beweiss, dass der oben unbestimmt gebliebene erste Coefficient A der ent-

Sinus und Cosinus.

wickelten Ausdrücke von sin x *und* cos x *gleich ist in allen Fällen den geometrischen Satz erfordert, dass der Kreisbogen länger als der zugehörige Sinus und kürzer als die zugehörige Tangente ist, so scheint es beim ersten Anblick wieder, dass die Rechnung hier nicht ohne die Geometrie weiter kommen könne. Dieses ist aber, auch hier, keineswegs der Fall.*

Die verschiedenen, aus der einzigen Grund-Gleichung

$$\varphi(x-y) = \varphi x\,\varphi y + fx\,fy$$

(in 46.) folgenden Ausdrücke der Eigenschaften der Grössen φx *und* fx*, so wie die Reihen in (47. III.) durch welche sich* φx *und* fx *in* x *ausdrücken lassen, hängen vielmehr von dem Kreise, wie die dortige Rechnung zeigt, nicht im mindesten ab. Sie sind im Gegentheil sämmtlich allgemeiner, als die analogen Ausdrücke vom Kreise, die nur einen einzelnen Fall davon ausmachen und sich daraus ableiten lassen. Alles, was aus jenen Formeln folgt, gilt auch allgemein, wenn man sie nicht auf den einzelnen Fall des Kreises beschränkt, sondern so nimmt, wie sie sind.*

Dass aber die Formeln allgemeiner sind, als die zugehörigen Formeln vom Kreise zeigt eben der Umstand an, dass der erste Coefficient in den Reihen für φx *und* fx *unbestimmt bleibt. Dieser Coefficient ist auf dieselbe Weise willkürlich, wie der erste Coefficient in der Reihe für*

Entwickelung der Reihen für

die Logarithmen, der von der Basis abhängt. Der Kreis entspricht auf die nemliche Weise einem einzelnen Falle der allgemeinen Formeln, wie die Hyperbel einem einzelnen Falle des Ausdrucks der Logarithmen. Für den besondern einzelnen Fall des Kreises ist in den, aus der Grund-Bedingung $\varphi(x-y) = \varphi x \varphi y + fx fy$ *folgenden Reihen für* φx *und* fx, *der erste Coefficient* 1, *für die Hyperbel ist die Basis der zugehörigen Logarithmen* e. *Es giebt aber ausserdem eben so wohl unzählige andere Werthe von* φx *und* fx, *die der Grund-Bedingung* $\varphi(x-y) = \varphi x \varphi y + fx fy$ *genug thun, wie es unzählige Logarithmen einer und derselben Zahl giebt, je nachdem die Basis des Systems einen andern Werth hat.*

Dass für den besondern Fall des Kreises der erste Coefficient A *der Reihen für* φx *und* fx *nothwendig* 1 *ist und nichts anders, muss freilich geometrisch bewiesen werden, weil der Kreis eine geometrische Figur ist, indessen ist deswegen der Kreis zum Fortgange der Rechnung nicht nöthig, sondern man kann eben so wohl, willkürlich, grade zu* $A = 1$ *setzen, als dass man den Werth von* A, *willkürlich geometrisch aus den Eigenschaften des Kreises ableitet, auf eben die Weise, wie man bei den Logarithmen die Basis der sogenannten natürlichen Logarithmen, willkürlich, von den übrigen Grundzahlen unterscheidet, ohne die Hyperbel zu Hülfe zu nehmen. Die Grundbedingung* $\varphi(x-y) =$

$\varphi x \varphi y + fxfy$ ist für die Analysis immer die e i n z i g e, *von welcher alle obige Ausdrücke ausgehen, die hernach, in einem besondern Falle, auf den Kreis passen.*

Uebrigens kann man aber auch, selbst noch den besondern Fall des Kreises, für welehen $A = 1$ ist, sehr wohl rein analytislh ausdrücken.

Es ist nemlich, anfänglich, bei der Grundbedingung $\varphi(x - x) = \varphi x \varphi y + fxfy$, auf keine Weise, weder vom Kreise, noch von sonst einer Curve die Rede. Die Grundbedingung drückt blos analytisch ein gewisses, bestimmtes Verhältniss zwischen den beiden, von einer willkürlich veränderlichen Grösse x, abhängenden Grössen φx und fx aus, und unter dieser Bedingung allein werden, wie die Anmerkung zu (46.) *zeigt, zwar bestimmte* V e r h ä l t n i s s e *zwischen den Grössen φx und fx, wenn z. B. x in y übergeht, ausgesprochen, nicht aber, wie die Anmerkung zu* (47.) *in (III.) zeigt, bestimmte* W e r t h e *von φx und fx, wenn man sie* d u r c h *x* s e l b s t, *vermittelst Reihen ausdrücken wollte. Hier bleibt der erste Coefficient der Reihen willkürlich und φx und fx* k ö n n e n, *für* d a s n e m l i c h e *x*, u n z ä h l i g e v e r s c h i e d e n e W e r t h e h a b e n. *Anders ist es, wenn man den Grössen φx und fx eine bestimmte Bedingung giebt, nemlich wenn man dieselben die recht- oder schiefwinkligen Coordinaten irgend einer Curve bedeuten lässt,* d e r e n B o g e n - L ä n g e v o m N u l l - P u n c t a n

Entwickelung der Reihen für

bis zu dem Puncte, zu welchem die Coordinaten φx und fx gehören, x ist. Da nemlich die Länge des Curven-Bogens nothwendig, selbst auf eine allgemeine Weise, von der Länge der Coordinaten abhängt, so liegt in dieser blossen Bestimmung, dass φx und fx die Coordinaten eines Curven-Bogens x sein sollen, feine zweite neue Bedingung, die zu der, allgemein, ür φx und fx angenommenen Bedingung hinzukommt und dann kann, in so fern, wie es oben wirklich der Fall war, aus der allgemeinen Grund-Bedingung ein bestimmtes Verhältniss zwischen φx und fx, schon ohne Rücksicht auf die neue Abhängigkeit der Grössen φx und fx von x selbst, das heisst, eine Gleichung der Curve folgt, Nichts mehr unbestimmt bleiben, weil die Curve selbst durch ihre Gleichung völlig bestimmt wird.

In der That nehme man die aus der allgemeinen Grundbedingung $\varphi(x-y) = \varphi x \cdot \varphi y + fx fy$, *ohne Rücksicht auf die Abhängigkeit der Grössen φx und fx von x, folgende Gleichung zwischen φx und fx:*

$$\varphi x^2 + fx^2 = 1$$ *(Nr. 7. Anmerk. zu 46.)*

an, welche Gleichung nunmehr die Gleichung des Curven-Bogens x ist, sobald man festgesetzt hat dass φx und fx die Coordinaten des Bogens sein sollen; so ist diese Gleichung, zusammen genommen mit der, aus der oben ausgesprochenen Bedingung, folgenden zweiten Gleichung für die allgemeine Abhängigkeit des Bogens einer Curve

von

von ihren Coordinaten, vollkommen hinreichend, die Abhängigkeit der Grössen φx und fx von x selbst, etwa durch Reihen, ohne dass noch irgend etwas weiter willkürlich oder unbestimmt bliebe, vollständig auszudrücken. Bekanntlich nemlich ist, wenn u und v die Coordinaten einer beliebigen Curve bedeuten, und der zugehörige Bogen x ist, in so fern man die Coordinaten, der Kürze wegen, rechtwinklig annimmt,

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \text{ (1. Band, 2. Th. Art. 29.).}$$

Diese Gleichung ist der analytische Ausdruck der allgemeinen, geometrischen Abhängigkeit eines beliebigen Curven-Bogens von seinen Coordinaten. Sie lässt sich, weil, wie weiter unten allgemein gezeigt wird, $\frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 1$ *und* $\frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}$, *und folglich* $\frac{dx}{du} = 1 : \frac{du}{dx}$ *und* $\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dx} : \frac{du}{dx}$ *ist, in*

$$1 : \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 : \left(\frac{du}{dx}\right)^2, \text{ oder in}$$

$$1 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

verwandeln, welches, wenn man statt u und v die obigen Ausdrücke der Coordinaten φx und fx setzt,

$$1 = \left(\frac{d\varphi x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2$$

giebt.

Man hat also jetzt zur Bestimmung der Abhängigkeit der Grössen φx und fx von x, statt der obigen einen Grundgleichung, die zwei Gleichungen

$$\varphi x^2 + fx^2 = 1 \text{ und}$$

$$\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2 = 1.$$

Nun setze man, in Erwägung, dass z. B. $\varphi x = 1$ für $x = 0$ und $fx = 0$ für $x = 0$ ist,

$$\begin{aligned} \varphi x &= 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \ldots \text{ und} \\ fx &= \quad\; \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 \ldots, \end{aligned}$$

so ist

$$\frac{d\varphi x}{dx} = a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 \ldots \text{ und}$$

$$\frac{dfx}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 \ldots,$$

also

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2ax + 2bx^2 + 2cx^3 + 2dx^4 \ldots \\ + a^2x^2 + 2abx^3 + 2acx^4 \ldots \\ + b^2x^4 \ldots \\ + \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x^3 + 2\alpha\gamma x^4 \ldots \\ + \beta^2 x^4 \ldots \end{array}\right\} = 1$$

und

$$\left.\begin{array}{r} a^2 + 4abx + 6acx^2 + 8adx^3 + 10aex^4 \ldots \\ + 4b^2x^2 + 12bcx^3 + 16bdx^4 \ldots \\ + 9c^2x^4 \ldots \\ + \alpha^2 + 4\alpha\beta x + 6\alpha\gamma x^2 + 8\alpha\delta x^3 + 10\alpha\varepsilon x^4 \ldots \\ + 4\beta^2x^2 + 12\beta\gamma x^3 + 16\beta\delta x^4 \ldots \\ + 9\gamma^2 x^4 \ldots \end{array}\right\} = 1.$$

Sinus und Cosinus.

Daraus folgt

$$a = 0, \text{ also } \alpha = 1;$$

$$2b + \alpha^2 = 0, \text{ also } b = -\tfrac{1}{2};$$

$$4ab + 4\alpha\beta = 0, \text{ also } \beta = 0;$$

$$2c + 2\alpha\beta = 0, \text{ also } c = 0;$$

$$4b^2 + 6\alpha\gamma = 0, \text{ also } \gamma = -\tfrac{2}{3}b^2 = -\frac{1}{2.3};$$

$$2d + b^2 + 2\alpha\gamma = 0, \text{ also } 2d = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3}, \text{ oder } d = \frac{1}{2.3.4};$$

$$8\alpha\delta = 0, \text{ also } \delta = 0 \text{ u. s. w.}$$

Also ist

$$\varphi x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} \ldots$$

$$fx = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} \ldots$$

welches die bekannten Reihen sind, die nunmehr auf diesem Wege ihre vollständige Bestimmtheit erhalten haben und in welchen Nichts mehr willkürlich ist.

So also lässt sich auch das, was aus der willkürlichen Bedingung folgt, dass φx und fx die rechtwinkligen Coordinaten eines Kreisbogens x bedeuten sollen, blos analytisch, durch die zweite Bedingungs-Gleichung $\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2 = 1$ ausdrücken, und es ist auch in diesem besondern bestimmten Falle die Hülfe der Geometrie, oder einer Figur, in der Analysis nicht unumgänglich nothwendig; denn man kann, wenn man nicht willkürlich, gradezu den ersten Coeffi-

cienten der Reihen für φx und fx gleich 1 setzen will, oder vielmehr, wenn man statt dessen von einer zweiten Bedingungs-Gleichung zwischen x und φx und fx ausgehen will, die der Voraussetzung $A = 1$ entspricht, ausser der Grund-Gleichung $\varphi x^2 + fx^2 = 1$, noch die zweite Gleichung $\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2 = 1$, die dann in der Folge, etwa wie der erste Coefficient der allgemeinen Entwickelung von Fx, wenn Fx die Fläche einer Curve unter den Coordinaten bedeutet und dergleichen, in der Geometrie ihre zugehörige Bedeutung findet, supponiren. In beiden Fällen erhält man vollständig bestimmte Ausdrücke. Aber erst in der Geometrie wird, im zweiten Falle, gezeigt, dass die zweite Bedindungs-Gleichung $\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2 = 1$ grade diejenige ist, die erfüllt werden muss, wenn φx und fx namentlich die rechtwinkligen Coordinaten eines Curven-Bogens x bedeuten sollen.

Näheres Detail über diesen Gegenstand, z. B. nachzuweisen: ob, oder in wie fern die Grundgleichung $\varphi(x-y) = \varphi x \varphi y + fx fy$, welche allgemeiner ist, als die daraus abgeleitete, hier zum Grunde gelegte Gleichung $\varphi x^2 + fx^2 = 1$ zwischen φx und fx, etwa schon die zweite Bedingungs-Gleichung $\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2 = 1$ mit enthalte, würde die gegenwärtige Anmerkung zu

Ausdrücke d. Bogen durch ihre Sin. u. Cos.

weit ausdehnen und muss einer ausführlichen Abhandlung über die Theorie der Winkel-Functionen, in welcher, wie man sieht, noch mehrere Erläuterungen nöthig sind, vorbehalten bleiben.

Hier kam es nur darauf an, bemerklich zu machen, dass für die reine Analysis auch hier keine geometrische Figur nöthig ist, dergleichen, wie oben bemerkt, vermieden werden muss, wenn man nicht Ungleichartiges einmischen will.]

50.

Es ist also allgemein, für einen beliebigen Bogen k,

$$\sin k = k - \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^5}{2.3.4.5} - \frac{k^7}{2.3...7} \ldots$$

$$\cos k = 1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{2.3.4} - \frac{k^6}{2.3.4.5.6} \ldots,$$

welches die bekannten, von Newton gefundenen Ausdrücke sind.

Ausdrücke der Bogen durch ihre Sinus und Cosinus.

51.

Wir haben die Sinus und Cosinus als von den Bogen abhängend betrachtet. Man kann, umgekehrt, die Bogen von den Sinus und Cosinus abhängen lassen und in diesem Sinne die Ableitungen suchen. Diese Abhängigkeit bezeichnet man gewöhnlich durch

Ausdrücke der Bogen durch ihre

die Worte *ang sin* und *ang cos*, als Zeichen, vor die Sinus und Cosinus gesetzt. [*Ich werde arc sin und arc cos schreiben, so wie ich oben überall Bogen statt Winkel gesetzt habe, weil wirklich nicht der Winkel, sondern sein Maass, der zugehörige Kreisbogen, für den Halbmesser 1, in Rechnung kommt.*]

Es sey also

$$\varphi y = \text{arc sin}\, y, \text{ so dass } \sin(\varphi y) = y \text{ ist,}$$

[*wo also y der Sinus selbst ist, nicht der Bogen.* Lagrange *bezeichnet den Sinus durch x. Um mehr die Verwechselung mit dem Obigen zu verhindern, wo x einen Bogen und fx dessen Sinus und Cosinus bedeuten, habe ich y statt x und φ statt f gesetzt, so dass man jetzt unter y, den Sinus eines Bogens x und unter arc sin y den Bogen x selbst verstehen kann.*] Setzt man $y + k$ statt x und

$$k \frac{d\varphi y}{dy} + \frac{k^2}{2} \frac{d^2 \varphi y}{dy^2} \ldots = \omega,$$

so erhält man

$$\sin(\varphi y + \omega) = y + k = \sin(\varphi y) \cdot \cos \omega + \cos(\varphi y) \sin \varphi.$$

Nun aber ist

$$\sin(\varphi y) = y, \quad \cos(\varphi y) = \sqrt{(1 - \sin(\varphi y)^2_k)} = \sqrt{(1 - y^2)}$$

$$\text{und } \sin \omega = \omega - \frac{\omega^3}{2.3} \ldots \quad \cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} \ldots,$$

vermöge der oben gefundenen Ausdrücke (50.). Substituirt man Dieses und setzt den Werth von ω, so erhält man, wenn man die Glieder nach k ordnet, die identische Gleichung

Sinus und Cosinus.

$$y + k = y + k\sqrt{(1-y^2)}\,\frac{d\varphi y}{dy}$$

$$+ \frac{k^2}{2}\left(\sqrt{(1-y^2)}\,\frac{d^2\varphi y}{dy^2} - y\left(\frac{d\varphi y}{dy}\right)^2\right)\ldots,$$

welche, wenn man die Glieder mit k vergleicht,

$$1 = \sqrt{(1-y^2)}\,\frac{d\varphi y}{dy}$$

giebt, woraus

$$\frac{d\varphi y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

folgt. Die Vergleichung der andern Glieder giebt die Werthe von $\frac{d^2\varphi y}{dy^3}$, $\frac{d^3\varphi y}{dy^3}$ *etc.* Aber es ist leichter, sie unmittelbar aus $\frac{d\varphi y}{dy}$ zu nehmen.

Es sey ferner

$$\varphi z = arc\cos z, \text{ so dass } z = \cos(\varphi z)$$

[*und also z der Cosinus selbst, φz der zugehörige Bogen ist.*] Man setze $z + k$ statt z und $\varphi z + \omega$ statt φz, so ist

$$z + k = \cos(\varphi z + \omega) = \cos\varphi z \cos\omega - \sin\varphi z \sin\omega.$$

Aber

$$\cos(\varphi z) = z \text{ und } \sin(\varphi z) = \sqrt{(1-\cos(\varphi z)^2)} = \sqrt{(1-z^2)}.$$

Substituirt man Dieses und setzt für $\sin\omega$ und $\cos\omega$ ihre Werthe in Reihen [*aus* 50.] nemlich $\sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{2.3}\ldots$ und $\cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2}\ldots$, so erhält man, nachdem wieder der Werth von ω zurück substituirt

Ausdrücke der Bogen durch ihre

und die Glieder nach Potenzen von k geordnet worden, die identische Gleichung

$$z+k=z-k\sqrt{(1-z^2)}\frac{d\varphi z}{dz}$$

$$-\frac{k^2}{2}\left(\sqrt{(1-z^2)}\frac{d^2\varphi z}{dz^2}+z\left(\frac{d\varphi z}{dz}\right)^2\right)\ldots$$

Die Vergleichung der Glieder mit k giebt

$$1=-\sqrt{(1-z^2)}\frac{d\varphi z}{dz},$$

woraus folgt

$$\frac{d\varphi z}{dz}=-\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}.$$

Wenn nun y der Sinus eines Bogens ist, so ist $\sqrt{(1-y^2)}$ der Cosinus und wenn z der Cosinus ist, so ist $\sqrt{(1-z^2)}$ der Sinus. Aus dem Obigen folgt also, dass die erste Ableitung eines Bogens, nach seinem Sinus genommen, gleich ist Eins, dividirt durch den Sinus, und zwar Letzteres negativ.

[*Wenn die Rechnungen in diesem Artikel noch deutlicher werden sollten, so möchten wohl noch einige Zwischen-Rechnungen nöthig gewesen sein. Da aber dadurch der Vortrag nur noch weitläuftiger geworden wäre, und man gegentheils das Resultat auf die in* (36.) *in der Anmerkung bei den Logarithmen erwähnte Art viel kürzer finden kann, so habe ich sie weggelassen.*

Es ist nemlich allgemein, wie auch zwei ver-

Sinus nnd Cosinus.

änderliche Grössen x und y von einander abhängen mögen,

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1,$$

welches im folgenden Abschnitte erwiesen wird.

Bedeutet nun x einen Bogen, und y seinen Sinus, so ist, weil oben gefunden wurde, dass $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ *ist,*

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

also, weil allgemein, $\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}$ *ist,*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x}, \text{ oder } \frac{d \operatorname{arc} (\sin y)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)}}.$$

Bedeutet x einen Bogen und z seinen Cosinus, so ist, weil oben gefunden wurde, dass $\frac{d \cos x}{dx} = - \sin x$ *ist,*

$$\frac{dz}{dx} = - \sin x,$$

folglich, weil allgemein $\frac{dx}{dz} = 1 : \frac{dz}{dx}$ *ist,*

$$\frac{dx}{dz} = - \frac{1}{\sin x}, \text{ oder } \frac{d \operatorname{arc} (\cos z)}{dz} = - \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)}};$$

Beides wie oben.

Der allgemeine Satz: $\frac{dy}{dx} : \frac{dx}{dy} = 1$, *oder vielmehr:* $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ *wird in der folgenden*

Ausdrücke d. Bogen durch ihre Sin. u. Cos.

Vorlesung gelehrt. Es war also, um die obigen Resultate klarer und einfacher zu haben, nur nöthig, den Vortrag der besondern Fälle nicht den allgemeinen Sätzen vorhergehen, sondern erst auf dieselben folgen zu lassen. Der gegenwärtige Fall giebt wieder ein Beispiel von der Nützlichkeit dieser Regel.]

Sechste Vorlesung.

Ableitung von Grössen, die aus verschiedenen Functionen einer und derselben veränderlichen Grösse zusammengesetzt sind, oder die von dergleichen Functionen vermittelst Gleichungen abhängen.

52.

Die Functionen in den drei letzten Vorlesungen sind gleichsam die Elemente aller derjenigen, die sich durch algebraische Operationen aufstellen lassen. [*Jedoch kann es möglicher Weise deren auch noch mehrere geben, von welchen die Gesetze noch unbekannt sind.*] Wir glauben deshalb mit der Untersuchung der Ableitungen dieser einfachern Functionen anfangen zu müssen und wollen nun sehen, wie man die Ableitungen von Functionen finden kann, die aus jenen auf irgend eine Weise zusammengesetzt sind. [*Da die Untersuchung der besondern einzelnen Fälle zu der jetzt folgenden Untersuchung nicht nöthig ist, so konnte diese auch je-*

ner vorhergehen. Es zeigte sich oben schon gelegentlich, dass solches nützlich gewesen wäre. Das Fortschreiten vom Besondern zum Allgemeinen hat unstreitig in der Analysis, wie überall, seine bestimmte Regeln. Hier ist das Fortschreiten nicht der Grund, weshalb die Untersuchungen in der gegenwärtigen Vorlesung erst auf die der besondern bestimmten Formen in den drei vorigen Vorlesungen folgen mussten. Die Aufstellung des allgemeinen Ausdrucks $f(x+k)=fx+kdfx + \frac{k^2}{2}d^2fx \ldots$ *in der zweiten Vorlesung ist eine eben so allgemeine Untersuchung, wie die jetzt folgende; also konnte auch die letztere erst füglich der Untersuchung der besondern Formen, deren sie nicht bedarf, vorhergehen.*]

53.

Es mögen p, q, $r \ldots$ beliebige Functionen einer und derselben veränderlichen Grösse [x] sein. Die ersten Ableitungen dieser Functionen $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dr}{dx} \ldots$ sollen bekannt und y soll eine aus p, q, $r \ldots$ zusammengesetzte Function sein, deren erste Ableitung $\frac{dy}{dx}$ man verlangt.

Man erwäge, dass, wenn man $x+k$ statt x setzt, y allgemein in

$$y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \ldots$$

übergeht, aus p, q, $r \ldots$ aber die Grössen

wiederholter Functionen.

$$p + k\frac{dp}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\ldots.$$

$$q + k\frac{dq}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2q}{dx^2}\ldots.$$

$$r + k\frac{dr}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2r}{dx^2}\ldots.$$

werden. Man darf daher nur diese Grössen in den Ausdruck von y substituiren und die Glieder nach Potenzen von k entwickeln, so ist der Coefficient zu k der verlangte Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$.

54.

I. Wäre also [*z. B.*]

$$y = Ap + Bq + Cr\ldots.$$

wo A, B, C.... beliebige [*constante*] Coefficienten bedeuten, so erhält man auf der Stelle

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{dp}{dx} + B\frac{dq}{dx} + C\frac{dr}{dx}\ldots.$$

II. Wäre

$$y = Apq,$$

so ginge die Grösse pq in folgende über:

$$\left(p + k\frac{dp}{dx}\ldots.\right)\left(q + \frac{dq}{dx}\ldots.\right) = pq + k\left(q\frac{dp}{dx} + p\frac{dq}{dx}\right)\ldots.;$$

also wäre

$$\frac{dy}{dx} = q\frac{dp}{dx} + p\frac{dq}{dx}.$$

III. Wäre

$$y = Apqr,$$

so fände man auf eine ähnliche Weise

$$\frac{dy}{dx} = A\left(qr\frac{dp}{dx} + pr\frac{dq}{dx} + pq\frac{dr}{dx}\right).$$

IV. Wäre

$$y = A\frac{p}{q},$$

so ginge die Grösse $\frac{p}{q}$ in

$$\frac{p + k\frac{dp}{dx}\dots}{q + k\frac{dq}{dx}\dots}$$

über. Entwickelte man nun diesen Nenner [*soll wohl heissen diesen Bruch*] in eine Reihe nach den bekannten Regeln, so erhielte man

$$\left(p + k\frac{dp}{dx}\dots\right)\left(\frac{1}{q} - k\frac{dq}{dx} : q^2 \dots\right)$$
$$= \frac{p}{q} + k\left(\frac{dp}{dx} : q - p\frac{dq}{dx} : q^2 \dots\right)\dots,$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = A\left(\frac{dp}{dx} : q - p\frac{dq}{dx} : q^2\right) = A\left(q\frac{dp}{dx} - p\frac{dq}{dx}\right) : q^2.$$

V. Es sey ferner

$$y = Ap^m q^n,$$

so geht die Grösse $p^m q^n$ in

$$\left(p + k\frac{dp}{dx}\dots\right)^m \left(q + k\frac{dq}{dx}\dots\right)^n$$
$$= \left(p^m + mkp^{m-1}\frac{dp}{dx}\dots\right)\left(q^n + nkq^{n-1}\frac{dq}{dx}\dots\right)$$
$$= p^m q^n + k\left(mp^{m-1}q^n\frac{dp}{dx} + nq^{n-1}p^m\frac{dq}{dx}\right)\dots$$

wiederholter Functionen.

über. Also ist

$$\frac{dy}{dx} = A\left(mq^n p^{m-1}\frac{dp}{dx} + np^m q^{n-1}\frac{dq}{dx}\right).$$

VI. Man findet, wenn

$$y = Ap^m q^n r^l$$

ist, auf eine ähnliche Weise

$$\frac{dy}{dx} = A\left(mq^n r^l p^{m-1}\frac{dp}{dx} + np^m r^l q^{n-1}\frac{dq}{dx} + lp^m q^n r^{l-1}\frac{dr}{dx}\right)$$

u. s. w.

55.

Es sey allgemein

$$y = fy.$$

Betrachtet man fp als eine Function von p [*nemlich p einen Augenblick als unabhängig veränderlich und y als eine durch f bezeichnete Function von p*] so sind ihre Ableitungen $\frac{dfp}{dp}$, $\frac{d^2fp}{dp^2}$, so, dass fp, wenn man $p + \omega$ statt p setzt, in

$$fp + \omega\frac{dfp}{dp} + \frac{\omega^2}{2}\frac{d^2fp}{dp^2}\ldots.$$

übergeht. Ist nun p eine Function von x, so geht p, wenn man $x + k$ statt x setzt, in

$$p + k\frac{dp}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\ldots.$$

über. Setzt man also

$$k\frac{dp}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\ldots. = \omega,$$

Ableitung

so geht fp, wenn man $x+k$ statt x setzt, in

$$\left[fp + \left(k\frac{dp}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\ldots\right)\frac{dfp}{dp} + \tfrac{1}{2}\left(k\frac{dp}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\ldots\right)^2\frac{d^2fp}{dp^2}\ldots =\right]$$

$$fp + k\frac{dfp}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2fp}{dp^2}\cdot\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \frac{dfp}{dp}\cdot\frac{d^2p}{dx^2}\right)\ldots$$

über. Es ist also [*weil Dieses zugleich* $y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\ldots$ *ist*]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dfp}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

Hieraus folgt der Satz, dass die erste Ableitung einer Function [y] einer Grösse [p] die selbst eine Function von x ist, durch das Product der ersten Ableitungen der beiden Functionen [*y und p nach p und nach x genommen*] ausgedrückt wird. [*Hier sind im Original nicht allein die Zeichen, sondern auch, wahrscheinlich durch einen Druckfehler, die Worte undeutlich. Es fehlen diejenigen, welche in der Uebersetzung eingeschaltet sind.*]

56.

Durch diesen Satz lassen sich die obigen Resultate auf Ableitungen von Potenzen, Exponential-Grössen, Logarithmen, Sinus und Cosinus ausdehnen.

I. Wenn

wiederholter Functionen.

I. Wenn $y = p^m$, so ist $\frac{dy}{dx} = mp^{m-1} \cdot \frac{dp}{dx}$.

II. Wenn $y = a^p$, so ist $\frac{dy}{dx} = a^p \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \overset{e}{log}\, a$.

III. Wenn $y = \overset{a}{log}\, p$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} : p$.

IV. Wenn $y = \sin p$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} \cos p$.

V. Wenn $y = \cos p$, so ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{dp}{dx} \cdot \sin p$.

VI. Wenn $y = arc\,\sin p$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} : \sqrt{(1-p^2)}$.

VII. Wenn $y = arc\,\cos p$, so ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{dp}{dx} : \sqrt{(1-p^2)}$.

57.

Wir wollen nun weiter annehmen, y sey eine Function von p und q, die durch

$$y = f(p, q)$$

bezeichnet wird, so kommt es darauf an, in die beiden Grössen p und q, $x + k$ statt x zu setzen und aus der Entwickelung der zusammengesetzten Grösse $f(p, q)$ den Coefficienten zu k zu finden. Es ist aber klar, dass man nothwendig das Nemliche erhalten muss, man mag die beiden Substitutionen zugleich, oder eine nach der andern vornehmen, weil dabei die Grössen p und q als von einander unabhängig betrachtet werden. [*Dieser nemliche Umstand ist es, auf welchen die Entwickelung der Ableitungen von Functionen zweier oder mehrerer, von einander unabhängiger veränderlicher Grössen beruhet.*

Ableitung

Die gegenwärtige Entwickelung ist also eigentlich keine andere, als jene selbst. Da nun die letztere in der Folge besonders abgehandelt werden muss, so wird sie eigentlich dort wiederholt, was nicht nöthig wäre, wenn die Entwickelung der Ableitungen von Functionen mehrerer einfacher, aber von einander unabhängiger veränderlicher Grössen, welche Untersuchung hier, erst sehr weit unten, in der 19ten Vorlesung vorkommt, der gegenwärtigen vorherginge.]

Setzt man also in p, $x + k$ statt x, so geht die Function $f(p, q)$, die nun als blos von p abhängig betrachtet wird, wie oben bewiesen, in

$$f(p, q) + k\frac{df(p, q)}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2f(p, q)}{dp^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \frac{df(p, q)}{dp}\frac{d^2p}{dx^2}\right) \cdot \ldots\ldots\ldots$$

über. Setzt man darauf auch in p, $x + k$ statt x, so geht $f(p, q)$ [*nemlich das erste Glied der so eben gefundenen Grösse*] in

$$f(p, q) + k\frac{df(p, q)}{dq}\frac{dq}{dx} \ldots.$$

über. Da das zweite Glied [*der vorhin gefundenen Grösse*] $k\frac{df(p, q)}{dp}\frac{dp}{dx}$ schon mit k multiplicirt ist, so ist klar, dass die Glieder, um welche es [*wenn man darin $x + k$ statt x setzt*] zunehmen würde, mit k^2, k^3 multiplicirt sein müssten [*weshalb diese Glieder nicht in Betracht kommen und*

noch weniger diejenigen, welche von $\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2f(p,q)}{dp}\frac{d^2p}{dx^2}\right.$ $\left.+\frac{df(p,q)}{dp}\frac{d^2p}{dx^2}\right)$.... *u. s. w. herrühren.*]

Die beiden ersten Glieder der Reihe, welche entsteht, wenn man in p und q, $x+k$ statt x substituirt, sind also blos

$$f(p,q)+k\frac{df(p,q)}{dp}\frac{dp}{dx}+k\frac{df(p,q)}{dq}\frac{dq}{dx},$$

so, dass

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(p,q)}{dx}=\frac{df(p,q)}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{df(p,q)}{dq}\frac{dq}{dx}$$

ist.

Wäre y eine Function von $p, q, r\ldots$, wie $f(p,q,r)$, so würde man auf dieselbe Weise

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(p,q,r)}{dx}=$$

$$\frac{df(p,q,r)}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{df(p,q,r)}{dq}\frac{dq}{dx}+\frac{df(p,q,r)}{dr}\frac{dr}{dx}$$

finden u. s. w.

Daraus folgt allgemein, dass die erste Ableitung einer, aus mehreren Functionen zusammengesetzten Function, der Summe der ersten Ableitungen derselben, nach jeder der einzelnen, als von einander unabhängig betrachteten Functionen, besonders genommen, gleich ist.

Ableitung

58.

Dieser Satz, mit dem vorigen zusammen, ist hinreichend, die ersten, so wie auch die höhern Ableitungen jeder beliebigen Function zu finden.

So ist [*z. B.*]

I. von pq die erste Ableitung, in Rücksicht auf p, gleich $q\frac{dp}{dx}$ und in Rücksicht auf q, gleich $p\frac{dq}{dx}$. Die gesammte erste Ableitung von pq ist also $q\frac{dp}{dx} + p\frac{dq}{dx}$, wie wir schon oben fanden.

Betrachtet man nun ferner $\frac{dp}{dx}$ und $\frac{dq}{dx}$ als neue Functionen von x, von welchen $\frac{d^2p}{dx^2}$ und $\frac{d^2q}{dx^2}$ die ersten Ableitungen sind, so ist [*nach der nemlichen Regel*] die erste Ableitung von $q\frac{dp}{dx}$ gleich $\frac{dq}{dx}\cdot\frac{dp}{dx} + q\frac{d^2p}{dx^2}$ und die erste Ableitung von $p\frac{dq}{dx}$ gleich $\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dq}{dx} + p\frac{d^2q}{dx^2}$, so, dass die zweite Ableitung von pq gleich

$$q\frac{d^2p}{dx} + 2\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dq}{dx} + p\frac{d^2q}{dx^2}$$

ist u. s. w.

II. Auf dieselbe Weise findet man

$$mq^n \cdot p^{m-1}\frac{dp}{dx} + np^m \cdot q^{n-1}\frac{dq}{dx}$$

für die erste Ableitung von $p^m q^n$. Das erste Glied derselben ist die erste Ableitung in Beziehung auf p, das zweite die erste Ableitung in Beziehung auf q u. s. w.

III. Wenn $p = \sin x$ und $q = \cos x$, so ist $\frac{dp}{dx} = \cos x$ und $\frac{dq}{dx} = -\sin x$, also ist [*z. B.*] für

$$y = \sin x^m \cos x^n,$$

$$\frac{dy}{dx} = m \sin x^{m-1} \cos x^{n+1} - n \cos x^{n-1} \sin x^{m+1}.$$

IV. Da die Tangente eines Bogens gleich ist dem Sinus desselben, dividirt durch den Cosinus, so erhält man, wenn man sie durch das Wort $tang$, vor den Bogen als Zeichen gesetzt, ausdrückt, da $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x} = y$ ist,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{\sin x^2}{\cos x^2} = \frac{1}{\cos x^2},$$

also, allgemein, wenn $y = \tang p$ [*wo eine Function von x ist*]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} : \cos p^2.$$

[*Wenn die Regeln für die Ableitung zusammengesetzter Grössen. oder von Functionen von Grössen, die selbst wieder Functionen unabhängig veränderlicher Grössen sind, sogleich allgemein aufgestellt werden, so sind die besondern Herleitungen* (53. *und* 54.) *und selbst* (55. *und* 56.) *nicht nöthig. Es scheint, in der Analysis immer am*

Ableitung

besten, alle Sätze gleich so allgemein aufzustellen, als es mit den bis dahin bewiesenen Sätzen nur möglich ist. Die Allgemeinheit vermehrt gewöhnlich sogar die Klarheit und Verständlichkeit des Vortrages. Das ganz synthetische, stufenweise Fortschreiten vom Besondern zum Allgemeinen scheint bei der Entwickelung analytischer Ausdrücke, deren Wesen grade darin besteht, viele einzelne Fälle mit einem allgemeinen Gesetze zu umfassen, diesem Gesetze entgegen und erleichtert nicht allein das Studium nicht, sondern erschweret es.]

59.

Die Function y kann auch [*nicht schon entwickelt, wie* $y = fx$] sondern nur [*unentwickelt*] durch eine Gleichung zwischen x und y gegeben sein [*wie z. B.* $y^m x + a x^p y^n + b \log y \sin x + c e^y \log x \ldots = 0$.] Man bezeichne im Allgemeinen eine solche Gleichung durch

$$F(x, y) = 0,$$

so ist klar, dass wenn man y als eine, durch diese Gleichung bestimmte Function von x betrachtet und sich vorstellt, der Ausdruck von y in x sey statt y in die Gleichung $F(x, y) = 0$ substituirt worden, dass daraus eine Function von x entstehen muss, die identisch Null ist, was auch x sein mag, folglich auch, wenn man $x + k$ statt x setzt, wo k einen beliebigen Werth haben kann. Man bezeichne diese [*nemlich*

wiederholter Functionen.

die identische] Function durch z, so erhält man, wenn man $x+k$ statt x setzt, $z+k\frac{dz}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2}$.... statt z und folglich, für jeden beliebigen Werth von k, die Gleichung

$$z+k\frac{dz}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2}\ldots\ldots=0,$$

woraus folgt

$$z=0,\ \frac{dz}{dx}=0,\ \frac{d^2z}{dx^2}=0\ etc.$$

Nun aber ist $z=F(x,y)$, und vermöge der obigen Ausdrücke,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dF(x,y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dF(x,y)}{dx};$$

indem $\frac{dx}{dx}$, oder der Coefficient von k in $x+k$, 1 ist; also giebt die erste Ableitungs-Gleichung $\frac{dz}{dx}=0$:

$$\frac{dF(x,y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dF(x,y)}{dx}=0,$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{dF(x,y)}{dx}:\frac{dF(x,y)}{dy}.$$

Man findet auf diese Weise den Werth von $\frac{dy}{dx}$ in x und y. Hieraus kann man weiter, wenn man immer y als Function von x betrachtet, den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ in x und y finden. Denn setzt man,

Ableitung

der Kürze wegen, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, so ist die erste Ableitung von $f(x,y)$ von der Form $\frac{dy}{dx}\frac{df(x,y)}{dy}$ $+ \frac{df(x,y)}{dx}$, oder, wenn man für $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth setzt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y)\frac{df(x,y)}{dy} + \frac{df(x,y)}{dx} \text{ u. s. w.}$$

Die nemlichen Werthe für $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$ würde man aus den Gleichungen $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ u. s. w. finden. [*Man sehe über die Ableitung unentwickelt gegebener Functionen die Anmerkungen S.* 58. *etc. im ersten Bande.*]

60.

Wäre, allgemeiner, die Gleichung

$$F(y, p, q \ldots) = 0$$

gegeben [*worin y, p, q sämmtlich als Functionen von x betrachtet werden und zwar p, q als bestimmte, y als eine unbestimmte Function von x, deren Form erst aus der Gleichung gefunden werden muss*], so erhält man auf eine ähnliche Weise [*wenn man, der Kürze wegen $F(y, p, q \ldots)$ durch u bezeichnet*] für die erste Ableitungs-Gleichung der Gleichung $u = 0$,

$$\frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} \ldots = 0,$$

wiederholter Functionen.

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} \ldots}{\frac{du}{dy}}.$$

Betrachtet man von Neuem $\frac{dy}{dx}$ als eine Function von $y, p, q \ldots \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx} \ldots$, so ist die erste Ableitung dieser Function dem Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich u. s. w.

61.

Wären zwei [*von x abhängige*] Grössen y und z durch die Gleichungen

$$u = F(y, z, p, q \ldots) = 0 \text{ und}$$
$$v = f(y, z, p, q \ldots) = 0$$

gegeben, so könnte man durch das nemliche Verfahren unmittelbar die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ in $y, z, p, q \ldots$ finden. Denn es fänden alsdann die zwei Ableitungs-Gleichungen

$$\frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} \ldots = 0$$

und

$$\frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dv}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{dv}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} \ldots = 0$$

Statt, woraus man $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ finden könnte u. s. w.

Ableitung

62.

Diese Regeln sind hinreichend, die Ableitung einer beliebigen Function einer einzelnen veränderlichen Grösse von jeder Ordnung zu finden, die Function mag entwickelt, durch bestimmte Ausdrücke, oder unentwickelt, durch beliebige Gleichungen, gegeben sein.

[*Die hier folgende Stelle handelt von den neuen Zeichen. Sie konnte also wegbleiben. Lagrange sagt darin unter andern, dass man mit diesen Zeichen auch einzelne Theile einer Ableitung absondern und die übrigen zusammenfassen könne. Dieses liesse sich mit den alten Zeichen etwa, wie folgt, thun. Z. B. wenn* $y = f(p, q, r \ldots)$ *wäre, so könnte man schreiben*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{d(y(p))}{dx},$$

wo dann $\frac{d(y(p))}{dx}$ *bedeutete, dass* p, *in* y, *als unveränderlich betrachtet werden soll, weil die Ableitung in Rücksicht auf* $\frac{dy}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$, *schon genommen ist, so dass also* $\frac{d(y(p))}{dx}$ *den ganzen übrigen Theil von* $\frac{dy}{dx}$ *bezeichnet.*]

63.

Obgleich es besser ist, die Ableitungen der verschiedenen Ordnungen, eine aus der andern zu ent-

wiederholter Functionen.

wickeln, weil man sie auf diese Weise alle nach einerlei Regel und durch einerlei Operation findet, und auch selbst in dieser stufenweisen Entwickelung das Wesen und der Algorithmus der Ableitungs-Rechnung besteht, so giebt es doch Fälle, in welchen man, durch die unmittelbare Untersuchung der auf einander folgenden Glieder der Reihe, die Ableitungen einer Function directer und allgemeiner finden kann. Diese Fälle sind diejenigen, wenn durch bekannte und einfache Ausdrücke die Entwickelung der Function in eine Reihe leicht ausführbar ist.

Es sey nemlich allgemein

$$y = f(p, q \ldots),$$

wo $p, q \ldots$ Functionen von x sind, so erhält man, wenn man $x + k$ statt x setzt,

$$y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \ldots$$

$$= f\left(p + k\frac{dp}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2} \ldots, q + k\frac{dq}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2q}{dx^2} \ldots, \ldots\right).$$

Diese Gleichung findet unabhängig von der unbestimmten Grösse k Statt. Kann man also das zweite Glied direct in eine Reihe von der Form

$$f(p, q \ldots) + kP + k^2 Q + k^3 R \ldots$$

entwickeln, so erhält man auf der Stelle

$$\frac{dy}{dx} = P, \ \tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = Q, \ \frac{1}{2 \cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3} = R \ldots$$

I. Es sey z. B. $y = pq$, so ist der Ausdruck

$$\left(p + k\frac{dp}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2} \ldots\right)\left(q + k\frac{dq}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2q}{dx^2} \ldots\right)$$

in eine Reihe aufzulösen, welches, wie leicht zu sehen [*nemlich, wenn man die beiden Reihen in einander multiplicirt*]

$$\frac{dy}{dx} = p\frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}p\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dq}{dx} + \tfrac{1}{2}q\frac{d^2p}{dx^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{2.3}p\frac{d^3q}{dx^3} + \tfrac{1}{2}\frac{dp}{dx}\cdot\frac{d^2q}{dx^2} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\cdot\frac{dq}{dx} + \frac{1}{2.3}q\frac{d^3p}{dx^3}$$

und allgemein

$$\frac{1}{2.3\ldots m}\frac{d^my}{dx^m} = \frac{1}{2.3\ldots m}.p\frac{d^mq}{dx^m} + \frac{1}{2.3\ldots m-1}\frac{dp}{dx}\cdot\frac{d^{m-1}q}{dx_m^{-1}}$$

$$+\frac{1}{2.2.3\ldots.m-2}\frac{d^2p}{dx^2}\cdot\frac{d^{m-2}q}{d^{m-2}} + \frac{1}{2.3.2.3\ldots m-3}\frac{d^3p}{dx^3}\cdot\frac{d^{m-3}q}{d^{m-3}}$$

.

giebt, so, dass man, wenn man mit $2.3\ldots.m$ multiplicirt, den allgemeinen Ausdruck

$$\frac{d^my}{dx^m} = p\frac{d^mq}{dx^m} + m\frac{dp}{dx}\cdot\frac{d^{m-1}q}{dx^{m-1}} + \frac{m.m-1}{2}\cdot\frac{d^2p}{dx^2}\cdot\frac{d^{m-2}q}{dx^{m-2}}\ldots.$$

erhält.

II. Allgemeiner, sey $y = pqr\ldots.$, so findet man auf dieselbe Weise, dass die Ableitung $\frac{1}{2.3\ldots.m}\frac{d^my}{dx^m}$ aus so viel Gliedern von der Form

$$\frac{\frac{d^\lambda p}{dx^\lambda}\cdot\frac{d^\mu q}{dx^\mu}\cdot\frac{d^\nu r}{dx^\nu}\ldots.}{1.2.3\ldots.\lambda \times 1.2.3\ldots.\mu \times 1.2.3\ldots.\nu\ldots.}$$

wiederholter Functionen.

zusammengesetzt ist, als verschiedene Werthe für die Grössen λ, μ, ν.... in der Gleichung

$$\lambda + \mu + \nu \ldots = m$$

möglich sind.

III. Man setze

$$p = e^{ax}, \; q = e^{bx}, \; r = e^{ex} \ldots,$$

wo e diejenige Grösse bezeichnet, deren natürlicher Logarithme $= 1$ ist, so ist [*wenn* $y = pqr \ldots$]

$$y = e^{(a+b+e\ldots)x}.$$

Hiervon ist die mte Ableitung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (a+b+c\ldots)^m y,$$

desgleichen ist

$$\frac{d^\lambda p}{dx^\lambda} = a^\lambda p, \; \frac{d^\mu q}{dx^\mu} = b^\mu q, \; \frac{d^\nu r}{dx^\nu} = c^\nu r \ldots$$

[*Dieses giebt für das obige allgemeine Glied von* $\frac{d^m y}{dx^m}$,

$$\frac{a^\lambda p \,.\, b^\mu q \,.\, c^\nu r \ldots}{2.3\ldots\lambda \times 2.3\ldots\mu \times 2.3\ldots\nu\ldots},$$

oder, weil $pqr\ldots = y$ *ist,*

$$\frac{a^\lambda \,.\, b^\mu \,.\, c^\nu \ldots y}{2.3\ldots\lambda \times 2.3\ldots\mu \times 2.3\ldots\nu\ldots}.$$

Dergleichen Glieder machen zusammen $\frac{d^m y}{dx^m}$ *aus,*

Ableitung

welches $= (a+b+c\ldots\ldots)^m y$ *war.*] Daraus folgt, dass

$$\left[in\ \frac{1}{2.3\ldots.m}\cdot\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{(a+b+c\ldots.)^m y}{2.3\ldots.m}\right]$$ die

Grösse $\frac{(a+b+c\ldots.)^m}{2.3\ldots.m}$ in so viel Glieder von der Form

$$\frac{a^\lambda . b^\mu . c^\nu \ldots}{2.3\ldots\lambda \times 2.3\ldots\mu \times 2.3\ldots\nu\ldots},$$

entwickelt werden kann, als Gleichungen

$$\lambda + \mu + \nu \ldots. = m$$

möglich sind, welches mit Demjenigen übereinkommt, was wir am Ende der vierten Vorlesung auf einem andern Wege fanden.

IV. Man setze jetzt

$$p = x^a,\ q = x^b,\ r = x^c \ldots.,$$

so erhält man

$$y = x^{a+b+c\ldots.} = x^A,$$

wenn $a+b+c\ldots. = A$ ist.

Nimmt man die Ableitungen von den Ordnungen m, λ, μ, $\nu\ldots.$, so erhält man

$$\frac{d^m y}{dx^m} = A(A-1)(A-2)\ldots.(A-m+1)x^{A-m}$$

$$\frac{d^\lambda p}{dx^\lambda} = a(a-1)(a-2)\ldots.(a-\lambda+1)x^{a-\lambda}$$

$$\frac{d^\mu q}{dx^\mu} = b(b-1)(b-2)\ldots.(b-\mu+1)x^{b-\mu}$$

$$\frac{d^\nu r}{dx^\nu} = c(c-1)(c-2)\ldots.(c-\nu+1)x^{c-\nu}.$$

wiederholter Functionen.

Da also nun

$$A - m = [a + b + c \dots - \lambda - \mu - \nu \dots =]$$
$$a - \lambda + b - \mu + c - \nu \dots,$$

so ist die Grösse $\frac{A(A-1)(A-2)\dots(A-m+1)}{2.3\dots m}$

$\left[\textit{oder } \frac{1}{2.3\dots m} \cdot \frac{d^m y}{dx^m}\right]$ aus so vielen Gliedern von der Form

$$\frac{a(a-1)(a-2)\dots-(a-\lambda+1)}{2.3\dots\lambda}$$
$$\times \frac{b(b-1)(b-2)\dots-(b-\mu+1)}{2.3\dots\mu}$$
$$\times \frac{c(c-1)(c-2)\dots-(c-\nu+1)}{2.3\dots\nu} \times \dots$$

[*welche man erhält, wenn man die obigen Werthe von* $\frac{d^\lambda p}{dx^\lambda}$, $\frac{d^\mu q}{dx^\mu}$, $\frac{d^\nu r}{dx^\nu}$ *in den Ausdruck des allgemeinen Gliedes von* $\frac{d^m y}{dx^m}$, *in (II.) substituirt*] zusammengesetzt, als Gleichungen

$$m = \lambda + \mu + \nu \dots$$

möglich sind, welches eine bemerkenswerthe Analogie der Entwickelung einer Potenz eines Polynomiums mit derjenigen eines continuirlichen Products [*einer Factorielle oder Facultät*] zeigt.

Hat man nemlich eine Potenz, wie

$$(a + b + c \dots)^m$$

nach ihren verschiedenen Gliedern entwickelt, so er-

Ableitung

hält man sogleich die Entwickelung des stetigen Products

$$A(A-1)(A-2)\ldots\ldots(A-m+1),$$

worin

$$A = a+b+c\ldots\ldots$$

ist, wenn man in die Entwickelung der Potenz, statt der Potenzen a^λ, b^μ, c^ν.... die continuirlichen Producte

$$a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-\lambda+1)$$
$$b(b-1)(b-2)\ldots\ldots(b-\mu+1)$$
$$c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-\nu+1) \text{ etc.}$$

setzt.

[*Nemlich, wenn* $y = pqr\ldots\ldots$, *so ist das allgemeine Glied des Ausdrucks der mten Ableitung* $\frac{d^m y}{dx^m}$, *dividirt durch* $2.3\ldots\ldots m$, *zu Folge (II.)* =

$$\frac{\frac{d^\lambda p}{dx^\lambda}\cdot\frac{d^\mu q}{dx^\mu}\cdot\frac{d^\nu r}{dx^\nu}\ldots\ldots}{2.3\ldots\ldots\lambda\times 2.3\ldots\ldots\mu\times 2.3\ldots\ldots\nu\ldots\ldots}.$$

Dieses allgemeine Glied geht, wenn man $\frac{d^m y}{dx^m}$ *dadurch, dass man* $p = e^{ax}$, $q = e^{bx}$, $r = e^{cx}$.... *setzt, auf die Form* $(a+b+c\ldots\ldots)^m y$ *bringt, in*

$$\frac{a^\lambda\,.\,b^\mu\,.\,c^\nu\ldots\ldots y}{2.3\ldots\ldots\lambda\times 2.3\ldots\ldots\mu\times 2.3\ldots\ldots\nu\ldots\ldots}$$

über (III.), so dass also das allgemeine Glied der Entwickelung von $(a+b+c\ldots\ldots)^m$

a^λ

wiederholter Functionen.

$$\frac{a^{\lambda} \cdot b^{\mu} \cdot c^{\nu} \ldots}{2.3 \ldots \lambda \times 2.3 \ldots \mu \times 2.3 \ldots \nu \ldots}$$

ist.

Bringt man hingegen $\frac{d^m y}{dx^m}$, *dadurch, dass man* $p = x^a$, $q = x^b$, $r = x^c \ldots$ *setzt, auf die Form* $A(A-1)(A-2)\ldots(A-m+1)x^{A-m}$, *wo* $A = a + b + c \ldots$ *ist, so geht das allgemeine Glied in*

$$x^{A-m} \cdot \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-\lambda+1)}{2.3 \ldots \lambda} \times \frac{b(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+1)}{2.3 \ldots \mu} \times \ldots$$

über, so dass das allgemeine Glied der Entwickelung von $A(A-1)(A-2)\ldots(A-m+1)$,

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-\lambda+1)}{2.3 \ldots \lambda} \times \frac{b(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+1)}{2.3 \ldots \mu} \times \ldots$$

ist. Man darf also nur, um aus der Entwickelung von $(a+b+c\ldots)^m$ *diejenige von* $A(A-1)(A-2)\ldots(A-m+1)$ *zu finden,*

$a(a-1)(a-2)\ldots(a-\lambda+1)$ *statt* a^{λ}

$b(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+1)$ *statt* b^{μ}

u. s. w. setzen.]

Man findet einen directen Beweis dieses Satzes für das Binomium in einem so eben unter dem Titel: Analyse des refractions erschienenen Werke von Kramp.

Ableitung

64.

Wir wollen diese Vorlesung mit einer wichtigen Bemerkung über die Natur der Ableitungen beschliessen.

Es ist nemlich, aus der Art, wie die Ableitungen von den Stammgrössen abhängen, leicht zu sehen, dass die Ableitungen so völlig bestimmt sind, dass eine gegebene Function, in jeder Ordnung, nur eine einzige Ableitung haben kann.

Hingegen mit den Stammgrössen verhält es sich, in Beziehung auf die Ableitungen, nicht eben so; denn da die Ableitung jeder Constante Null ist, so folgt, dass eine Function, wenn sie die Stammgrösse einer andern gegebenen Function ist, es auch dann noch bleibt, wenn man zu ihr eine beliebige Constante hinzuthut, oder davon hinwegnimmt. Eine gegebene Function kann also, was die Constante betrifft, eine unendliche Menge verschiedener Stammgrössen haben. Aber es folgt noch nicht, dass alle die möglichen Stammgrössen um nichts weiter als eine Constante verschieden sein können. Wir wollen diese Frage untersuchen.

Es sey die Function fx gegeben und es werde angenommen, dass Fx und φx zwei Stammgrössen davon sind, so ist, der Voraussetzung gemäss,

$$\frac{dFx}{dx} = fx \text{ und } \frac{d\varphi x}{dx} = fx.$$

Desgleichen, wenn man die Ableitungen, weiter, der Reihe nach nimmt,

wiederholter Functionen.

$$\frac{d^2 Fx}{dx^2} = \frac{dfx}{dx}, \quad \frac{d^3 Fx}{dx^3} = \frac{d^2 fx}{dx^2} \ldots\ldots$$

$$\frac{d^2 \varphi x}{dx^2} = \frac{dfx}{dx}, \quad \frac{d^3 \varphi x}{dx^3} = \frac{d^2 fx}{dx^2} \ldots\ldots$$

Nun betrachte man die Grössen $F(x+k)$ und $\varphi(x+k)$ so erhält man, wenn man entwickelt,

$$F(x+k) = Fx + k\frac{dFx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2 Fx}{dx^2} \ldots\ldots,$$

und, wenn man die Werthe von $\frac{dFx}{dx}$, $\frac{d^2 Fx}{dx^2} \ldots\ldots$ substituirt,

$$F(x+k) = Fx + kfx + \frac{k^2}{2}\frac{dfx}{dx} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^2 fx}{dx^2} \ldots\ldots$$

und eben so

$$\varphi(x+k) = \varphi x + kfx + \frac{k^2}{2}\frac{dfx}{dx} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^2 fx}{dx^2} \ldots\ldots$$

Zieht man den einen Ausdruck von dem andern ab, so erhält man

$$F(x+k) - \varphi(x+k) = Fx - \varphi x.$$

Da diese Gleichung Statt finden soll, was auch x und k sein mögen, das erste Glied aber eine Function von $x+k$, das zweite Glied eine gleiche Function von x ist, so ist klar, dass diese Function nichts anders als eine, von x und k unabhängige, Constante sein kann. [*Nemlich die Grösse* $Fx' - \varphi x'$ *bleibt, der gefundenen Gleichung zu Folge,* $= Fx - \varphi x$, *wenn man auch* x *einen beliebigen andern Werth* $x+k$ *giebt. Daraus folgt, dass* $Fx - \varphi x$ *gar nicht von* x *abhängen kann, und mithin constant sein muss.*] Es ist also nothwendig

Ableitung wiederholter Functionen.

$$Fx - \varphi x = C,$$

wenn C eine Constante bedeutet, und folglich

$$Fx = \varphi x + C;$$

woraus man sieht, dass, wenn φx eine Stammgrösse von fx ist, jede andere Stammgrösse Fx der nemlichen Function fx, von der ersten um Nichts weiter als um eine Constante verschieden sein kann.

Es folgt also [*aus diesem allgemeinen und sinnreichen Beweise*], dass man, wenn man auf irgend eine Weise eine Stammgrösse zu einer gegebenen Function gefunden hat und noch eine willkürliche Constante hinzuthut, den vollständigen Ausdruck der Stammgrösse der gegebenen Function erhält.

Siebente Vorlesung.

Vom Uebertragen der Abhängigkeit der veränderlichen Grössen in den Ableitungen.

65.

Wir haben oben gesehen, wie die Ableitungen aus den Stammgrössen durch blosse Entwickelung entstehen, wenn man der veränderlichen Grösse eine unbestimmte Zunahme beilegt.

Jede Ableitung bezieht sich also nothwendig auf eine veränderliche Grösse, und eine Function, welche mehrere Grössen enthält, kann auch verschiedene Ableitungen haben, nach den Grössen, welche man als veränderlich betrachtet. Hängen diese Grössen von einander ab, so muss es nothwendig auch eine Abhängigkeit zwischen den auf dieselben sich beziehenden Ableitungen geben, vermittelst welcher man die Ableitungen, eine aus der andern, finden kann. Da diese Abhängigkeit ein wichtiger Gegenstand der Theorie der Functionen ist, so wollen wir uns damit in der gegenwärtigen Vorlesung beschäftigen.

Vom Uebertragen der Abhängigkeit

66.

Betrachtet man y als eine einfache Function von x, so geht, wie man weiss, y in

$$y + K\frac{dy}{dx} + \frac{K^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\ldots$$

über, wenn man $x + K$ statt x setzt. Nimmt man nun an, x selbst sey wieder eine Function irgend einer veränderlichen Grösse t und man wolle y als Function von t betrachten, so geht y, wenn man $t + K$, oder vielmehr, um die beiden Zunahmen von t und x nicht zu verwechseln, $t + k$ statt t setzt, in

$$y + k\frac{dy}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

über. Nun aber wird

$$x + k\frac{dx}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}$$

aus x, wenn man in x, $t + k$ statt t setzt. Also ist

$$K = k\frac{dx}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Setzt man diesen Werth von k, oben, statt K, so erhält man für den Werth von y, welcher entsteht, wenn man $t + k$ statt t setzt, auch folgenden Ausdruck

$$y + \frac{dy}{dx}\left(k\frac{dx}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\ldots\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\left(k\frac{dx}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\ldots\right)^2\ldots$$
$$= y + k\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)\ldots$$

in den Ableitungen.

Diese Grösse ist mit $y + k\frac{dy}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dt}\ldots$ identisch, also ist, wenn man die Coefficienten zu gleichen Potenzen von k vergleicht,

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d^2y}{dt^2} \text{ etc.}$$

[*Die Uebersetzung ist wegen der veränderten Zeichen nicht wörtlich, jedoch der Sinn der Worte der nemliche.*]

Die erste Gleichung giebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt},$$

die zweite giebt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

und, wenn man den eben gefundenen Werth von $\frac{dy}{dx}$ substituirt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3.$$

Die dritte Gleichung [*nemlich die Vergleichung der Coefficienten zur dritten Potenz von k*] würde $\frac{d^3y}{dx^3}$ geben, und so weiter. Man kann aber auch, vermöge der gleichförmigen Abhängigkeit, die zwischen den Ableitungen Statt finden muss, $\frac{d^2y}{dx}$ aus $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ aus $\frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w. unmittelbar finden.

Vom Uebertragen der Abhängigkeit

Denn da z. B. die erste Ableitung $\frac{dy}{dx}$, von y nach x, gleich $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$ ist, das heisst, gleich der ersten Ableitung von y nach t, dividirt durch die erste Ableitung von x nach t, so muss auch $\frac{d^2y}{dx^2}$, welches die erste Ableitung von $\frac{dy}{dx}$ nach x ist, gleich der ersten Ableitung von $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$ nach t, dividirt durch die erste Ableitung von x nach t sein. Nun ist die erste Ableitung von $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$ nach t gleich $\frac{d^2y}{dt^2}:\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, also ist

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^3,$$

wie oben u. s. w.

67.

Durch Substitution dieser Ausdrücke schafft man gleichsam aus den Ausdrücken der Ableitungen Dasjenige weg, was sich auf die veränderlichen Grössen bezieht, von welchen sie anfänglich abhingen und verallgemeinert sie, so dass sie nunmehr beliebig auf andere veränderliche Grössen bezogen werden können.

Die Ableitungen von y wurden aber dadurch auf die veränderliche Grösse x bezogen, dass sie durch die Zunahme K entstanden, welche man dieser Grösse beilegte, statt dass, wenn man die Ableitungen auf

in den Ableitungen.

eine beliebige andere Grösse, z. B. t bezog, von welcher x eine Function sein sollte, die Zunahme von x, $k\frac{dx}{dt}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\ldots$ war, wo k die Zunahme der neuen veränderlichen Grösse t ist. Da also der besondere Fall, in welchem die Zunahme von x blos t ist, aus dem allgemeinen Ausdrucke der Zunahme von x entsteht, wenn man darin $\frac{dx}{dt}=1$ [*und folglich* $\frac{d^2x}{dt^2}=0$ *etc.*] setzt, so folgt, dass $\frac{dx}{dt}=1$, die Bedingung ist, unter welcher sich die Ableitungen auf x beziehen und dass man, im Allgemeinen, um die Ableitungen auf eine beliebige oder veränderliche Grösse zu beziehen, nur die erste Ableitung dieser Grösse gleich Eins setzen darf.

Es folgt also, dass man, wenn irgend ein Ausdruck mit der Grösse y, die Ableitungen $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ nach x enthält, und man will selbigen auf irgend eine andre Grösse, z. B. t beziehen,

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt} \text{ statt } \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}\right)}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

$$\text{statt } \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}\right)}{dt}\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{d^2y}{dt^2}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^3\right)}{dt}$$

Vom Uebertragen der Abhängigkeit

$$= \frac{d^3y}{dt^3} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - 3\,\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{d^2x}{dt^2} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^4$$

$$- \frac{dy}{dt}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\;\left(\frac{dx}{dt}\right)^4 - 3\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 : \left(\frac{dx}{dt}\right)^5\right) \text{ statt } \frac{d^3y}{dx^3}$$

u. s. w. setzen muss. Wenn die neue veränderliche Grösse t selbst [*rückwärts*] eine beliebige Function von x und y ist, so darf man nur $\frac{dt}{dx} = 1$ und folglich $\frac{d^2t}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3t}{dx^3} = 0$ *etc.* setzen, so finden sich daraus die Werthe von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, oder von $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{t^2}$

68.

Dieser allgemeine Satz findet auf alle mögliche Ableitungen mit einer veränderlichen Grösse Anwendung. Er ist in der Functionen-Rechnung von grossem Nutzen und macht einen der Hauptgrundsätze für den Algorithmus des Calculs aus.

Der einfachste Fall ist, wenn y von x abhängt, also die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf x bezogen sind und man will, umgekehrt, x als Function von y betrachten und die Ableitungen von x auf y beziehen. Man darf in diesem Falle nur

$$\frac{dy}{dx} = 1,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ etc.}$$

setzen. Man muss also dann [*vermöge* 67.]

in den Ableitungen.

$$1 : \frac{dx}{dy} \text{ statt } \frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 \text{ statt } \frac{d^2y}{dx^2}$$

u. s. w. setzen. [*Nemlich es ist, allgemein, wie schon in der sechsten Vorlesung, namentlich in (55.) gezeigt, wenn y von x und x von t abhängt,* $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Daraus folgt weiter, ebenfalls den dortigen Sätzen zu Folge,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dt}$$

u. s. w. Ist nun $t = y$, *so ist* $\frac{dy}{dt} = 1$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ *etc. also ist in diesem Falle*

$$1 = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$0 = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} \quad etc.$$

woraus folgt

$$\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{dx}{dy} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$$

u. s. w. wie im Text.]

In der vierten Vorlesung ist z. B.

I. gefunden, dass, wenn $y = a^x$ gesetzt wird,

Vom Uebertragen der Abhängigkeit

$$\frac{dy}{dx} = a^x \overset{e}{log}\, a = y \overset{e}{log}\, a$$

ist; also findet man auf der Stelle die Ableitung $\frac{dx}{dy}$ von x nach y, wenn man blos $1 : \frac{dx}{dy}$ statt $\frac{dy}{dx}$ setzt, welches $\left[1 : \frac{dx}{dy} = y \overset{e}{log}\, a, \textit{ folglich}\right]$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y \overset{e}{log}\, a}$$

giebt. Da [*in* $a^x = y$] x der Logarithme von y für die Basis a ist, so erhält man auf diese Weise die erste Ableitung des Logarithmen.

II. Ist $y = \sin x$, so ist, zu Folge der fünften Vorlesung,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \ [= \sqrt{(1 - y^2)}].$$

Um also umgekehrt die erste Ableitung $\frac{dx}{dy}$ des Winkels x nach seinem Sinus y zu finden, darf man nur $1 : \frac{dx}{dy}$ statt $\frac{dy}{dx}$ setzen, welches

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)}}$$

giebt.

III. Wenn $y = \overline{\cos}\, x$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = - \sin x \ [= - \sqrt{(1 - y^2)}];$$

also erhält man auf dieselbe Weise

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{1}{\sin x} = - \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)}},$$

welche Resultate mit denen, die oben auf einem weitläuftigeren Wege gefunden wurden, übereinstimmen. [*Da die kürzeste und einfachste Methode gewöhnlich, wie auch hier, die klarere ist, so ist sie die bessere und tritt also mit Recht an die Stelle der obigen und es ist gut, wenn die gegenwärtige allgemeine Untersuchung derjenigen der besondern Fälle vorhergeht.*]

IV. Am Ende der sechsten Vorlesung [58. *IV.*] sahen wir, dass wenn $y = tang\, x$ gesetzt wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\, x^2}$$

ist. Will man also die erste Ableitung eines Kreisbogens nach seiner Tangente haben, so findet man auf der Stelle

$$\frac{dy}{dx}\left[= 1 : \frac{dy}{dx}\right] = cos\, x^2 \left[= \frac{1}{sec\, x^2}\right] =$$

$$\frac{1}{1 + tang\, x^2} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Allgemein ist, wenn man $y = tang\, p$ setzt [*wo p von x abhängt*]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} : cos\, p^2,$$

[*weil* $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$ *und* $\frac{dy}{dp} = \frac{1}{cos\, p^2}$ *ist.*]

Also ist umgekehrt

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\, cos\, p^2,$$

wo p auf irgend eine Weise von x abhängen kann.

Vom Uebertragen der Abhängigkeit

Will man nun p als Function von y betrachten und die Ableitung $\frac{dp}{dx}$ auf die veränderliche Grösse y beziehen, so ist $\frac{dy}{dx} = 1$ [*nemlich* $\frac{dy}{dx}$ *ist dann* $\frac{dy}{dy}$, *folglich gleich* 1]. Also ist dann

$$\frac{dp}{dy} = \cos p^2 = \frac{1}{1+y^2},$$

wie oben.

Aus $\frac{dx}{dy} = \cos x^2$ lassen sich leicht die Ableitungen von x in den folgenden Ordnungen finden. Man erhält

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -2\cos x \sin x \frac{dx}{dy} = -\sin 2x \frac{dx}{dy} = -\sin 2x \cos x^2,$$

wenn man den Werth von $\frac{dx}{dy}$ substituirt. Man erhält ferner, wenn man von Neuem die Ableitung nimmt,

$$\frac{d^3x}{dy^3} = +2\cos x \sin x \sin 2x \frac{dx}{dy} - 2\cos 2x \cos x^2 \frac{dx}{dy}$$

$$= -2\cos 3x \cos x \frac{dx}{dy} = -2\cos 3x \cos x^3.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man

$$\frac{d^4x}{dy^4} = 2.3 \frac{dx}{dy} (\sin 3x \cos x^3 + \cos 3x \sin x \cos x^2)$$

$$= 2.3 \frac{dx}{dy} \sin 4x \cos x^2 = 2.3 \sin 4x \cos x^4$$

$$\frac{d^5x}{dy^5} = 2.3.4 \frac{dx}{dy} (\cos 4x \cos x^4 - \sin 4x \sin x \cos x^3)$$

$$= 2.3.4 \frac{dx}{dy} \cos 5x \cos x^3 = 2.3.4 \cos 5x \cos x^5$$

in den Ableitungen.

u. s. w. Substituirt man noch diese Ableitungen, die von x nach y, das heisst, in dem Sinne, dass $x = fy$ ist, gefunden worden sind, in den allgemeinen Ausdruck

$$x + k\frac{dx}{dy} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dy^2}\ldots,$$

so erhält man den zu $y + k$ gehörigen Werth von x.

Also drückt den Bogen, dessen Tangente [$= y + k =$:] $\tang x + k$ ist, die Reihe

$$x + k \cos x \cos x - \frac{k^2}{2} \cos x^2 \sin 2x - \frac{k^3}{3} \cos x^3 \cos 3x$$
$$+ \frac{k^4}{4} \cos x^4 \sin 4x + \frac{k^5}{5} \cos x^5 \sin 5x \ldots.$$

aus, welche wegen ihrer Einfachheit und Allgemeinheit merkwürdig ist.

Setzt man $x = 0$, so erhält man

$$\operatorname{arc\,tang} k = k - \frac{k^3}{3} + \frac{k^4}{5}\ldots,$$

welches der bekannte Leibnitzsche Ausdruck ist. Man durfte aber nicht x eher Null setzen, als bis man der Form der Reihe versichert war.

Achte Vorlesung.

Von Entwickelung der Functionen, wenn man der veränderlichen Grösse einen bestimmten Werth beilegt. Fälle, in welchen die allgemeine Regel fehlt (est en defaut). Untersuchung dieser Fälle. Von dem Werthe der Brüche, deren Zähler und Nenner zugleich verschwinden.

69.

Die Theorie der Ableitungen ist auf die Entwickelung der Functionen gegründet, welche entsteht, wenn man die veränderlichen Grössen um unbestimmte Grössen zunehmen lässt. In der zweiten Vorlesung zeigten wir, dass diese Entwickelung die, der veränderlichen Grösse hinzugesetzte Grösse, nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten enthalten kann, so lange der Werth der hinzugesetzten Grösse unbestimmt sein soll. Aus dieser Form fanden wir sodann ferner die Gesetze der Ableitungen

gen gefunden. Ehe wir weiter gehen, ist es nöthig, die Fälle, in welchen allenfalls die allgemeine Entwickelung fehlen könnte und das was daraus für die Ableitungen folgt, zu untersuchen. [*Wegen des Ausdruckes en défaut erinnere man sich der Bemerkungen im 5ten Abschnitte des ersten Bandes.*]

70.

In der nemlichen Vorlesung haben wir gesehen, dass die Reihe, welche die Entwickelung von $f(x+k)$ giebt, keine Potenz von k mit negativen Exponenten enthalten kann, so lange nicht fx unendlich gross ist, weil die Glieder, welche dergleichen Potenzen von k enthielten, unendlich gross seyn würden. Eben so lässt sich zeigen, dass die Reihe kein Glied enthalten kann, welches mit $log\ k$, oder mit irgend einer Potenz von $log\ k$ von positiven Exponenten multiplicirt ist, so lange nicht fx unendlich gross ist, weil dergleichen Glieder selbst unendlich gross seyn würden, wenn man $k=0$ setzte. Soll aber die Bedingung $fx=\infty$ erfüllt werden, so muss x irgend einen bestimmten Werth haben, welchen man findet, wenn man die Gleichung

$$fx=\frac{1}{0}, \text{ oder } \frac{1}{fx}=0$$

auflöset.

Es sey a eine Wurzel der Gleichung $\frac{1}{fx}=0$, so dass

$$\frac{1}{fx}=\frac{(x-a)^m}{Fx}$$

Ausnahme - Fälle

ist, wo m eine ganze positive Zahl und Fx eine Function von x bedeutet, die für $x = a$ weder Null noch unendlich ist. [*Nemlich, wenn* $x = a$ *eine Wurzel der Gleichung* $\frac{1}{fx} = 0$ *ist, so ist* $\frac{1}{fx}$ *nothwendig durch* $x - a$ *theilbar, und zwar* m *mal, wenn die Gleichung etwa* m *gleiche Wurzeln,* $= a$, *hat.*]

Setzt man $x + k$ statt x und $x = a$, so erhält man [*weil dann* $x + k - a = k$ *und* $x + k = a + k$ *ist,*]

$$f(x + k) = \frac{F(a + k)}{k^m},$$

woraus man sieht, dass die Reihe, welche man erhält, wenn man $f(x + k)$ entwickelt, in diesem Falle Glieder von der Form $\frac{1}{k^m}$, $\frac{1}{k^{m-1}}$ enthalten kann

$$\left[\textit{denn}\ \frac{F(a+k)}{k^m}\ \textit{giebt}\ \frac{Fa + k\frac{dFa}{da} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fa}{da^2}\ldots}{k^m}\right.$$

$$\left. = \frac{Fa}{k^m} + \frac{dFa}{da} : k^{m-1} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2Fa}{da^2} : k^{m-2} \ldots\right]$$

71.

Wir wollen nun die Fälle untersuchen, in welchen die Entwickelung k in Potenzen von, zwar positiven, aber gebrochenen Exponenten enthalten kann. Der Beweiss, welchen wir für die Nicht-Existenz von dergleichen Potenzen von k gaben ist darauf gegründet, dass solche Potenzen die Zahl der

Wurzelgrössen in der Entwickelung von $f(x+k)$ vermehren würden, während offenbar $f(x+k)$ nicht mehr Wurzelgrössen enthalten kann als fx, so lange der Werth von x unbestimmt ist. Dieser Beweis hört auf, sobald man x einen bestimmten Werth beilegt, welcher eine Wurzelgrösse in fx verschwinden macht; denn alsdann kann diese Wurzelgrösse durch eine Wurzelgrösse mit k in $f(x+k)$ ersetzt werden müssen. Man setze z. B. fx enthalte eine Wurzelgrösse, welche für $x = a$ verschwindet, wie $(x-a)^{\frac{m}{n}}$, wo m und n ganze Zahlen sind, so enthält $f(x+k)$ die zugehörige Wurzelgrösse $(x-a+k)^{\frac{m}{n}}$, welche für $x = a$, $k^{\frac{m}{n}}$ giebt, so dass die Entwickelung von $f(x+k)$, nach Potenzen von k, in diesem Falle allerdings die Wurzelgrösse $k^{\frac{m}{n}}$ und alle Potenzen derselben von ganzen positiven Exponenten enhtalten kann.

Die Folgerung würde nicht Statt finden, wenn der besondere Werth von x nicht die Wurzelgrösse selbst, sondern nur etwa eine Grösse, in welche sie multiplicirt ist, verschwinden machte. Denn obgleich alsdann die Wurzelgrösse auf eine solche andere Weise in fx wegfallen könnte, so könnte sie gleichwohl in den Ableitungen $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx}$ *etc.* bleiben, die in $f(x+k)$ vorkommen, und dann bliebe der

Beweis gültig. Wenn also eine Wurzelgrösse, wie fx, etwa mit $(x-a)^m$ multiplicirt wäre, wo m eine ganze und positive Zahl bedeutet, so würde zwar diese Wurzelgrösse, für $x=a$, in fx verschwinden, hingegen in $f(x+k)$ würde sie mit $(x-a+k)^m$ multiplicirt seyn, welches für $x=a$, k^m giebt. Sie könnte also dann in der Entwickelung von $f(x+k)$ nicht eher als in dem Gliede erscheinen, welches k^m enthält, folglich würde sie in allen Ableitungen $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx}$.... bis zu $\frac{d^{m-1}fx}{dx^{m-1}}$, wegfallen, in den folgenden Ordnungen aber wiederum erscheinen, und die Entwickelung von $f(x+k)$ würde allemal noch die Wurzelgrösse allerdings enthalten. Es bleibt also nur der Fall übrig, wenn eine Wurzelgrösse in fx durch einen besondern Werth von x selbst zu Null wird. Nur in diesem Falle kann $f(x+k)$ Wurzeln von k enthalten und wir wollen nun sehen, wie man finden kann, ob solches der Fall sey.

72.

Zu dem Ende bemerke ich, dass die Ableitungen der Grösse $f(x+k)$ die nemlichen sind, man mag sie nach x oder nach k nehmen, weil die Zunahme von $x+k$ die nemliche ist, man mag zu x, oder zu k eine beliebige Grösse hinzuthun. Daraus folgt, dass man auch die Ableitungen $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$ *etc.*

der Entwickelung.

für jedes x erhält, wenn man, der Reihe nach, die Ableitungen von $f(x+k)$ nach k nimmt, und darin $k=0$ setzt. [*Denn da in* $f(x+k)$, x *ganz auf dieselbe Weise vorkommt, wie* k, *so muss es auch eben so in den Ableitungen von* $f(x+k)$ *vorkommen, man mag diese Ableitungen nach* k, *oder nach* x *nehmen. Setzt man also in den Ableitungen* $k=0$, *so erhält man das Nemliche, als wenn die Ableitungen von* fx *allein, ohne* k, *nach* x *genommeu wären.*]

Setzt man nun, die Entwickelung von $f(x+k)$ enthalte, für $x=a$ ein Glied mit k^m, wie Ak^m, wo A eine Function von a, und m eine ganze positive Zahl ist, so müssen die Ableitungen von $f(x+k)$ nach k, nemlich $\frac{df(x+k)}{dk}$, $\frac{d^2f(x+k)}{dk^2}$ *etc.*, wenn man sie entwickelt, Glieder wie

$$mAk^{m-1},\ m.m-1\,Ak^{m-2}\ etc.$$

enthalten. [*Denn diese Grössen sind die Ableitungen von* Ak^m *nach* k.] Setzt man also $k=0$ so folgt, dass die Grössen fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$...., für $x=a$, die Glieder

$$A0^m,\ mA0^{m-1},\ m.m-1\,A0^{m-2}\$$

enthalten müssen.

Ist m irgend eine negative Zahl, so sind diese Glieder alle unendlich gross.

Ist m eine positive gebrochene Zahl, so ist, wenn n die nächste grössere ganze Zahl bedeutet, das Glied

Ausnahme-Fälle

$m \cdot m - 1 \ldots\ldots m - n + 1 A o^{m-n}$ nebst allen folgenden unendlich gross; alle vorhergehende sind Null. Also sind die Ableitungen von der nten und den folgenden Ordnungen, für $x = a$, unendlich gross.

In diesem Falle also muss die Entwickelung von $f(x + k)$, wenn n der Zeiger der ersten von den Ableitungen ist, die unendlich gross sind, ein Glied von der Form k^m enthalten, wo m zwischen $n - 1$ und n liegt.

Ist n Null, oder fx selbst unendlich gross, so enthält die Entwickelung Potenzen von k mit negativen Exponenten.

73.

Von den Logarithmen lässt sich eben das sagen, was für Potenzen von k mit negativen Exponenten bewiesen worden. Denn am Ende der vierten Vorlesung [*in* 41.] wurde gezeigt, dass Logarithmen wie Potenzen mit gebrochenen, aber unendlich kleinen Exponenten zu betrachten sind, oder wie unendlich hohe Wurzeln, so dass es unendlich viele Logarithmen zu einer und derselben Zahl giebt.

Aus diesem Grunde kann zuweilen, wenn man eine Function nach den Potenzen einer und derselben Grösse in eine Reihe auflöset, der Logarithme dieser Grösse zwischen ihren Potenzen mit positiven und negativen Exponenten fallen, im Fall die Function selbst Logarithmen enthält. [*Nemlich, weil der Uebergang von Positiv zu Negativ Null und der*

der Entwickelung.

Logarithme als eine Potenz zu betrachten ist, deren Exponent verschwindet.]

Also kann die Entwickelung von $f(x+k)$, wenn fx Logarithmen enthält, in dem bestimmten Falle $x=a$, Glieder von der Form $k^m (\log k)^n$ enthalten. In den Ableitungen von $f(x+k)$ nach k können Glieder von der Form

$$k^{m-1} (\log k)^n \text{ und } k^{m-1} (\log k)^{n-1},$$

desgleichen von der Form

$$k^{m-2} (\log k)^n,\ k^{m-2} (\log k)^{n-1} \text{ und } k^{m-2} (\log k)^{n-2}$$

u. s. w. vorkommen. [*Denn die Ableitungen nach k, von dem Gliede $k^m (\log k)^n$, welches in $f(x+k)$ vorausgesetzt wird, sind*

$$\frac{d(k^m (\log k)^n)}{dk} = mk^{m-1}(\log k)^n + nk^m(\log k)^{n-1}\frac{1}{k}$$

$$= mk^{m-1}(\log k)^n + nk^{m-1}(\log k)^{n-1}$$

$$\frac{d^2(k^m (\log k)^n)}{dk^2} = m.m\text{-}1k^{m-2}(\log k)^n + mnk^{m-2}(\log k)^{n-1}$$

$$+ n.m-1\,k^{m-2}(\log k)^{n-1}$$

$$+ n.n-1\,k^{m-2}(\log k)^{n-2}$$

u. s. w., welches Glieder von der Form $k^{m-1}(\log k)^n$, $k^{m-1} (\log k)^{n-1}$, $k^{m-2} (\log k)^n$, $k^{m-2} (\log k)^{n-1}$, $k^{m-2} (\log k)^{n-2}$ etc. giebt.]

Nun ist $\log k$ unendlich gross für $k=0$, und jede Grösse von der Form $k^m (\log k)^n$ ist Null oder

Ausnahme-Fälle

unendlich gross, je nachdem m positiv oder negativ ist, was auch n seyn mag. [*Man setze nemlich* $k = \frac{1}{p}$, *so ist* $\log k = \log 1 - \log p = -\log p$, *also* $k^m (\log k)^n = \frac{(-\log p)^n}{p^m}$. *Es sey ferner* $\log p = q$, *so ist* $p = e^q$, *also*

$$k^m (\log k)^n = \frac{(-q)^n}{e^{mq}} = (-1)^n \frac{q^n}{e^{mq}}.$$

Nun ist $e^{mq} = 1 + mq + \frac{m^2 q^2}{2} + \frac{m^3 q^3}{2 \cdot 3} \ldots$, *also ist*

$$k^m (\log k)^n = \frac{(-1)^n}{q^{-n} + mq^{1-n} + \frac{m^2 q^{2-n}}{2} + \frac{m^3 q^{3-n}}{2 \cdot 3} \ldots}.$$

Für $k = 0$ *ist* $p = \infty$, *weil* $k = \frac{1}{p}$, *oder* $p = \frac{1}{k}$, *und* $q = \infty$, *weil* $q = \log p$.

Nun sey

erstlich m *positiv und* n *negativ, so folgt aus dem Ausdrucke* $k^m (\log k)^n$ *unmittelbar, dass der Werth desselben, für* $k = 0$, *Null ist. Denn alsdann sind beide Factoren desselben,* k^m *und* $(\log k)^n$, *Null, weil* $\log 0 = \infty$ *ist.*

Zweitens sey m *negativ und* n *positiv, so folgt grade das Entgegengesetzte, nemlich dass* $k^m (\log k)^n$, *für* $k = 0$, *unendlich gross ist.*

der Entwickelung.

Drittens sey m positiv und n positiv, so sind die ersten Glieder in der Reihe, die den Nenner des entwickelten Ausdrucks von $k^m (\log k)^n$ *ausmacht, Null, so lange der Exponent von q negativ ist, weil q unendlich gross und folglich z. B.* q^{-n} *Null ist. Da indessen der Exponent zu q in dieser Reihe nothwendig zuletzt positiv werden muss, indem n, in jedem Fall, so gross es auch seyn mag, von den steigenden Zahlen 1.2.3.... zuletzt überstiegen wird, so enthält die Reihe, wenn n positiv ist, nothwendig unendlich grosse Glieder; folglich ist ihre Summe weil ausserdem m positiv ist, und folglich alle Glieder positiv sind, nothwendig unendlich gross und folglich ist, wenn m positiv ist, der Werth von* $k^m (\log k)^n$, *für* $k = 0$, *nothwendig Null, was auch n seyn mag.*

Viertens. Es sey m negativ und n negativ, so folgt grade das Entgegengesetzte. Denn, wenn in $k^m (\log k)^n$, *die Grössen m und n negativ sind, so kann man dieselben Grössen in*

$$\frac{1}{k^m (\log k)^n}$$

als positiv betrachten. Nun ist für beliebige positive m und n, $k^m (\log k)^n$ *gleich Null, also ist für beliebige negative m und n,* $k^m (\log k)^n$ *unendlich gross.*

Es folgt also, dass, wie behauptet wird, die Grösse $k^m (\log k)^n$, *für jedes positive m, Null, und*

Ausnahme-Fälle

für jedes negative m, unendlich gross ist, was auch n seyn mag und zwar, so lange m und n reelle Grössen sind.] Da also nun in den Gliedern der Ableitungen von $f(x+k)$ nach k die Exponenten der Potenzen von k, welche die Potenzen von $\log k$ multipliciren, nothwendig abnehmen, so folgt, dass sobald eine dieser Functionen, für $x = a$, unendlich gross ist, alle übrigen es auch sind.

Man kann also allgemein schliessen, dass der Ausdruck

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots.$$

nur dann für einen bestimmten Werth von x unrichtig seyn kann, wenn eine der Grössen fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots.$ für diesen Werth von x unendlich gross ist, desgleichen, dass der Ausdruck, nur von diesem unendlich grossen Gliede angerechnet, falsch ist.

[*Die Reihe* $fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots.$ *kann allerdings den Werth von* $f(x+k)$ *nicht mehr angeben, wenn irgend ein bestimmter Werth von x die Form f wesentlich verändert, welches auf mancherlei Weise geschehen kann, z. B. wenn, wie oben angenommen, für den bestimmten Werth von x eine Wurzelgrösse verschwindet, oder der Ausdruck fx selbst unendlich gross ist, oder auch, wenn Logarithmen oder Sinus und dergl. verschwinden. Allein etwas Unrichtiges giebt deshalb der allgemeine Ausdruck nicht. Er giebt alsdann*

der Entwickelung.

vielmehr gar nichts mehr, weil er den wahren Werth, wegen der veränderten Form nicht mehr angeben kann. *Ein anderes Mittel, als die Divergenz, um anzuzeigen, dass die Form eines Ausdrucks, für das was derselbe bezeichnen soll, nicht mehr passe, hat die Analysis nicht; denn so lange die Glieder eines Ausdrucks nicht unendlich gross sind, giebt der Ausdruck noch etwas Bestimmtes an, selbst wenn er imaginaire Glieder enthält; also ist es im Allgemeinen ganz natürlich, dass die Glieder der allgemeinen Entwickelung unendlich gross werden müssen, sobald die Form der Entwickelung für Dasjenige, was sie ausdrücken soll, nicht mehr passt. Umgekehrt ist es, sobald Glieder der allgemeinen Entwickelung jede Grösse übersteigen, ein Zeichen, dass sich durch den besondern Werth der veränderlichen Grösse, für welchen solches geschieht, die Form der Function, welche die Entwickelung ausdrückt, in solchem Maasse verändert hat, dass die Entwickelung diese Form nicht mehr ausdrücken kann. Unrichtig ist aber deswegen die allgemeine Entwickelung, auch in einem solchen besondern Falle, nicht. Der Ausdruck derselben ist dann nur* undeutlich *und* unbestimmt, *wegen der unendlichen Glieder und der Divergenz, nicht aber* unrichtig. *Man kann auch den französischen Wörtern fautif, en défaut etc. allerdings diese Bedeutung beilegen.*]

Ausnahme-Fälle

74.

Um in einem solchen Falle die wahre Gestalt der Entwickelung nach steigenden Potenzen von k zu finden, muss man, schon in $f(x+k)$, der Grösse x den bestimmten Werth beilegen und dann $f(x+k)$ nach den bekannten Regeln, nach steigenden Potenzen von k entwickeln, dabei aber auf die Potenzen von k mit gebrochenen oder negativen Exponenten, die in den Functionen vorkommen, Acht haben.

75.

Um einige Beispiele zu geben, setze man, es sey

I. $fx = 2ax - x^2 + a\sqrt{(x^2 - a^2)}$

und es werde die Entwickelung von $f(x+k)$ für $x = a$ verlangt. Nimmt man nach den allgemeinen Regeln die Ableitungen, so erhält man

$$\frac{dfx}{dx} = 2(a-x) + \frac{ax}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

$$\frac{d^2fx}{dx^2} = -2 + \frac{a}{\sqrt{(x^2-a^2)}} - \frac{ax^2}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

u. s. w. Setzt man nun $x = a$, so findet man

$$fx = a^2,\ \frac{dfx}{dx} = +\frac{1}{0};$$

folglich sind die erste, so wie alle folgenden Ableigen, unendlich gross. Mithin muss die Entwickelung $f(a+k)$ nothwendig ein Glied von der Form Ak^m enthalten, wo m zwischen 0 und 1 liegt.

der Entwickelung.

Man erhält in der That, wenn man in fx, $a+k$ statt x setzt,

$$[f(a+k) = 2a^2 + 2ak - a^2 - 2ak - k^2 + a\sqrt{(a^2 + 2ak + k^2 - a^2)}, \text{ oder}]$$

$$f(a+k) = a^2 - k^2 + a\sqrt{k}\sqrt{(2a+k)},$$

woraus folgt, dass die Entwickelung nach Potenzen von k, Glieder von der Form $\sqrt{k}$, $k\sqrt{k}$, $k^2\sqrt{k}$ *etc.* enthalten muss.

II. Es sey

$$fx = \sqrt{x} + (x-a)^2 \log(x-a),$$

so dass

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2(x-a)\log(x-a) + x - a$$

$$\frac{d^2fx}{dx^2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + 2\log(x-a) + 3$$

$$\frac{d^3fx}{dx^3} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} + \frac{2}{x-a} \text{ etc.}$$

Setzt man hier $x = a$, so ist die zweite Ableitung $\frac{d^2fx}{dx^2}$ nebst allen folgenden unendlich gross [*auch die erste Ableitung und die Stammgrösse selbst.*]

Also ist die Entwickelung von $f(x+k)$ nach der allgemeinen Formel, für $x = a$ unrichtig und muss nothwendig das Glied $k^2 \log k$ haben.

76.

Wir bemerkten oben, dass, wenn irgend ein bestimmter Werth von x in fx eine Wurzelgrösse verschwinden macht, jedoch so, dass nicht die Wur-

Ausnahme-Fälle

zelgrösse selbst, sondern nur ihre Coefficienten Null sind, dass dann diese Wurzelgrösse nothwendig in den Ableitungen $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$ *etc.* wieder erscheinen muss, und dass also in diesem Falle die allgemeine Entwickelung von $f(x+k)$ passet.

Wäre fx, anstatt entwickelt, nur durch eine Gleichung gegeben, welche die Wurzelgrösse nicht enthält, so kann die Bestimmung der Ableitung von fx für den Fall eines bestimmten Werthes von x schwierig sein, welchem vorzubeugen ist.

Es sey z. B. $y = fx$ und folglich, wenn man die Ableitungen nimmt, $\frac{dy}{dx} = \frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2fx}{dx^2}$ *etc.* Man setze, für irgend einen Werth von x verschwinde in fx eine Wurzelgrösse, welche sich in $\frac{dfx}{dx}$ wieder findet, so hat offenbar die Grösse $\frac{dfx}{dx}$, für diesen Werth von x, eine grössere Zahl verschiedener Werthe, als fx, woraus folgt, dass der Werth von $\frac{dy}{dx}$ nicht durch eine einfache Function von x und y gegeben seyn kann, die nicht entwickelt die Wurzelgrösse enthielte. Schafft man indessen aus der Gleichung $y = fx$ die Wurzelgrösse durch Potenziirung weg und bezeichnet die entstehende Gleichung durch

$$F(x,y) = 0,$$

so ist die erste Abgeleitete von dieser

der Entwickelung.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dF(x,y)}{dx} : \frac{dF(x,y)}{dy},$$

wie in der sechsten Vorlesung gefunden wurde (59.). Dieser Ausdruck wäre also für den besondern Werth von x unpassend, was aber nicht anders möglich ist, als wenn die Grössen $\frac{dF(x,y)}{dx}$ und $\frac{dF(x,y)}{dx}$, beide zugleich Null sind. In diesem Falle also muss der Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ gleich Null durch Null seyn; und, umgekehrt, wenn solches geschieht, ist es ein Zeichen, dass der zugehörige Werth von x in fx eine Wurzelgrösse verschwinden machte, die in $\frac{dfx}{dx}$ wieder erschien.

Um nun in diesem Falle den Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu finden, darf man nicht bei der ersten von $F(x,y) = 0$ abgeleiteten Gleichung

$$\frac{dy}{dx}\frac{dF(x,y)}{dy} + \frac{dF(x,y)}{dx} = 0$$

stehen bleiben, weil dieselbe von selbst, unabhängig von dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$, erfüllt wird. Man muss vielmehr zu der zweiten Ableitung übergehen, welches eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dF(x,y)}{dy} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 P + \frac{dy}{dx} Q + R = 0$$

giebt, worin P, Q, R Functionen von x und y bedeuten, welche man durch die allgemeinen Regeln der Ableitung der Functionen findet.

Ausnahme-Fälle

Allgemein giebt diese Gleichung den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$; aber in dem besondern Falle, wo $\frac{dF(x,y)}{dy}$ verschwindet, fällt das Glied, welches $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthielt, weg, und die übrig bleibende Gleichung ist eine Gleichung mit $\frac{dy}{dx}$ vom zweiten Grade, durch welche sich der Werth von $\frac{dy}{dx}$ finden lässt, der also zweifach ist.

77.

Es sey z. B.

$$fx = x + (x-a)\sqrt{(x-b)},$$

so ist

$$\frac{fx}{dx} = 1 + \sqrt{(x-b)} + \frac{-a}{2\sqrt{(x-b)}}.$$

Setzt man $x = a$, so ist

$$fx = a \text{ und } \frac{dfx}{dx} = 1 + \sqrt{(a-b)},$$

wo, wie man sieht, in fx, nicht aber in $\frac{dfx}{dx}$, die Wurzelgrösse verschwindet, so dass die erste Gleichung nur einen, die zweite, zwei Werthe hat.

Setzt man nun $fx = y$ und erhebt die Gleichung zum Quadrat, so dass die Wurzelgrösse wegfällt, so erhält man

$$(y-x)^2 = (x-a)^2(x-b).$$

Nimmt man hiervon die erste abgeleitete, so erhält man

$2(y-x)$

$$2(y-x)\left(\frac{dy}{dx}-1\right)=2(x-a)(x-b)+(x-a)^2,$$

woraus folgt,

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{2(x-a)(x-b)+(x-a)^2}{2(y-x)}.$$

Setzt man $x=a$, so ist auch $y=a$, also

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}.$$

Man muss also die zweiten Ableitungen nehmen, welches

$$2(y-x)\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}-1\right)^2=4(x-a)+2(x-b)$$

giebt. Setzt man jetzt $x=a$ und $y=a$, so erhält man

$$\left(\frac{dy}{dx}-1\right)^2=a-b,$$

welches

$$\frac{dy}{dx}=1+\sqrt{(a-b)}$$

giebt, wie oben.

Es kann kommen, dass der Werth von x, für welchen Glieder der ersten Ableitung wegfallen, auch Glieder der zweiten verschwinden macht; dann muss man zur dritten abgeleiteten Gleichung übergehen, welche dann, weil die Glieder mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^2}$ wegfallen, blos $\frac{dy}{dx}$ enthält, aber vom dritten Grade ist u. s. w. Dieses hängt von der Natur der Wurzelgrösse ab, welche in y wegfällt, und welche durch

den Grad der Gleichung, von welcher $\frac{dy}{dx}$ abhängt, ersetzt werden muss.

78.

Man setze, zweitens: für denjenigen Werth von x, für welchen eine Wurzelgrösse in fx verschwindet, falle sie auch in $\frac{dfx}{dx}$ weg, jedoch nicht in $\frac{d^2fx}{dx^2}$. Alsdann haben fx und $\frac{dfx}{dx}$ gleich viele Werthe, aber $\frac{d^2fx}{dx^2}$ hat deren mehrere. Schafft man also die Wurzelgrösse aus $y=fx$ weg, so wird der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ den man daraus findet, von der Form $\frac{0}{0}$ seyn, und man muss, um den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu finden, höhere Ableitungen in Rechnung bringen.

79.

Es sey z. B.

$$y=x+(x-a)^2\sqrt{(x-b)},$$

so erhält man

$$\frac{dy}{dx}=1+2(x-a)\sqrt{(x-b)}+\frac{(x-a)^2}{2\sqrt{(x-b)}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\sqrt{(x-b)}+\frac{2(x-a)}{\sqrt{(x-b)}}-\frac{(x-a)^2}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man $x=a$, so erhält man

$$y=a,\ \frac{dy}{dx}=1,\ \text{und}\ \frac{d^2y}{dx^2}=2\sqrt{(a-b)}$$

der Entwickelung.

Bringt man aber die gegebene Gleichung auf die rationale Form

$$(y-x)^2 = (x-a)^4(x-b),$$

so erhält man

$$2(y-x)\left(\frac{dy}{dx}-1\right) = 4(x-a)^3(x-b) + (x-a)^4,$$

worin sich, wenn man $x=a$ und $y=a$ setzt, Alles aufhebt.

Man muss also zu der abgeleiteten Gleichung zweiter Ordnuug übergehen, welche

$$(y-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}-1\right)^2 = 6(x-a)^2(x-b) + 4(x-a)^2$$

ist. Setzt man $x=a$ und $y=a$, so erhält man

$$\left(\frac{dy}{dx}-1\right)^2 = 0 \text{ und folglich } \frac{dy}{dx} = 1.$$

Aber, um $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu finden muss man zur dritten, und selbst zur vierten abgeleiteten Gleichung übergehen.

Man erhält zunächst

$$(y-x)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{dy}{dx}-1\right)\frac{d^2y}{dx^2} =$$
$$18(x-a)^2 + 12(x-a)(x-b),$$

wo sich, wenn man $x=a$, $y=b$ und $\frac{dy}{dx}=1$ setzt, wieder Alles aufhebt.

Die abgeleitetete Gleichung der folgenden Ordnung giebt

$$(y-x)\frac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\frac{dy}{dx}-1\right)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 =$$
$$48(x-a) + 12(x-b).$$

Den Werth

Setzt man hierin $x = a$, $y = a$ und $\frac{dy}{dx} = 1$, so erhält man

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 12(a-b),$$

also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{(a-b)};$$

wie oben.

Den Werth von $\frac{0}{0}$ zu finden.

80.

Wir wollen diese Rechnungen, die sonst nach den festgestellten Regeln keine Schwierigkeit haben, nicht weiter fortsetzen. Wir wollen dagegen bei dieser Gelegenheit die Theorie der Methode, den Werth eines Bruchs zu finden, dessen Zähler und Nenner zugleich verschwinden, vortragen.

$$\frac{fx}{Fx}$$

sey ein solcher Bruch, in welchem also fx und Fx Functionen von x sind, die, z. B. für $x = a$, beide zugleich verschwinden. Man verlangt den Werth dieses Bruchs für $x = a$.

Man setze

$$\frac{fx}{Fx} = y \text{ und folglich } yFx = fx.$$

Ist in dieser Gleichung $x = a$, so wird sie von selbst erfüllt und giebt folglich den Werth von y nicht.

von $\frac{0}{0}$ zu finden.

Nimmt man aber die erste abgeleitete, so erhält man

$$\frac{dy}{dx}\,Fx + y\,\frac{dFx}{dx} = \frac{dfx}{dx}.$$

Setzt man jetzt $x = a$, so fällt das Glied $\frac{dy}{dx}Fx$ weg [*weil, nach der Voraussetzung, Fx gleich Null ist für* $x = 0$]. Der Rest der Gleichung ist:

$$y = \frac{dfx}{dx} : \frac{dFx}{dx}.$$

Verschwänden auch die ersten Ableitungen $\frac{dfx}{dx}$ und $\frac{dFx}{dx}$ beide, so würde man, auf dieselbe Weise, wenn man blos in die obige Gleichung $\frac{dfx}{dx}$ und $\frac{dFx}{dx}$ statt fx und Fx setzte, folgenden neuen Ausdruck für y erhalten:

$$y = \frac{d^2 fx}{dx^2} : \frac{d^2 Fx}{dx^2}.$$

Man kann diesen Ausdruck auch aus der vorhin gefundenen Ableitungs-Gleichung finden. Da nemlich dieselbe für $x = a$ von selbst erfüllt wird und also y nicht giebt, so muss man zur zweiten abgeleiteten Gleichung übergehen, welche

$$\frac{d^2 y}{dx^2}.Fx + 2\frac{dy}{dx}\frac{dFx}{dx} + y\frac{d^2 Fx}{dx^2} = \frac{d^2 fx}{dx^2}$$

ist. Setzt man hierin $x = a$, so fallen die Glieder, welche $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2}$ enthalten, von selbst weg, weil Fx und $\frac{dFx}{dx}$, für $x = a$, beide Null sind. Der

übrig bleibende Theil der Gleichung giebt

$$y = \frac{d^2 fx}{dx^2} : \frac{d^2 Fx}{dx^2},$$

wie oben.

Verschwänden für $x = a$ auch noch $\frac{d^2 fx}{dx^2}$ und $\frac{d^2 Fx}{dx^2}$, so fände man auf dieselbe Weise:

$$y = \frac{d^3 fx}{dx^2} : \frac{d^3 Fx}{dx^3}$$

u. s. w.

Hieraus folgt die allgemeine Regel, dass, wenn Zähler und Nenner einer gebrochenen Function von x, für irgend einen bestimmten Werth von x, beide zugleich verschwinden, dass man alsdann, statt ihrer, die Ableitungen des Zählers und Nenners, und zwar so lange nehmen muss, bis man auf einen Bruch kommt, der für den nemlichen Werth von x einen bestimmten Werth hat.

81.

I. Bekanntlich ist der Ausdruck $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ der Summe der geometrischen Reihe $x + x^2 + x^3 \ldots. + x^n$ gleich.

Wenn hier $x = 1$ ist, so geht dieser Ausdruck in $\frac{0}{0}$ über. Man muss also von Zähler und Nenner die Ableitungen nehmen, welches den Bruch $\frac{1-(n+1)x^n}{-1}$ giebt, dessen Werth, für $x = 1$, n ist.

von $\frac{0}{0}$ zu finden.

II. Nimmt man von dem Ausdrucke $\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$ die erste Ableitung, so erhält man $\left[\frac{1-(n+1)x^n}{1-x}\right.$

$$+\frac{x-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{1-x-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+x-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\Bigg]$$

$$\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{1-x},$$

welches folglich die Summe der Reihe $1+2x+3x^2 \ldots + nx^{n-1}$ ist; denn diese Reihe ist die erste Ableitung der Reihe $x+x^2+x^3 \ldots + x^n$.

Für $x=1$ giebt dieser Ausdruck $\frac{0}{0}$. Man muss also von Zähler und Nenner die erste Ableitung nehmen, welches den Bruch

$$\frac{-n(n+1)x^{n+1}+n(n+1)x^n}{-2(1-x)},$$

und für $x=0$, wieder $\frac{0}{0}$ giebt. Man muss also von Neuem Zähler und Nenner ableiten, welches den Bruch

$$\frac{-n(n+1)(n-1)x^{n-2}+n^2(n+1)x^{n-1}}{2}$$

giebt. Hiervon ist der Werth, für $x=1$,

$$\frac{-n(n+1)(n-1)+n^2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2},$$

welches in der That der Werth der Reihe $1+2+3 \ldots + n$ ist.

Den Werth

82.

Es könnte scheinen, dass man, wenn man so die Ableitungen vom Zähler und Nenner nimmt, immerfort nur auf Functionen kommen könne, die für einen bestimmten Werth von x, Null durch Null, dividirt sind. Es ist aber leicht zu sehen, dass dieses nicht möglich ist. Denn verschwänden für $x = 0$ alle die Functionen fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$ bis ins Unendliche, so wäre, weil allgemein

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \dots;$$

ist, für $x = a$,

$$f(a+k) = 0$$

für jeden Werth von k, welches unmöglich ist. Eben so verhält es sich mit $F(x+k)$.

Den Werth von $\frac{\infty}{\infty}$ zu finden.

83.

Aber es kann kommen, dass fx und Fx, für $x = a$, beide zugleich unendlich gross sind, in welchem Falle die Werthe der Brüche $fx : Fx$, $\frac{dfx}{dx} : \frac{dFx}{dx}$ *etc.* ebenfalls unbestimmt bleiben würden. Dieser Fall gehört zu dem oben untersuchten allgemeinen Falle und es folgt, dass alsdann die Entwickelung von $f(x+k)$ und $F(x+k)$, Potenzen

von $\frac{\infty}{\infty}$ zu finden.

von k mit gebrochenen oder negativen Exponenten enthält.

Man muss also alsdann, sowohl in den Zähler als in den Nenner, $a+k$ statt x setzen und einen wie den andern in eine Reihe nach steigenden Potenzen von k entwickeln, hernach aber, nachdem man noch den Bruch, oben und unten, durch die höchste Potenz von k dividirt hat, $k=0$ setzen, oder was dasselbe ist, man muss blos auf die ersten Glieder der beiden Reihen Rücksicht nehmen.

Es sey z. B. der Bruch

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

gegeben, und es werde der Werth desselben für $x=a$ verlangt. Wie man sieht, verschwinden für $x=0$, Zähler und Nenner. Die ersten Ableitungen von Zähler und Nenner sind

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{(a-x)}} \text{ und } \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}},$$

welche aber beide für $x=a$ unendlich gross sind. Man setze also $x=a+k$, so erhält man für den Zähler

$$\sqrt{(a+k)}-\sqrt{a}+\sqrt{k}=\sqrt{k}+\frac{k}{2\sqrt{a}}\ldots\ldots$$

Der Nenner giebt

$$\sqrt{k(2a+k)}=\sqrt{2ak}+\frac{k\sqrt{k}}{2\sqrt{2a}}\ldots\ldots$$

Ordnet man die Glieder nach steigenden Potenzen von k und nimmt nur die beiden ersten, so erhält

Den Werth

man für den gesuchten Werth des gegebenen Bruchs

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2ak}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

84.

Ueberhaupt kann eine Function von x nicht anders für $x = a$ verschwinden, als wenn sie einen Factor $(x-a)^m$ enthält, wo m irgend eine positive Zahl ist. Verschwinden also zwei Functionen von x für einerlei Werth dieser Grösse, so müssen sie einen gemeinschaftlichen Factor haben, und um den Werth des Bruchs zu finden, den diese beiden Functionen ausmachen, darf man sie nur auf die einfachste Gestalt bringen, indem man den gemeinschaftlichen Factor aus Zähler und Nenner wegschafft.

Setzt man also $x = a + k$, welches $x - a = k$ giebt, so ist der gemeinschaftliche Factor eine Potenz von k, die sich durch die Division wegschaffen lässt und man darf dann, um $x = a$ zu haben, nur $k = 0$ setzen.

Hat man also den Bruch $\frac{fx}{Fx}$, so giebt die Substitution von $a + k$ statt x sogleich allgemein

$$\frac{fa + k\frac{dfa}{da} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fa}{da^2}\dots}{Fa + k\frac{dFa}{da} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fa}{da^2}\dots}.$$

Ist $fa = 0$ und $Fa = 0$, so ist der Bruch oben und unten durch k theilbar und giebt

von $\frac{\infty}{\infty}$ zu finden.

$$\frac{\frac{dfa}{da} + \frac{k}{2}\frac{d^2fa}{da^2}\ldots.}{\frac{dFa}{da} + \frac{k}{2}\frac{d^2Fa}{da^2}\ldots.}.$$

Setzt man nun $k = o$, damit $x = a$ sey, so erhält man $\frac{dfa}{da} : \frac{dFa}{da}$ für den Werth des gegebenen Bruches in dem Falle $x = a$.

Sind auch $\frac{dfa}{da}$ und $\frac{dFa}{da}$ Null, so reducirt sich der Bruch noch weiter und giebt, nach abermaliger Division mit k,

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{d^2fa}{da^2} + \frac{k}{2.3}\frac{d^3fa}{da^3}\ldots.}{\frac{1}{2}\frac{d^2Fa}{da^2} + \frac{k}{2.3}\frac{d^3Fa}{dx^3}\ldots.},$$

welches sich für $k = o$ auf $\frac{d^2fa}{da^2} : \frac{d^2Fa}{da^2}$ reducirt u. s. w.

85.

Man sieht hieraus den Grund der obigen allgemeinen Regel und zugleich, dass dieselbe nur dann gilt, wenn Zähler und Nenner der Brüche einen gemeinschaftlichen Factor von der Gestalt $(x-a)^m$ haben, wo m eine ganze positive Zahl ist. Man darf in diesen Fällen nur den Factor durch bekannte Mittel wegschaffen und den Bruch auf seine einfachste Gestalt bringen.

Ist m eine gebrochene oder negative Zahl, so reicht die Regel nicht zu und man muss alsdann die

Den Werth

beiden Functionen $f(a+k)$ und $F(a+k)$ in die steigenden Reihen

$$\alpha k^m + \beta k^{m+n} \ldots \text{ und } A k^m + B k^{m+p} \ldots$$

entwickeln, welches

$$\frac{f(a+k)}{F(a+k)} = \frac{\alpha + \beta k^n \ldots}{A + B k^p \ldots},$$

und für $k = 0$,

$$\frac{fa}{Fa} = \frac{\alpha}{A}$$

giebt. Enthielten die ersten Glieder der beiden Reihen ungleiche Potenzen von k: wäre z. B. die Reihe des Zählers die obige, die Reihe des Nenners aber

$$A k^p + B k^{p+q} \ldots,$$

wo m und p beliebige, n, q aber positive Zahlen sind, damit die Reihen steigen, so erhielte man, nachdem man oben und unten durch die kleinste der beiden Potenzen k^m und k^p dividirt hat, für $k = 0$, $\frac{fa}{Fa} = 0$, oder $= \infty$, je nachdem $m >$ oder $< p$ ist, wobei negative Zahlen kleiner als positive betrachtet werden. Aber nach dem was oben bewiesen ist, können dergleichen Fälle nur dann vorkommen, wenn die Werthe der Ableitungen von fx und Fx für $x = a$ zugleich unendlich gross sind.

86.

Diese Untersuchungen waren nöthig, um die Natur der Ableitungen überall richtig zu beurtheilen.

von $\frac{\infty}{\infty}$ zu finden.

Da sie sich aber blos auf besondere bestimmte Fälle der Werthe der Functionen beziehen, so ändern ihre Resultate an der allgemeinen Theorie der Functionen Nichts, so lange man blos auf Form und Ableitung derselben sieht, welche von den Ausnahmen gänzlich unabhängig sind.

[*Das Verfahren, den Werth einer zusammengesetzten Grösse z. B. fx zu finden, wenn derselbe, für irgend einen bestimmten Werth des Elements x, in der gegebenen Form der Grösse unbestimmt ist, welches auf verschiedene Weise der Fall seyn kann, entweder wenn z. B. die Grösse fx, für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$, oder $0 \times \infty$, oder die Form von Reihen mit unbestimmten Werthen hat, ist für alle diese Fälle nicht verschiedener Art, sondern immer nur eine und dieselbe.*

Wenn nemlich der Werth von fx für $x = a$ unbestimmt ist, so besteht das natürliche Mittel diesen Werth zu finden, darin, dass man $x + k$ statt x setzt und die Grösse fx auf irgend eine Weise, sey es durch den allgemeinen Ableitungs-Ausdruck $f(x + k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots$, oder auf anderm Wege so zu entwickeln sucht, dass in der Entwickelung k von x abgesondert ist, und dass man dann in die Entwickelung, nachdem diejenigen k, die sich durch Division, oder wie es sonst seyn mag, aufheben, weggelassen worden, $k = 0$ und $x = a$ setzt. Die-

ses Verfahren fand auch in den obigen Beispielen Statt. So lange in der Entwickelung $f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots\ldots$ die Grössen $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots\ldots$ für $x = a$ nicht unendlich gross sind, also die Reihe $fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots\ldots$ nicht divergirt, ist diese Reihe zu dem gegenwärtigen Zwecke brauchbar; sobald sie divergirt, muss man, nach den Umständen, auf andere Weise k abzusondern suchen, wie z. B. hier in (83.) und in der Anmerkung zu (73.) geschahe.]

Neunte Vorlesung.

Von der Methode, die Grenzen des Werths der Entwickelung einer Function zu finden, wenn man nur eine bestimmte Zahl von Gliedern nehmen will. Fälle, in welchen die Principien des Differential-Calculs fehlerhaft sind. Fundamental-Lehrsatz. Grenzen mehrerer Reihen. Strenge Art, die Ableitungen in die Theorie der Curven und der veränderlichen Bewegung einzuführen.

87.

Jede Grösse $f(x+k)$ lässt sich, wie wir sahen, in die Reihe $fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots$ entwickeln, welche ohne Ende fortläuft, wenn keine der Ableitungen von fx verschwindet, wie wenn fx eine rationale und ganze Function von x ist.

So lange die Entwickelung nur zur Bildung der Ableitungen dient, ist es gleich, ob die Reihe abbricht,

oder nicht; auch wenn man die Entwickelung blos als eine analytische Umformung der Function fx betrachtet. Will man aber die Entwickelung, in so fern sie einen Ausdruck darbietet, der in Beziehung auf die Grösse k einfacher ist als der gegebene, indem k nur abgesondert von den übrigen Grössen der Function vorkommt, anwenden, den Werth der Function in bestimmten besonderen Fällen zu finden, so ist es, weil man immer nur eine bestimmte Zahl von Gliedern in Rechnung bringen kann, gut, ein Mittel zu haben, den Werth des weggelassenen Restes zu schäzzen, oder wenigstens die Grenzen des Fehlers, den man macht, zu beurtheilen.

Dergleichen Grenzen sind, besonders bei der Anwendung der Functionen-Rechnung auf die Theorie der krummen Linien und Flächen und auf die Mechanik wichtig, wenn diese Anwendung die Strenge der Geometrie der Alten haben soll, wie solches im zweiten Theile der Theorie der analytischen Functionen der Fall war.

Bei der dortigen Anwendung fingen wir damit an, den genauen Ausdruck des Restes der Reihe zu suchen und bestimmten dann die Grenzen desselben. Man kann aber diese Grenzen auch unmittelbar durch ein elementares, obgleich eben so strenges Verfahren finden.

88.

Wir stellen zu diesem Ende folgenden allgemeinen Satz auf, der in mehreren Fällen nützlich seyn kann.

Die

für $f(x+k)$.

Die Werthe einer Function, welche mit der veränderlichen Grösse, von welcher sie abhängt, zugleich verschwindet, sind nothwendig, während die veränderliche Grösse positiv wächst, endlich und haben das Zeichen der ersten Ableitung der Function, und das entgegengesetzte Zeichen, wenn die veränderliche Grösse negativ wächst, so lange der Werth der ersten Ableitung das nemliche Zeichen behält und nicht unendlich gross ist.

Dieser Satz ist für die Theorie der Functionen sehr wichtig, weil er eine allgemeine Beziehung zwischen dem Werthe einer Stammgrösse und ihren Ableitungen enthält und zur Bestimmung der Grenzen der Werthe von Functionen dient, von welchen man nur Ableitungen kennt.

Wir wollen denselben strenge beweisen.

89.

I. Man nehme die Grösse $f(x+k)$, deren allgemeine Entwickelung

$$fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}$$

ist.

In der vorigen Vorlesung sahen wir, dass die Form der Entwickelung von $f(x+k)$ für bestimmte Werthe von x sich ändern kann, dass aber die ersten beiden Glieder der Reihe richtig sind, so lange $\frac{dfx}{dx}$ nicht unendlich gross ist, und dass also die

Grenzen - Ausdrücke

übrigen Glieder Potenzen von k enthalten, die die erste übersteigen, so dass man

$$f(x+k)=fx+k\left(\frac{dfx}{dx}+V\right)$$

setzen kann, wo V eine Function von x und k ist, die für $k=0$ verschwindet. [*Ohne weitern Beweis dürfte wohl nicht angenommen werden können, dass uneingeschränkt $V=0$ ist für $k=0$, weil möglicherweise* $\frac{d^2fx}{dx^2}$, $\frac{d^3fx}{dx^2}$ *etc. für irgend einen bestimmten Werth von* x, *unendlich gross seyn können, während* $\frac{dfx}{dx}$ *weder unendlich gross, noch Null ist. Es sey z. B.* $fx=x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}+(a-x)^{\frac{3}{2}}$, *welches für* $x=0$, *Null ist, so ist* $\frac{dfx}{dx}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(a-x)^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{d^2fx}{dx^2}=\frac{3}{4x^{\frac{1}{2}}}+\frac{3}{4(a-x)^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{d^3fx}{dx^3}=-\frac{3}{8x^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{4(a-x)^{\frac{3}{2}}}$$

etc. Dieses giebt, wenn man der Grösse x *den bestimmten Werth* a *beilegt,*

$$fx=0,\ \frac{dfx}{dx}=\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}},\ \frac{d^2fx}{dx^2}=\infty,\ \frac{d^3fx}{dx^3}=\infty \text{ etc.}$$

also sind fx *und* $\frac{dfx}{dx}$ *endliche Grössen, alle Ableitungen höherer Ordnung hingegen sind unendlich gross. Unter diesen Umständen ist es zweifelhaft, ob in*

$$f(x+k)=fx+k\left(\frac{dfx}{dx}+\frac{k}{2}\frac{d^2fx}{dx}+\frac{k^2}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^2}\ldots\right)$$

die Grösse $\frac{k}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}\ldots=V$, *für* k

für $f(x+k)$.

gleich Null nothwendig Null ist, weil die unendlichen Grössen $\frac{d^2 fx}{dx^2}$, $\frac{d^3 fx}{dx^3}$ etc. mit o, o^2, o^3 etc. multiplicirt, möglicherweise endliche Producte geben können. Die Behauptung, dass $V = o$ ist für $k = o$, gilt also nur, in so fern auch keine der Ableitungen höherer Ordnung unendlich gross ist. Diese letzte Einschränkung ist indessen keinesweges ausdrücklich nöthig, sobald nur vorher allgemein der Satz bewiesen wird, dass die Ableitungen jeder beliebigen abhängigen Grösse fx, die gleich Null ist, für $x = o$, jedesmal mit der Grösse fx zugleich das Zeichen wechselt, oder dass ihr Werth vom Reellen zum Unmöglichen übergehet. Ist dieser Satz festgestellt, so enthält die Bedingung, dass die erste Ableitung das Zeichen nicht wechseln soll, zugleich diejenige, dass keine Ableitung höherer Ordnung unendlich seyn darf, einschliesslich.]

II. Da also $V = o$ ist für $k = o$, so ist klar, dass der Werth dieser Grösse, von Null an, in Plus oder Minus stetig zunehmen muss, wenn man k, von Null ab, stetig wachsen lässt und zwar bis zu einem gewissen Puncte, jenseits dessen die Grösse V wieder abnehmen kann; dass man also immer der Grösse k einen Werth beilegen kann, für welchen der correspondirende Werth von V, vom Zeichen abstrahirt, kleiner als eine beliebige Grösse ist, [*weil V von Null ab wächst.*] während derselbe für kleinere Werthe von k abnimmt.

Grenzen-Ausdrücke

D sey eine solche Grösse [*von* V] die man so klein annehmen kann, als man will. Man kann also k immer so klein setzen, dass der Werth von V zwischen den beiden Grenzen $+D$ und $-D$ liegt. [*Nemlich in so fern* V *positiv oder negativ ist.*] Da nun

$$f(x+k)-fx = k\left(\frac{dfx}{dx}+V\right)$$

ist, so folgt, dass die Grösse $f(x+k)-fx$ nothwendig innerhalb der Grenzen $k, \left(\frac{dfx}{dx}\pm D\right)$ liegen muss.

III. Da dieser Schluss für jeden Werth von x gilt, so lange nicht $\frac{dfx}{dx}$ unendlich gross ist [*und nicht das Zeichen wechselt*] so gilt er auch, wenn man der Reihe nach, $x+k$, $x+2k$, $x+3k$.... bis zu $x+(n-1)k$ statt x setzt, so dass man also k immer positiv und so klein annehmen kann, dass die Werthe der Grössen

$$\begin{array}{l} f(x+\ \ k)-f \\ f(x+2k)-f(x+k) \\ f(x+3k)-f(x+2k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x+nk)-f(x+(n-1)k), \end{array}$$

der Reihe nach, zwischen den Grenzen

$$k\left(\frac{dfx}{dx}\pm D\right)$$

$$k\left(\frac{df(x+k)}{dx}\pm D\right)$$

für $f(x+k)$.

$$k\left(\frac{df(x+2k)}{dx}\pm D\right)$$

.

$$k\left(\frac{df(x+n-1.k)}{dx}\pm D\right)$$

liegen, wenn man nemlich für alle diese Grenzen die nemliche Grösse D annimmt, welches angeht, so lange keine der Grössen $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{df(x+k)}{dx}$, $\frac{df(x+2k)}{dx}$ $\frac{df(x+(n-1)k)}{dx}$ unendlich gross ist.

IV. Haben nun alle diese zuletzt genannten Grössen einerlei Zeichen, das heisst, sind sie alle zugleich positiv oder negativ, so ist leicht zu sehen, dass die Grenzen der Summe der zuerst genannten Grössen, welche Summe $f(x+nk)-fx$ ist, auch die Grenzen der Summe der zuletzt genannten Grössen, also die Grenzen der Grössen

$$k\frac{dfx}{dx}+k\frac{df(x+k)}{dx}+k\frac{df(x+2k)}{dx}....+k\frac{df(x+(n-1)k)}{dx}$$
$$\pm nkD$$

seyn müssen. [*Da nemlich die eine von den beiden Grenzen einer Grösse allemal kleiner, die andere allemal grösser ist, als die begrenzte Grösse, so ist auch die Summe der untern Grenzen einer Reihe von Grössen allemal kleiner, die Summe der obern Grenzen allemal grösser als die Summe der begrenzten Grössen.*]

V. Man nehme nun die willkürliche Grösse D kleiner als

Grenzen-Ausdrücke

$$\frac{\frac{dfx}{dx}+\frac{df(x+k)}{dx}+\frac{df(x+2k)}{dx}\ldots+\frac{df(x+(n-1)k)}{dx}}{n}$$

.

an, ohne Rücksicht auf das Zeichen [*welches deshalb angeht, weil D blos grösser zu seyn braucht, als* $V=\frac{k}{2}\frac{d^2fx}{dx}+\frac{k^2}{2.3}\frac{d^3fx}{dx}\ldots$, *welche Grösse, wenn man k klein genug annimmt, so weit verkleinert werden kann, als man will, vorausgesetzt, dass keine der Grössen* $\frac{d^2fx}{dx^2}$, $\frac{d^3fx}{dx^3}\ldots$ *unendlich gross ist, während gegentheils die Bruch-Grösse*

$$\frac{\frac{dfx}{dx}+\frac{df(x+k)}{dx}\ldots+\frac{df(x+(n-1)k)}{dx}}{n},$$

weil der Zähler derselben aus n Gliedern besteht, wenigstens nicht kleiner seyn kann als das kleinste der n Glieder, dessen Werth sich aber durch k nicht so weit verkleinern lässt, als man will, weil es k nicht als Factor enthält, so dass also durch den willkürlichen Factor k, in V, die Grösse D allemal kleiner gemacht werden kann, als die Bruch-Grösse

$$\frac{\frac{dfx}{dx}+\frac{df(x+k)}{dx}\ldots+\frac{df(x+(n-1)k)}{dx}}{n}\Big].$$

Alsdann ist die erste Grösse $f(x+nk)-fx$ nothwendig zwischen o und

$$2k\left(\frac{dfx}{dx}+\frac{df(x+k)}{dx}+\frac{df(x+2k)}{dx}\ldots\frac{df(x+(n-1)k)}{dx}\right)$$

eingeschlossen. [*Denn bezeichnet man, der Kürze*

für $f(x+k)$.

wegen, $\frac{dfx}{dx} + \frac{df(x+k)}{dx} + \frac{df(x+2k)}{dx} \ldots\ldots + \frac{df(x+(n-1)k)}{dx}$ *durch A und* $f(x+nk)-fx$ *durch B, so sind, zu Folge (IV.) die Grenzen für B gleich* $kA \pm nkD$. *Nimmt man also D kleiner als* $\frac{A}{n}$, *oder nD kleiner als A an, so ist die eine der beiden Grenzen* $kA \pm nkD$ *noch grösser als* 0, *die andere noch kleiner als* $2kA$; *also sind die Grenzen für B gleich* 0 *und* $2kA$.]

VI. Wird also der positive oder negative Werth der beträchtlichsten unter den Grössen $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{df(x+k)}{dx}$ *etc.* bis zu $\frac{df(x+(n-1)k)}{dx}$, durch P bezeichnet, so ist die Grösse $f(x+nk)-fx$ um so mehr zwischen den Grenzen 0 und $2nkP$ eingeschlossen [*weil n Grössen* $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{df(x+k)}{dx} \ldots\ldots$ *vorhanden sind und folglich, wenn die beträchtlichste unter ihnen P heisst, nP nothwendig noch grösser als ihre, oben durch A bezeichnete Summe, und folglich der Abstand der beiden Grenzen* 0 *und* $2nkP$ *noch grösser seyn muss, als der Abstand der Grenzen* 0 *und* $2kA$].

VII. Da aber, wenn man k beliebig klein annehmen darf, zugleich n so gross sein kann, als man will, so kann man kn gleich einer beliebigen Grösse z setzen, die positiv und negativ seyn kann, weil sich auch k positiv oder negativ annehmen lässt.

Grenzen - Ausdrücke

VIII. Die Grösse $f(x+z) - fx$ kann also alsdann irgend eine Function von z vorstellen, welche für $z = o$ verschwindet. x wird jetzt als eine willkürliche Constante betrachtet. $\frac{d(x+nk)}{dx}$ wird alsdann zur ersten Ableitung der Function von z, weil die ersten Ableitungen von $f(x+z)$, nach x und nach z, einander gleich sind [*indem x und z in $f(x+z)$ gleichmässig vorkommen und also verwechselt werden können, ohne dass sich der Werth von $f(x+z)$ ändert.*]

IX. Es folgt also nun im Allgemeinen, dass wenn $\frac{df(x+z)}{dz}$, von $z = o$ an, beständig endliche Werthe mit einerlei Zeichen hat, und P ist, abgesehen vom Zeichen, der grösste dieser Werthe, dass dann die Stammgrösse $[f(x+z) - fx]$ von $\frac{df(x+z)}{dz}$ nothwendig zwischen o und $2zP$ liegen muss und folglich auch nur endliche Werthe haben kann und zwar mit demselben Zeichen, wenn die erste Ableitung von z positiv und mit entgegengesetztem Zeichen, wenn n negativ ist. [*Da nemlich die erste Ableitung, nach der Voraussetzung, das Zeichen nicht wechseln soll und P einer von ihren Werthen ist, so ist das Zeichen von P das Zeichen der ersten Ableitung überhaupt. Nun sind* o *und $2zP$ die Grenzen der Stammgrösse, also ist das Zeichen von $2zP$ das Zeichen der Stammgrösse. Dieses Zeichen ist also das Zeichen von P, wenn z*

positiv und das entgegengesetzte, wenn z negativ ist.]

90.

In der Differential-Rechnung ist der letzte Schluss eine unmittelbare und nothwendige Folge der Behandlungs-Art der Principien dieser Rechnung und wird ohne Rücksicht auf die unendlichen Werthe unbeschränkt zugegeben. Wir werden aber sehen, dass derselbe auf diese Weise öfters unrichtig und dass ein strengeres Verfahren, wie in der Differential-Rechnung, nothwendig ist.

Ist nemlich y eine Function von z, so ist ihre erste Ableitung gleich $\frac{dy}{dz}$ und das Integral y von dy wird, den Principien der Rechnung zu Folge, als die Summe aller der unendlich kleinen Elemente dy oder $\frac{dy}{dz} \cdot dz$ angesehen. Ist also $y = o$ für $z = o$, so ist y die Summe aller der Elemente $\frac{dy}{dz} \cdot dz$, welche dem Elemente von z entsprechen. Daraus ist man berechtigt zu schliessen, dass, wenn $\frac{dy}{dz}$ immer positiv ist, von $z = o$ bis zu irgend einem positiven Werthe von z, dass dann auch der der Grösse y entsprechende Werth von z, nothwendig positiv seyn muss, weil alle Elemente $\frac{dy}{dz} \cdot dz$ positiv sind.

Gleichwohl verhält es sich nicht immer so. Es

Grenzen - Ausdrücke

sey z. B. $y = \frac{1}{a-z} - \frac{1}{a}$, wo a irgend eine positive constante Grösse ist, so ist $y = 0$ für $z = 0$ und $\frac{dy}{dz}$ ist, nach deu bekannten Regeln der Differentiation, gleich $\frac{1}{(a-z)^2}$. Dieser Werth ist beständig positiv für jeden Werth von z. Der Werth von y müsste also ebenfalls immer positiv seyn, was aber nicht der Fall ist. Denn nimmt man z grösser an als a, so ist y negativ. Die Principien der Differential-Rechnung sind also in diesem Falle unrichtig. [*Es ist zu bewundern, dass sie es bei der unbestimmten und widersprechenden Voraussetzung von unendlichen kleinen Grössen, nicht noch öfter sind.*]

Nach dem obigen Satze ist der Werth von y nur dann nothwendig positiv, wenn die erste Ableitung $\frac{dy}{dz}$, in dem Umfange des Werths von z, [*von* o *bis* z,] nirgend unendlich gross ist. Nun ist wirklich $\frac{dy}{dz}$, welches $= \frac{1}{(a-z)^2}$ ist, unendlich gross für $z = a$. Also sind die Werthe von y zwar nothwendig positiv, von $z = 0$ bis $z = a$, aber nicht für $z > a$, obgleich auch dann noch die erste Ableitung $\frac{1}{(a-z)^2}$ nothwendig positiv ist.

für $f(x+k)$.

91.

Wir wollen jetzt weiter sehen, wie sich der Satz anwenden lässt, die Grenzen des Werths der Entwickelung von $f(x+k)$ zu finden.

I. Es sollen p und q zwei Werthe von $x+k$ seyn, für welche, von eiuem bestimmten x bis zu einem bestimmten $x+k$, der grösste und der kleinste Werth von $\frac{df(x+k)}{dk}$ Statt finden, so dass $\frac{dfp}{dx}$ der kleinste und $\frac{dfq}{dx}$ der grösste Werth von $\frac{df(x+k)}{dk}$ ist und dass folglich $\frac{df(x+k)}{dk} - \frac{dfp}{dx}$ und $\frac{dfq}{dx} - \frac{df(x+k)}{dk}$ immer positive Grössen sind.

II. Betrachtet man diese beide Grössen als erste Ableitungen nach k, so sind die Stammgrössen davon, so genommen, dass sie für $k=0$ verschwinden, weil x, p und q constant seyn sollen,

$$f(x+k) - fx - k\frac{dfp}{dx} \text{ und}$$

$$k\frac{dfq}{dx} - f(x+k) + fx$$

[*wie man sich überzeugt, wenn man die Grössen wieder nach k ableitet. Dieses giebt* $\frac{df(x+k)}{dk} - \frac{dfp}{dx}$ *und* $\frac{dfq}{dx} - \frac{df(x+k)}{dx}$, *weil* fx *jetzt eine Constante ist, die aber in beiden Grössen hinzu-*

kommen muss, damit solche für $k = 0$ *verchwinden.*]

III. In so fern nun $\frac{df(x+k)}{dk}$, von $k = 0$ bis zu einem bestimmten Werthe von k, nie unendlich gross ist, welches der Fall ist, wenn $\frac{dfp}{dx}$ und $\frac{dfq}{dx}$ [*nemlich der grösste und der kleinste Werth von* $\frac{df(x+k)}{dx}$] nicht unendliche Grössen sind, [*auch* $\frac{df(x+k)}{dk}$ *nicht das Zeichen wechselt,*] so erhält man, vermöge des obigen Satzes, wenn k positiv ist,

$$f(x+k) - fx - k\frac{dfp}{dx} > 0 \text{ und}$$

$$fx - f(x+k) + k\frac{dfq}{dx} > 0$$

[*weil bewiesener Maassen jede mit ihrem Element zugleich verschwindende Stammgrösse, wenn ihre erste Ableitung das Zeichen nicht wechselt, und nicht unendlich gross ist, wie dieses Alles hier der Fall war, für ein positives k das Zeichen der Ableitung hat, welches hier Plus war*], woraus folgt,

$$f(x+k) > fx + k\frac{dfp}{dx} \text{ und}$$

$$f(x+k) < fx + k\frac{dfq}{dx}.$$

IV. Man setze ferner p und q wären die Werthe von $x+k$, welche, von $k = 0$ bis zu einem bestimmten Werthe von k, den kleinsten und grössten

für $f(x+k)$.

Werth der zweiten Ableitung $\frac{d^2 f(x+k)}{dx^2}$ geben, so dass $\frac{d^2 fp}{dx^2}$ und $\frac{d^2 fq}{dx^2}$ die kleinsten und grössten Werthe von $\frac{d^2 f(x+k)}{dx^2}$ sind, so sind $\frac{d^2 f(x+k)}{dx^2} - \frac{d^2 fp}{dx^2}$ und $\frac{d^2 fq}{dx^2} - \frac{d^2 f(x+k)}{dx^2}$ immer positive Grössen.

V. Betrachtet man diese Grössen als Ableitungen nach k, so sind ihre Stammgrössen, so genommen, dass sie für $k = 0$ verschwinden, [*auf eine ähnliche Weise, wie in (II.)*]

$$\frac{df(x+k)}{dk} - \frac{dfx}{dx} - k\frac{d^2 fp}{dx^2} \text{ und}$$

$$k\frac{d^2 fq}{dx^2} - \frac{df(x+k)}{dk} + \frac{dfx}{dx}.$$

VI. In so fern also $\frac{d^2 f(x+k)}{dk}$, von k gleich Null bis zu einem bestimmten Werthe von k, nie unendlich gross ist, welches der Fall ist, wenn $\frac{d^2 fp}{dx^2}$ und $\frac{d^2 fq}{dx^2}$ [*nemlich der grösste und kleinste Werth von* $\frac{df(x+k)}{dk}$] nicht unendliche Grössen sind, [*auch* $\frac{d^2 f(x+k)}{dk^2}$ *nicht das Zeichen wechselt,*] sind die beiden gefundenen Grössen wieder, vermöge des obigen allgemeinen Satzes, immer endlich und positiv, wenn k positiv angenommen wird.

VII. Betrachtet man sie von Neuem als Ablei-

tungen nach k, so sind ihre Stammgrössen, so genommen, dass sie für $x = o$ verschwinden, weil x, p und q als Constanten betrachtet werden, [*wieder auf eine ähnliche Weise wie in (II.)*]

$$f(x+k) - fx - k\frac{dfx}{dx} - \frac{k^2}{2}\frac{d^2fp}{dx^2} \text{ und}$$

$$\frac{k^2}{2}\frac{d^2fq}{dx^2} - f(x+k) + fx + k\frac{dfx}{dx}.$$

VIII. Auch diese neue Grössen sind also, nach dem nemlichen Satze, immer positiv. Daraus folgt

$$f(x+k) > fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fp}{dx^2} \text{ und}$$

$$f(x+k) < fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fq}{dx^2}.$$

IX. Setzt man Drittens, dass p und q diejenigen Werthe von $x+k$ sind, für welche die dritte Ableitung $\frac{d^3f(x+k)}{dk^3}$, von $k = o$ bis zu einem gegebenen Werthe von k, am grössten oder kleinsten ist, so sind die beiden Grössen $\frac{d^3f(x+k)}{dk^3} - \frac{d^3fp}{dx^3}$ und $\frac{d^3fq}{dx^3} - \frac{d^3f(x+k)}{dk^3}$, im ganzen Umfange von k, immer positiv. Betrachtet man sie als erste Ableitungen nach k, so sind ihre Stammgrössen, so genommen, dass sie für $k = o$ verschwinden,

$$\frac{d^2f(x+k)}{dk^2} - \frac{d^2fx}{dx^2} - k\frac{d^3fp}{dx^3} \text{ und}$$

$$k\frac{d^2fq}{dx^3} - \frac{d^2f(x+k)}{dk^2} + \frac{d^2fx}{dx^2}$$

für $f(x+k)$.

[*wie in II.*] Und diese Grössen sind, nach dem allgemeinen Satze, immer endlich und positiv, in so fern $\frac{d^3 f(x+k)}{dk^3}$, im ganzen Umfange von k, nie unendlich ist, das heisst, in so fern $\frac{d^3 fp}{dx^3}$ und $\frac{d^3 fq}{dx^3}$ nicht unendlich sind.

X. Betrachtet man also die gefundenen Grössen von Neuem als erste Ableitungen nach x, so sind ihre Stammgrössen, so genommen, dass sie für $k=0$ verschwinden,

$$\frac{df(x+k)}{dk} - \frac{dfx}{dx} - k\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^2}{2}\frac{d^3fp}{dx^3} \text{ und}$$

$$\frac{k^2}{2}\frac{d^3fq}{dx^3} - \frac{df(x+k)}{dk} + \frac{dfx}{dx} + k\frac{d^2fx}{dx^2},$$

welche also auch nie unendlich gross und immer positiv sind.

XI. Betrachtet man auch diese Grössen noch als erste Ableitungen nach k, so sind ihre Stammgrössen, so genommen, dass sie für $k=0$ verschwinden,

$$f(x+k) - fx - k\frac{dfx}{dx} - \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} - \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fp}{dx^3} \text{ und}$$

$$\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fq}{dx^3} - f(x+k) + fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}.$$

Auch diese Grössen sind also, dem allgemeinen Satze zu Folge, positiv. Also ist

$$f(x+k) > fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fp}{dx^3} \text{ und}$$

$$f(x+k) < fx + k\frac{dfx}{d} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{d^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fq}{dx^3} \text{ u. s. w.}$$

XII. Wir haben bei diesen Entwickelungen k positiv angenommen. Wäre k negativ, oder setzte man $-k$ statt $+k$, so würde man für die erste Grenze

$$f(x-k) < fx - k\frac{dfp}{dx},$$

$$f(x-k) > fx - k\frac{dfq}{dx},$$

und für die zweite Grenze

$$f(x+k) < fx - k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fp}{dx^2}$$

$$f(x+k) > fx - k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fq}{dx^2}$$

u. s. w. finden.

XIII. Die Grösse $f(x+k)$ ist also überhaupt, k mag positiv oder negativ seyn, immer zwischen folgenden zwei Grössen

$$fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} \dots + \frac{k^\mu}{2.3\dots\mu}\frac{d^\mu fp}{dx^\mu}.$$

und

$$fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} \dots + \frac{k^\mu}{2.3\dots\mu}\frac{d^\mu fq}{d^{\ \mu}}$$

eingeschlossen, wenn man für p und q diejenigen Werthe von $x+k$ setzt, für welche $\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu}$, innerhalb des ganzen Umfanges von k, von o an, am kleinsten und am grössten ist, vorausgesetzt, dass die Grössen $\frac{d^\mu fp}{dx^\mu}$ und $\frac{d^\mu fq}{d^{x\mu}}$ nicht unendlich gross sind.

für $f(x+k)$.

XIV. Endlich ist aus den obigen Rechnungen leicht zu sehen, dass man für $\frac{d^\mu fp}{dx^\mu}$ und $\frac{d^\mu fq}{dx^\mu}$ nicht grade den kleinsten und grössten Werth von $\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu}$ nehmen darf, sondern dass man statt dessen auch beliebige Werthe, die kleiner als der kleinste und grösser als der grösste sind, setzen kann, welches die Bestimmung der Grenzen in vielen Fällen noch erleichtert.

XV. Ich will hier gelegentlich auf alle Fälle bemerken, dass ich immer unter absolut grössere und kleinere Grössen solche verstehe, die weiter nach dem positiven und negativen Unendlichen hin liegen; so dass, wenn $a > b$, $-a < -b$ ist.

92.

Das obige Verfahren giebt, wie man sieht, der Reihe nach, wieder die Glieder der Entwickelung von $f(x+k)$, aber es hat den Vorzug, dass man die Grössen nur so weit zu entwickeln braucht, als man will, und dass man die Grenzen des Restes erhält.

Will man nemlich, bei der Entwickelung von $f(x+k)$, bei dem μten Gliede stehen bleiben, so darf man, um die Grenzen für den Rest der Entwickelung zu finden, nur das folgende Glied

$$\frac{k^\mu}{2.3\ldots.\mu}\frac{d^\mu fx}{dx^\mu}$$

nehmen und statt desselben den grössten und kleinsten Werth von $\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu}$ setzen, von k gleich Null ab gerechnet, oder auch beliebige Grössen, die grösser uud kleiner sind, als dieser grösste und kleinste Werth von $\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu}$. Wären diese Grössen, oder eine von ihnen, unendlich gross, so gäbe es alsdann keine Grenzen. Dieses wäre dann auch der Fall, in welchem die Entwickelung unrichtig ist, weil der Werth von $\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu}$ irgendwo unendlich gross seyn müsste.

93.

Man kann auch überhaupt auf dieselbe Weise die Grenzen der Werthe jeder Function finden, von welcher man blos die Ableitung irgend einer Ordnung kennt. Man untersuche in diesem Falle den Werth der Ableitung, von dem Ursprunge der veränderlichen Grösse an. Ist sie nirgend unendlich gross, so kann man sich geradezu der obigen Ausdrücke bedienen, in welchen k die veränderliche Grösse ist und x irgend eine Constante bedeuten kann. Ist hingegen die Ableitung für gewisse Werthe der veränderlichen Grösse unendlich gross, so theile man die veränderliche Grösse in eben so viele Theile, nach den Gliedern, welche den unendlich

für $f(x+k)$.

grossen Werthen entsprechen, und wende die obigen Ausdrücke auf jeden Theil einzeln an.

94.

Um einige Beispiele zu geben, sey

I. $f(x+k) = (x+k)^m$, so dass $fx = x^m$. Alsdann ist

$$\frac{dfx}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2fx}{dx^2} = m.m-1\,x^{m-2}$$

$$\frac{d^3fx}{dx^3} = m.m-1.m-2\,x^{m-3} \text{ etc.}$$

und überhaupt

$$\frac{d^\mu fx}{dx^\mu} = Mx^{m-\mu}, \text{ wo}$$

$$M = m.m-1.m-2 \ldots. m-\mu+1,$$

wie aus der zweiten Vorlesung zu sehen, (auch aus 28.)

Also ist

$$\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu} = M(x+k)^{m-\mu},$$

welche Grösse, wie leicht zu sehen, nie unendlich gross seyn kann, so lange nicht $x+k=0$ und $\mu > m$ sind. Auch ist leicht zu sehen, dass der kleinste und grösste Werth von $M(x+k)^{m-\mu}$, [*in dem Umfange von* $x+0$ *bis* $x+k$] der eine zu $k=0$, der andere zu k gehören, so dass die Werthe von p und q, x und $x+k$, oder $x+k$ und x sind.

Grenzen - Ausdrücke

Der Werth der Entwickelung von $(x+k)^m$ ist also in den beiden Grenzen

$$x^m + mkx^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} k^2 x^{m-2} \ldots + \frac{Mk^\mu}{2.3\ldots\mu} x^{m-\mu}$$

und

$$x^m + mkx^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} k^2 x^{m-2} \ldots + \frac{Mk^\mu}{2.3\ldots\mu} (x+k)^{m-\mu}$$

eingeschlossen.

Vermittelst dieser Grenzen kann man die Schwierigkeiten vermeiden, welche aus der Nicht-Convergenz der Reihen entstehen können; denn da sich ein beliebiges ntes Glied zum folgenden, wie 1 zu $\frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{k}{x}$ verhält, so muss, wenn die Reihe convergiren soll, die Grösse $\frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{k}{x}$, abgesehen vom Zeichen, kleiner als 1 seyn. [*Lagrange scheint also eine Reihe convergent zu nennen, sobald jedes Glied kleiner ist als das Vorhergehende. Andere nennen Reihen nur dann convergent, wenn sie endliche Summen haben, was nicht bei jeder Reihe mit abnehmenden Gliedern der Fall ist. Die erste Benennung scheint allgemeiner und richtiger zu seyn, weil die Summe einer convergenten Reihe billig jeden beliebigen Werth haben und also auch unendlich gross muss seyn können.*] Ist nun $\frac{k}{x} < 1$, so ist klar, dass die Reihe zuletzt immer convergiren muss, weil der letzte Werth von $\frac{m-x+1}{n}$ gleich -1 ist. [*Denn* $\frac{m-n+1}{n}$

für $f(x+k)$.

ist gleich $\frac{\frac{m+1}{n}-1}{1}$, *welches für* $n=\infty$, *oder für ein unendlich entferntes Glied,* -1 *giebt.*]

Ist hingegen $\frac{k}{x}>1$, so muss die Reihe zuletzt immer divergiren, obgleich sie in ihren ersten Gliedern convergiren kann, [*weil alsdann für* $n=\infty$, $\frac{m-n+1}{n}\cdot\frac{k}{x}>-1$ *ist, indem, für* $n=\infty$, $\frac{m-n+1}{n}\cdot\frac{k}{x}=-1$ *war.*] Die Reihe kann also alsdann nicht anders mit Sicherheit gebraucht werden, als wenn man auf die oben gefundenen Grenzen Rücksicht nimmt.

II. Es sey zweitens

$$f(x+k)=a^{x+k}, \text{ so dass } fx=a^x,$$

so ist

$$\frac{dfx}{dx}=a^x\overset{e}{log}\,a, \frac{d^2fx}{dx^2}=a^x(\overset{e}{log}\,a)^2, \frac{d^3fx}{dx^3}=a^x(\overset{e}{log}\,a^3)\text{ etc.};$$

also allgemein

$$\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu}=a^{x+k}(\overset{e}{log}\,a)^\mu,$$

wovon die kleinsten und grössten Werthe zu $k=0$ und zu k gehören. Also sind, wenn man $x=0$ setzt,

$$1+k\overset{e}{log}\,a+\frac{k^2}{2}(\overset{e}{log}\,a)^2+\frac{k^3}{2.3}(\overset{e}{log}\,a)^3\ldots.+\frac{k^\mu}{2.3\ldots.\mu}(\overset{e}{log}\,a)^\mu$$

und

Grenzen - Ausdrücke

$$1+k\overset{e}{\log}a+\frac{k^2}{2}(\overset{e}{\log}a)^2+\frac{k^3}{2.3}(\overset{e}{\log}a)^3 \ldots + \frac{k^\mu}{2.3 \ldots \mu}(\overset{e}{\log}a)^\mu a^k$$

die Grenzen des Werths von a^k; wo man auch in das letzte Glied statt a^k irgend eine grössere Grösse setzen kann.

III. Es sey drittens

$$f(x+k) = \overset{e}{\log}(x+k), \text{ so dass } fx = \overset{e}{\log}x,$$

so ist

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2fx}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^3fx}{dx^3} = \frac{2}{x^3} \text{ etc.},$$

also allgemein

$$\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu} = \pm \frac{2.3 \ldots . \mu - 1}{(x+k)^\mu}.$$

Das obere Zeichen gilt, wenn μ ungrade, das untere, wenn μ grade ist.

So lange nicht $x+k=0$, ist offenbar $\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu}$ nicht unendlich gross und die grössten und kleinsten Werthe dieser Grösse gehören zu $k=0$ und $k=k$. Man erhält also für die Grenzen des Werths von $\overset{e}{\log}(x+k)$, vermöge des allgemeinen Satzes, die Ausdrücke

$$\overset{e}{\log}x + \frac{k}{x} - \frac{k^2}{2.x^2} + \frac{k^3}{3.x^3} \ldots . \pm \frac{k^\mu}{\mu x^\mu} \text{ und}$$

$$\overset{e}{\log}x + \frac{k}{x} - \frac{k^2}{2.x^2} + \frac{k^3}{3.x^3} \ldots . \pm \frac{k^\mu}{\mu (x+k)^\mu},$$

für $f(x+k)$.

wo man auch in den Nenner $(x+k)^\mu$, statt k eine noch grössere Grösse setzen kann.

IV. Es sey viertens

$f(x+k) = \sin(x+k)$, so dass $fx = \sin x$,

so ist

$$\frac{dfx}{dx} = \cos x,\ \frac{d^2fx}{dx^2} = -\sin x \text{ etc.}$$

und allgemein

$$\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu} = \pm \sin(x+k), \text{ oder } = \pm \cos(x+k),$$

je nachdem μ von der Form $4n$, oder $4n+2$, oder $4n+1$, oder $4n+3$ ist, wo n eine ganze Zahl bedeutet, welches sich allgemein durch

$$\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu} = \sin(x+k+\tfrac{1}{2}\mu\pi)$$

ausdrücken lässt, wo $\frac{1}{2}\pi$ [*den*] einen rechten Winkel [*messenden Kreisbogen vom Halbmesser* 1] bedeutet.

Nun ist klar, dass, was auch x und k seyn mögen, die grössten und kleinsten Werthe von $\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu}$ immer 1 und -1 sind [*weil* $\frac{d^\mu f(x+k)}{dx^\mu}$ *immer ein* S*inus oder* C*osinus ist, also nie kleiner als* -1 *und nie grösser als* $+1$ *seyn kann*]. Die Grenzen für $\sin(x+k)$ sind also

$$\sin x + k\cos x - \frac{k^2}{2}\sin x - \frac{k^3}{2.3}\sin x \ldots \pm \frac{k^\mu}{2.3\ldots\mu}.$$

Grenzen - Ausdrücke

Setzt man $x = 0$, so erhält man

$$k - \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^2}{2.3.4.5} \ldots \pm \frac{k^\mu}{2.3\ldots\mu},$$

und, wenn man $x = \frac{1}{2}\pi$ setzt,

$$1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{2.3.4} \ldots \pm \frac{k^\mu}{2.3\ldots\mu},$$

welches die Grenzen für $\sin k$ und $\cos k$ sind, wenn man μ um 1 grösser annimmt, als der Exponent von k in dem Gliede ist, bei welchem man stehen bleiben will.

V. Am Ende der siebenten Vorlesung (in 68. III.) haben wir die Reihe für die Entwickelung von $f(y+k)$ gefunden, wenn y die Tangente des Bogens x bedeutet und $fy = x$ ist. Es war dort allgemein

$$\frac{d^\mu fy}{dy^\mu} = \pm 2.3 \ldots (\mu - 1) \cos x^\mu \times (\sin \text{ oder } \cos \mu x).$$

Also ist auch

$$\frac{d^\mu f(y+k)}{dy^\mu} = \pm 2.3 \ldots (\mu - 1) \cos z^\mu \times (\sin \text{ oder } \cos \mu z),$$

wenn man $y + k = \tan z$, das heisst

$$\tan z = \tan x + k$$

setzt. Nun ist leicht zu sehen, dass, was auch y und k seyn mögen, die kleinsten und grössten Werthe von $\cos z^\mu \times (\sin \text{ oder } \cos \mu z)$, -1 und $+1$ sind; [*weil ein Product von Sinus uud Cosinus nichts Grösseres und Kleineres geben kann*]. Es folgt also, dass die Reihe für beliebige Werthe von x und k gilt, und,

für $(x+k)$.

dass, wenn man bei dem μten Gliede stehen bleiben will, der Rest nothwendig in den Grenzen $\pm \frac{k^\mu}{\mu}$ eingeschlossen ist.

Setzt man $x = o$, so erhält man den Grenzen-Ausdruck

$$\text{arc tang}\, k = k - \frac{k^3}{3} + \frac{k^5}{5} \cdots \pm \frac{k^{\mu+1}}{\mu+1},$$

wo μ der Exponent des Gliedes ist, bei welchem man stehen bleiben will.

95.

Wir wollen zum Schlusse bemerken, dass die obigen Ausdrücke auch zur Entwickelung einer beliebigen Function einer veränderlichen Grösse nach den Potenzen der veränderlichen Grösse dienen können. Denn setzt man $x = o$, so erhält man blos fk, welches eine beliebige Function der veränderlichen Grösse k bezeichnen kann.

Nun ist klar, dass für $k = o$ die Werthe von $fx, \frac{dfx}{dx}, \frac{d^2fx}{dx^2} \cdots$ in $fox, \frac{dfox}{dx}, \frac{d^2fox}{dx^2} \cdots$ übergehen. Also ist allgemein

$$fk = fox + k\frac{dfox}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fox}{dx^2} \cdots$$

Will man nun beim μten Gliede stehen bleiben, so darf man nur, weil das folgende Glied

$$\frac{k^\mu}{2.3.4 \ldots \mu}\frac{d^\mu fox}{dx^\mu}$$

Grenzen - Ausdrücke

ist, statt $\frac{d^\mu f o x}{dx^\mu}$ den grössten und kleinsten Werth von $\frac{d^\mu f k}{dk^\mu}$, oder noch grössere oder kleinere Werthe setzen, so erhält man die Grenzen des Rests der Entwickelung.

Die Entwickelung ist also genau, so lange die Werthe der Grenzen nicht unendlich gross sind. Wäre eine der Grenzen unendlich gross, so könnte es auch der Rest der Reihe, und die Entwickelung könnte unrichtig seyn. Man muss in einem solchen Falle entweder bei einem frühern Gliede stehen bleiben, oder für k nur solche Werthe annehmen, für welche $\frac{d^\mu f k}{dx^\mu}$ von o bis k nicht unendlich gross ist.

96.

Da die Grenzen dem grössten und kleinsten Werthe von $\frac{d^\mu f k}{dx^\mu}$ entsprechen, von $k = o$ bis zu $k = k$; so gehört offenbar der genaue Werth des Rests der Reihe für fk zu irgend einem mittleren Werthe von $\frac{d^\mu f k}{dx^\mu}$, welchen man durch $\frac{d^\mu f \varkappa}{dx^\mu}$ bezeichnen kann, wenn man unter $\varkappa$ eine Grösse zwischen o und k versteht. Der Werth der Entwickelung einer beliebigen Function fk, lässt sich also allemal durch eine e n d l i c h e Reihe ausdrücken, wenn man sich einer

unbekannten Grösse $\varkappa$ bedient, die kleiner ist als k [*und grösser als Null*]. Man findet also folgenden, seiner Einfachheit wegen, merkwürdigen analytischen Satz:

$$fk = fok + k\frac{dfok}{dk} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fok}{dk^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fok}{dk^3},$$

$$\ldots + \frac{k^{\mu-1}}{2.3\ldots\mu-1}\cdot\frac{d^{\mu}fok}{dk^{\mu}} + \frac{k^{\mu}}{2.3\ldots\mu}\cdot\frac{d^{\mu}f\varkappa}{dk^{\mu}},$$

für jeden beliebigen Exponenten μ.

97.

Hieraus folgt auch der strenge Beweis eines andern Satzes, den man bisher blos vorauszusetzen sich begnügte, nemlich, dass sich in der Entwickelung einer Function die veränderliche Grösse, nach welcher die Entwickelung geordnet ist, immer so klein annehmen lässt, dass ein beliebiges Glied der Reihe grösser ist, als alle folgenden zusammen genommen.

Man darf nemlich, um Dieses zu beweisen, nur zeigen, dass immer

$$\frac{k^{\mu-1}}{2.3\ldots\mu-1}\cdot\frac{d^{\mu-1}fk}{dk^{\mu-1}} > \frac{k^{\mu}}{2.3\ldots\mu}\cdot\frac{d^{\mu}fk}{dk^{\mu}}$$

gemacht werden kann. Dieses geschieht, sobald

$$\frac{d^{\mu-1}fk}{dk^{\mu-1}} > \frac{k}{\mu}\cdot\frac{d^{\mu}fk}{dk^{\mu}}$$

ist und hierzu lässt sich allemal durch Verkleinerung von k gelangen, in so fern nicht etwa $\frac{d^{\mu-1}fk}{dk^{\mu-1}}$ Null ist.

Grenzen-Ausdrücke für $f(x+k)$.

98.

Nicht minder lässt sich vermittelst des allgemeinen Ausdrucks der Grenzen der Satz beweisen, dass, wenn in den Entwickelungen zweier verschiedenen Functionen fk und Fk, die μ ersten Glieder der Entwickelung von fk, der Reihe nach, genau mit den μ ersten Gliedern der Entwickelung von Fk übereinstimmen, dass man dann die Werthe der beiden Functionen durch Verkleinerung der Grösse k einander so nahe bringen kann, dass der Werth einer dritten Function φk auf keine Weise zwischen den Werthen der beiden ersten Functionen enthalten seyn kann, wenn nicht auch die μ ersten Glieder der Entwickelung von φk, denen der Entwickelung von fk und Fk, der Reihe nach, gleich sind. Denn der Unterschied $Fk - fk$ ist nach der Voraussetzung

$$\frac{k^{\mu}}{2.3\ldots.\mu}(F\varkappa - f\varkappa'),$$

wo zwar die Grössen $\varkappa$ und $\varkappa'$ in den beiden Functionen verschieden seyn können, immer aber kleiner als k seyn müssen. Dagegen ist der Unterschied $\varphi k - fk$ von der Form

$$\frac{k^{\lambda}}{2.3\ldots.\lambda}\left(\frac{d^{\lambda}\varphi k}{dk^{\lambda}} - \frac{d^{\lambda} fk}{dk^{\lambda}}\right)\ldots. + \frac{k^{\mu}}{2.3\ldots.\mu}(\varphi\varkappa - f\varkappa'),$$

wo $\lambda < \mu$ ist [*weil nemlich die Entwickelungen von fk und φk angenommenermaassen schon früher als beim μten Gliede, z. B. beim λten Gliede, von einander abweichen sollen*]. Hieraus folgt, dass,

wenn man den Werth von k verkleinert, das Verhältniss dieser Differenz zur obigen immer zunimmt, in so fern nicht auch $\frac{d\lambda\varphi k}{dk^\lambda} = \frac{d^\lambda fk}{dk^\lambda}$ ist.

Anwendung der Grenzen-Ausdrücke auf Geometrie und Mechanik.

99.

Diese Sätze sind es, auf welchen eine strenge begründete Anwendung der Theorie der Ableitungen auf diejenigen Theile der Geometrie und Mechanik beruht, in welchen man sich der Differential-Rechnung bedient.

I. Es sey z. B. fx die Ordinate einer Curve, deren Abscisse x ist. Man nehme eine neue Abscisse k an, welche da anfängt, wo x aufhört, welches jetzt als constant betrachtet werden soll, so ist die zugehörige Ordinate

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots.$$

Man bleibe bei den ersten beiden Gliedern stehen und setze

$$fx + k\frac{dfx}{dx} = z,$$

welches eine Gleichung zwischen der Abscisse x und der Ordinate z ist, so ist diese Gleichung diejenige einer graden Linie, welche durch den der Abscisse x entsprechenden Punct geht, und mit der Axe einen Winkel macht, dessen Tangente $\frac{dfx}{dx}$ ist.

Anwendung der Grenzen-Ausdrücke auf

Da die beiden Glieder, welche die Ordinate dieser graden Linie ausdrücken, mit den beiden ersten Gliedern des Ausdrucks der Curven-Ordinate übereinstimmen, so ist es unmöglich, dass irgend eine andere, durch den nemlichen Punct der Curve gehende grade Linie zwischen ihr nnd jener graden Linie hindurch gehen kann. Die letztere ist also die Tangente der Curve an dem gemeinschaftlichen Puncte, so dass, wenn t die Subtangente bezeichnet, $\frac{y}{t} = \frac{dfx}{dx}$ ist, woraus $t = y : \frac{dfx}{dx} = y : \frac{dy}{dx}$ folgt.

II. Man nehme die drei ersten Glieder der Entwickelung [*von* $f(x+k)$] und betrachte die Curve, deren Gleichung zwischen der Ordinate z und der Abscisse k,

$$z = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}$$

ist. Diese Curve ist eine Parabel, deren Axe mit der Ordinate parallel, und deren Parameter $z : \frac{d^2fx}{dx^2}$ ist.

Diese Parabel geht durch den der Abscisse x entsprechenden Punct der gegebenen Curve und hat mit ihr eine gemeinschaftliche Tangente, weil die beiden Glieder ihrer Gleichung mit denen der Gleichung der Curve übereinstimmen. Da aber auch die dritten Glieder übereinstimmen, so folgt, dass keine andere Parabel zwischen ihr und der Curve hindurch gehen kann. Die Parabel ist also die berührende

Geometrie und Mechanik.

(osculatrice). Sie hat die Grosse $2 : \frac{d^2 fx}{dx^2}$, oder $2 : \frac{d^2y}{dx^2}$ zum Parameter.

III. Da man die Krümmung der Curve in der Ebene gewöhnlich mit dem Kreise vergleicht, so setze man, um den Krümmungs-Halbmesser zu finden, die gegebene Curve sey ein Kreis, dessen allgemeine Gleichung, wie bekannt,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

ist, so ist

$$y = b + \sqrt{(r^2 - (x-a)^2)} = fx.$$

Hieraus findet man, wenn man die Ableitungen nimmt,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-a}{\sqrt{(r^2-(x-a)^2)}} = \frac{dfx}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2}{(r^2-(x-a)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2fx}{dx^2}.$$

Entwickelt man aus diesen drei Gleichungen die Werthe von a, b, r in x, $\frac{dfx}{dx}$ und $\frac{d^2fx}{dx^2}$, so findet man nicht allein den Halbmesser des Krümmungs-Kreises r, sondern auch die Lage des Mittelpuncts des Krümmungs-Kreises durch seine Coordinaten a und b, die dann zugleich die Coordinaten der Evolute [*der gegebenen Curve sind*]. Denn die drei ersten Glieder der Entwickelung von y für den Kreis stimmen alsdann mit denen für die gegebene Curve überein.

Man findet für eine beliebige Curve

Anwendung der renzen-Ausdrücke auf

$$r = -\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$a = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$b = y - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Hieraus kann man die Theorie der Krümmung weiter entwickeln, wie wir es in §. 117. der Theorie der analytischen Functionen thaten. [*Man sehe diese Stelle und überhaupt die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Grössen auf die Geometrie im ersten Bande.*]

100.

Wenn man den von einem bewegten Körper durchlaufenen Raum als Function der während der Bewegung verflossenen Zeit betrachtet und x die Zeit, y den Raum nennt, so drückt die Gleichung $y = fx$ die Art der Bewegung aus. Der in der Zeit k, vom Ende der Zeit x ab gerechnet, beschriebene Raum sey z, so ist $z = f(x+k) - fx$, und, wenn man entwickelt,

$$z = k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}\ldots$$

I. Nun

Geometrie und Mechanik.

I. Nun nehme man von diesem Ausdrucke von z nur das erste Glied und irgend einen andern bewegten Körper an, dessen Bewegung durch die Gleichung

$$u = k \frac{dfx}{dx}$$

zwischen dem Raume u und der Zeit k bezeichnet wird, so ist die Bewegung des Letztern gleichförmig und die Geschwindigkeit desselben $\frac{dfx}{dx}$. Da u durch ein Glied ausgedrückt wird, welches dem ersten Gliede von z gleich ist, so folgt aus dem, was allgemein bewiesen wurde, dass diese gleichförmige Bewegung im ersten Augenblicke mehr als irgend eine andere gleichförmige Bewegung mit der gegebenen Bewegung übereinstimmen wird; denn man kann immer den Zeitraum k klein genug annehmen, dass zwischen den von beiden Bewegungen durchlaufenen Räumen, in der nemlichen Zeit, kein mittlerer Raum mit einer andern Geschwindigkeit als $\frac{dfx}{dx}$ durchlaufen werden kann. Also kann man $\frac{dfx}{dx}$ als den Ausdruck der Geschwindigkeit am Ende der Zeit x, für jede durch die Gleichung $y = fx$ bezeichnete Bewegung ansehen.

II. Nimmt man die beiden ersten Glieder des Ausdrucks von z und lässt dieselben den Raum bedeuten, welchen ein anderer Körper in der Zeit k durchläuft, so bezeichnet

Anwendung der Grenzen-Ausdrücke auf

$$u = k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}$$

eine Bewegung, die aus einer gleichförmigen Bewegung, von der Geschwindigkeit $\frac{dfx}{dx}$, und aus einer gleichförmig beschleunigten Bewegung zusammengesetzt ist, für welche die constante beschleunigende Kraft, zu Folge der Erfahrung an den Wirkungen der Schwere, durch $\frac{d^2fx}{dx^2}$ bezeichnet wird.

Da die Glieder des Werths von u die nemlichen sind, wie die beiden ersten Glieder des allgemeinen Ausdrucks von z, so folgt, vermöge der obigen Sätze, und durch ein dem obigen ähnliches Raisonnement, dass die neue Bewegung in dem ersten Augenblicke der Zeit k, der durch die Gleichung $z = f(x+k) - fx$ oder $y = fx$ ausgedrückten Bewegung näher kommt, als irgend eine andere ähnliche Bewegung, so dass man $\frac{dfx}{dx}$ für die Geschwindigkeit und $\frac{d^2fx}{dx^2}$ für die beschleunigende Kraft im Anfange der Zeit k, das heisst, am Ende der Zeit x, annehmen kann. Wenn also, allgemein, y den durchlaufenen Raum, als Function der Zeit ausgedrückt, bezeichnet, so ist $\frac{dy}{dx}$ die Geschwindigkeit und $\frac{d^2y}{dx^2}$ die beschleunigende Kraft der Bewegung.

Diese Gleichungen finden für gradlinige Bewegungen von selbst Statt. Betrachtet man krummlinige Bewegungen als aus gradlinigen zusammengesetzt, so

Geometrie und Mechanik.

findet man die Gesetze der Geschwindigkeiten und Kräfte für jede beliebige Bewegung.

[*Man sehe wegen dieser Principien auch die Anmerkung zum 6ten Artikel im dritten Theile des ersten Bandes.*]

101.

Wir begnügen uns, mit wenigen Worten den Nutzen unsres Lehrsatzes von den Grenzen des Werths entwickelter Functionen bei der Anwendung der Ableitungen auf die Geometrie und Mechanik angezeigt zu haben. Mehreres Detail findet man im zweiten [*und dritten*] Theil unserer Theorie der analytischen Functionen.

Zehnte Vorlesung.

Von den Ableitungs-Gleichungen und ihrem Nutzen bei der Umformung der Functionen. Analyse der Winkel-Functionen.

102.

Bis jetzt betrachteten wir die Ableitungen nur als Mittel zur Entwickelung von Reihen. Sie dienen indessen auch zu einem eigenen Systeme von algebraischen Operationen und sind gleichsam der Schlüssel zur Umformung der Functionen.

Wenn eine Function einer veränderlichen Grösse auf zwei verschiedene Arten ausgedrückt ist, so erhält man, wenn man die beiden Ausdrücke vergleicht, eine identische Gleichung; denn der Werth ist identisch derselbe. Die Gleichung muss folglich unabhängig von der veränderlichen Grösse, das heisst, für jeden Werth der veränderlichen Grösse, Statt findn. Die Gleichung findet also auch Statt, wenn man zu der veränderlichen Grösse irgend eine

Gleichungen.

andere Grösse k hinzusetzt. [*Man nennt zuweilen jede beliebige Gleichung identisch, z. B. auch die Gleichung*

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots = 0$$

mit bestimmten Coefficienten $a, b, c \ldots$ *Aber nur dann ist eine Gleichung, in Beziehung auf irgend eine darin vorkommende Grösse, identisch, wenn diese Grösse aus der Gleichung nicht gefunden werden kann, sondern vielmehr die Gleichung für jeden beliebigen Werth der Grösse Statt findet und folglich die unbekannte Grösse auch gleich Null gesetzt werden kann. In dem Beispiele ist dieses nicht anders möglich, als wenn die Coefficienten* $a, b, c \ldots$ *unbestimmt sind. Die Grössen, in Beziehung auf welche Gleichungen identisch sind, müssen sich in denselben unter einander aufheben.*]

103.

$fx = 0$ sey eine solche identische Gleichung, so ist auch $f(x+k) = 0$; also auch, wenn man entwickelt,

$$fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots = 0,$$

für jeden beliebigen Werth von k. Daraus folgt, dass auch einzeln

$$fx = 0, \frac{dfx}{dx} = 0, \frac{d^2fx}{dx^2} = 0 \text{ etc.}$$

ist.

Von den Ableitungs-

[*Nemlich, wenn man erst* $k = 0$ *setzt, so erhält man* $fx = 0$ *für jeden Werth von* k, *weil* fx *nicht von* k *abhängt. Also bleibt übrig:*

$$k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots . = 0,$$

oder, wenn man mit k *dividirt,*

$$\frac{dfx}{dx} + \frac{k}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots . = 0,$$

für jeden beliebigen Werth von k; *also auch für* $k = 0$. *Setzt man* $k = 0$, *so erhält man* $\frac{dfx}{dx} = 0$; *eben so* $\frac{d^2fx}{dx^2} = 0$ *etc.*]

Daraus folgt, dass man die nemliche Gleichung [*la même équation: soll vielleicht heissen „wiederum eine identische Gleichung“*] erhält, wenn man eine Ableitung davon irgend einer Ordnung nimmt.

104.

Man setze nun eine Gleichung zwischen x und y, wie

$$F(x, y) = u = 0,$$

vermöge welcher y eine Function von x ist, so ist klar, dass, wenn man wirklich y als diejenige Function von x betrachtet, welche durch die Gleichung bestimmt wird, die Gleichung

$$F(x, y) = u = 0$$

identisch seyn und folglich unabhängig von x Statt finden muss. Also muss die Gleichung auch zwischen ihren Ableitungen von allen Ordnungen Statt finden.

Gleichungen.

Nimmt man also die ersten, zweiten etc. Ableitungen jedes Gliedes, so erhält man eben so viele neue Gleichungen, die mit der Stammgleichung zugleich Statt finden. Folglich findet auch jede beliebige Verbindung dieser neuen Gleichungen Statt.

Wir wollen allgemein Ableitungs-Gleichungen der ersten, zweiten etc. Ordnung (équations decrivées du premier ordre, du second ordre etc.), oder blos erste, zweite etc. Ableitungs-Gleichung (équations premiers, secondes etc.) nicht blos diejenigen Gleichungen nennen, welche man erhält, wenn man die ersten, zweiten etc. Ableitungen aller Glieder einer, als Stammgleichung betrachteten Gleichung nimmt, sondern auch die Gleichungen, welche durch irgend eine Verbindung der Stammgleichung mit ihrer ersten, zweiten etc. abgeleiteten entstehen [*zum Unterschiede kann man letztere Ableitungs-Gleichungen, erstere abgeleitete Gleichungen nennen.*]

Enthält also die Stammgleichung x und y, so wird die abgeleitete der ersten Ordnung, oder die erste abgeleitete Gleichung [*desgleichen die erste Ableitungs-Gleichung*] x, y und $\frac{dy}{dx}$, diejenige der zweiten Ordnung $x, y, \frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthalten u. s. w.

Betrachtete man nicht y als Function von x, sondern umgekehrt x als Function von y, so würde die erste Ableitungs-Gleichung eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dx}{dy}$, die zweite eine Gleichung zwischen x,

y, $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$ u. s. w. seyn. Nach der 7ten Vorlesung kann man immer Gleichungen der einen Art in Gleichungen der andern verwandeln.

Anwendung der Ableitungs-Gleichungen auf Winkel-Functionen.

105.

Um den Nutzen der Ableitungs-Gleichungen bei der Umformung der Functionen an einigen Beispielen zu zeigen, will ich die Functionen $\sin x$ und $\cos x$ annehmen, deren Ableitungen wir in der fünften Vorlesung fanden.

Setzt man also

$$y = \sin x \text{ und } z = \cos x,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \text{ und } \frac{dz}{dx} = -\sin x,$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = -y.$$

Man multiplicire die erste dieser beiden Gleichungen mit $\sqrt{-1}$ und addire sie zur zweiten, so erhält man

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\sqrt{-1} = -y + z\sqrt{-1} = (z + y\sqrt{-1})\sqrt{-1},$$

woraus folgt:

$$\frac{\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\sqrt{-1}}{z + y\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}.$$

auf Winkel-Functionen.

Nun ist in der sechsten Vorlesung gezeigt worden, dass, wenn p irgend eine Function von x ist, $\frac{dp}{dx} : p$ die erste Ableitung von $\overset{e}{log}\, p$ bezeichnet. Also ist [*wenn man hier* $p = z + y\sqrt{-1}$ *setzt, welches* $\frac{dp}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\sqrt{-1}$ *und* $\dfrac{\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\sqrt{-1}}{z + y\sqrt{-1}}$ $= \sqrt{-1} = \frac{dp}{dx} : x$ *giebt,*]

$$\overset{e}{log}\,(z + y\sqrt{-1} = x\sqrt{-1} + a$$

diejenige erste Stammgleichung, von welcher die obige durch die Ableitung [*wie leicht zu sehen*] entstanden seyn kann. Die Grösse a ist die willkürliche Constante, welche, wie wir am Ende der 5ten Vorlesung sahen, immer zu der Stammgrösse einer gegebenen Ableitung hinzukommen kann und durch welche dieselbe erst ganz diejenige Allgemeinheit erhält, deren sie fähig ist. Zum ersten Gliede der Gleichung ist nicht etwa ebenfalls eine Constante hinzuzufügen nöthig; denn diese zweite Constante würde sich allemal, blos dadurch, dass man sie auf die andere Seite der Gleichung versetzte, mit der ersten Constante verbinden lassen.

Nun aber ist die Constante a willkürlich. Sie muss also der Art der Functionen y und z gemäss bestimmt werden.

Zu dem Ende erwäge man, dass für $x = 0$,
$\sin x = 0$ und $\cos x = 1$; also $y = 0$, $z = 1$

ist. Die gefundene Gleichung muss also diesen Bedingungen genugthun.

Sie giebt für $x = 0$, $\overset{e}{log}\ 1 = a$; folglich ist, weil $\overset{e}{log}\ 1 = 0$,

$$a = 0.$$

Die Gleichung ist also, vollständig, blos

$$\overset{e}{log}(z + y\sqrt{-1}) = x\sqrt{-1},$$

oder, wenn man zu den Exponential-Grössen übergeht,

$$z + y\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}},$$

wo e, wie wir immer annahmen, die Zahl bedeutet, deren hyperbolischer Logarithme gleich 1 ist.

Setzt man statt y und z wieder ihre Werthe $\sin x$ und $\cos x$, so erhält man den merkwürdigen Ausdruck

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}},$$

welcher auch wegen der Zweideutigkeit des Zeichens vor $\sqrt{-1}$ [*oder auch deshalb, weil, wenn man* $-x$ *statt* $+x$ *setzt,* $\sin x$ *in* $-\sin x$ *übergeht,* $+\cos x$ *aber* $+\cos x$ *bleibt*],

$$\cos x - \sin x\sqrt{-1} = e^{-x\sqrt{-1}}$$

giebt. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich $\sin x$ und $\cos x$ finden, wenn man die Gleichungen addirt und substrahirt. Man erhält

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-1}}}{2} \text{ und}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

auf Winkel-Functionen.

Die Sinus und Cosinus lassen sich also durch unmögliche Exponential-Grössen ausdrücken. Diese Ausdrücke sind eine der schönsten analytischen Entdeckungen dieses [*des achtzehnten*] Jahrhunderts.

106.

Man erhält auch die gefundenen Ausdrücke von $\sin x$ und $\cos x$ durch Vergleichung der, oben in der vierten und sechsten Vorlesung gefundenen, Reihen für $\sin x$, $\cos x$ und e^x. So hat sie Euler im siebenten Bande der Miscellanea Berolinensia bewiesen. In seiner Introductio leitet er sie von den algebraischen Ausdrücken der Sinus und Cosinus vielfacher Bogen durch eine sinnreiche Induction her, die aber von unendlichen und unendlich kleinen Grössen abhängt, und die wir in der Theorie der Functionen §. 22 und 25. strenger zu begründen suchten.

Da die Reihen schon von Newton in seinem Briefwechsel mit Oldemburg vorkommen und also vor dem Ende des vorigen [*siebenzehnten*] Jahrhunderts bekannt waren, so hätte man schon damals die obigen Ausdrücke finden und dadurch der Theorie der Winkel-Functionen diejenige Vervollkommnung geben können, die sie erst funfzig Jahre später durch Euler erhielt. [*Da der Uebergang von den Reihen zu den obigen Ausdrücken so leicht ist und so nahe vor Augen liegt, so ist dieser Fall ein merkwürdiges Beispiel, wie öfters das nahe liegende so viele Jahre unentdeckt bleiben kann, zugleich aber eine Lehre, dass man in der Regel*

Anwend. der Ableitungs-Gleichungen

neue Wahrheiten nicht fern, sondern in der Nähe suchen muss.]

Die Entdeckung der Ausdrücke der Kreisbogen durch unmögliche Logarithmen fällt eigentlich in den Anfang dieses [*des achtzehnten*] Jahrhunderts. Sie ist eine der schönsten Entdeckungen Johann Bernoulli's, welcher sie mit wenigen Worten in den Mémoiren der Academie der Wissenschaften [*zu Paris*] vom Jahr 1702 mittheilte. [*Die Abhandlung führt dem Titel: Solution d'un problème concernant le calcul intégral, avec quelques abrégez par rapport à ce calcul, par M. Bernouilli, professeur à Gröningue; le tous extrait d'une de ses lettres ecrite de Gröningue, le 5 aout 1702. Der Hauptgegenstand kommt erst ganz kurz am Ende der Abhandlung vor.*] Er war darauf durch Integration des durch seine Tangente ausgedrückten Kreisbogen-Elements mittels unmöglicher Logarithmen gekommen, so wie Leibnitz die Reihe für den Bogen durch die Tangente, durch Integration des nemlichen Elements, vermittels Auflösung in eine Reihe gefunden hatte.

Diese Entdeckung führte natürlich auch zu den Exponential-Formeln; aber sie blieb lange Zeit unbenutzt, und nur erst als die Ausdrücke auf anderm Wege gefunden waren, sahe man, dass man sie unmittelbar durch Integration erhalten könne.

107.

Aus der Gleichung

$$\cos x + \sin x \sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}},$$

auf Winkel-Functionen.

in welcher die Wurzelgrösse $\sqrt{-1}$ positiv und negativ genommen [*oder in welcher auch* $-x$ *statt* $+x$ *gesetzt werden kann*], lässt sich die gesammte Theorie der Wurzel-Functionen herleiten. Denn multiplicirt man die Gleichung mit der ähnlichen

$$\cos y + \sin y \sqrt{-1} = e^{y\sqrt{-1}},$$

so erhält man

$$(\cos x + \sin x \sqrt{-1})(\cos y + \sin y \sqrt{-1}) = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

Setzt man dagegen in die anfängliche Gleichung $x+y$ statt x, so erhält man

$$\cos(x+y) + \sin(x+y)\sqrt{-1} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

Entwickelt man also das Product und vergleicht die beiden Ausdrücke, so ist

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y + (\cos x \sin y + \sin x \cos y)\sqrt{-1}$$
$$= \cos(x+y) + \sin(x+y)\sqrt{-1}.$$

Da diese Gleichung für beide Zeichen von $\sqrt{-1}$ Statt findet [*so dass also auch*

$$\cos x \sin y - \sin x \sin y - (\cos x \sin y + \sin x \cos y)\sqrt{-1}$$
$$= \cos(x+y) - \sin(x+y)\sqrt{-1}$$

ist], so erhält man einzeln [*wenn man die Gleichungen addirt und subtrahirt, und im letzten Falle den Rest mit* $\sqrt{-1}$ *dividirt*,]

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y,$$

welche Ausdrücke in der Geometrie bewiesen werden. und welche die Grundlage der Theorie der Winkel-Functionen ausmachen. [*Man ging aber von*

Anwend. der Ableitungs-Gleichungen

dieser Gleichung aus, um die Ableitungen von $\sin x$ *und* $\cos x$ *zu finden, auf welchen wieder die gegenwärtigen Gleichungen beruhen, so dass die gegenwärtige Rechnung nur den Rückweg nimmt.*]

108.

Erhebt man die Gleichung $\cos x + \sin x \sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}}$ zur *m*ten Potenz, so erhält man

$$(\cos x + \sin x \sqrt{-1})^m = e^{mx\sqrt{-1}}.$$

Setzt man dagegen in die Gleichung $\cos x + \sin x \sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}}$, mx statt x, so erhält man

$$\cos mx + \sin mx \sqrt{-1} = e^{mx\sqrt{-1}},$$

also ist [*wenn man die beiden Werthe von* $e^{mx\sqrt{-1}}$ *einander gleich setzt*]

$$(\cos x + \sin x \sqrt{-1})^m = \cos mx + \sin mx \sqrt{-1},$$

welcher Ausdruck sowohl wegen seiner Einfachheit und Eleganz, als wegen seiner Allgemeinheit und vielfachen Anwendungen merkwürdig ist.

[*Wenn man, wie oben bei den Winkel-Functionen in den Anmerkungen geschahe, von der Grundgleichung*

$$\varphi(x-y) = \varphi x \varphi y + f x f y$$

ausgeht, so kann man die Gleichung $(\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})^m = \cos mx \pm \sin mx \sqrt{-1}$ *auch, wie folgt, ohne Zurückleitung und ohne Dazwischenkunft von Reihen und Exponential-Grössen finden.*

Die Grundgleichung nemlich giebt, wie in

auf Winkel-Functionen.

(46. *Anmerk.*) gezeigt,

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \text{ und}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$$

Nun ist

$$(\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})(\cos y \pm \sin y \sqrt{-1}) =$$

$$\cos x \cos y \pm (\cos x \sin y + \sin x \cos y)^{\sqrt{-1}} - \sin x \sin y.$$

Also ist

$$(\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})(\cos y \pm \sin y \sqrt{-1})$$
$$= \cos(x+y) \pm \sin(x+y)\sqrt{-1}.$$

Bezeichnet man nun $\cos x \pm \sin x \sqrt{-1}$ *durch* fx, *so ist*

$$\cos y \pm \sin y \sqrt{-1} = fy \text{ und}$$

$$\cos(x+y) \pm \sin(x+y)\sqrt{-1} = f(x+y);$$

also hat fx *die Eigenschaft, dass*

$$fx\,fy = f(x+y)$$

ist.

Nun aber ist in (30. *Anmerk. VI.*) *gezeigt worden, dass wenn eine Grösse* fx *die Eigenschaft* $fx\,fy = f(x+y)$ *hat, der nemlichen Grösse auch die Eigenschaft* $(fx)^m = f(mx)$ *zukommt: also ist auch unmittelbar*

$$(\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})^m = \cos mx \pm \sin mx \sqrt{-1};$$

wie vorhin.

Soll übrigens dieser Ausdruck allgemein genommen werden, so dass m nicht blos eine ganze Zahl, sondern auch, beliebig, einen Bruch bedeuten kann, so umfasst er in der obigen Gestalt nicht alle Fälle. Denn, wenn z. B. m ein durch

Anwend. der Ableitungs-Gleichungen

$\frac{p}{q}$ bezeichneter Bruch ist, wo p und q ganze Zahlen sind, so hat die Grösse $(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^{\frac{p}{q}}$, q wesentlich von einander verschiedener Werthe, nemlich so viele verschiedene Werthe, als qte Wurzeln existiren. Hingegen hat $\cos mx + \sin mx\sqrt{-1}$ nur einen einzigen Werth, weil zu jedem Bogen nur ein einziger Sinus und Cosinus gehört. Der Ausdruck ist also, für ein beliebiges m, unvollständig; wie es mit einem Ausdrucke dieser Art, der auf der einen Seite beliebige Potenzen, auf der andern nur die erste Potenz enthält, nothwendig der Fall seyn muss. Zum allgemeinen Gebrauche muss man bei dem Werthe von x auf alle mögliche Bogen Rücksicht nehmen, die zugleich einerlei Sinus und Cosinus haben. Dieses kann nur auf eine Art geschehen. Es ist nemlich zwar allgemein

$$\cos x = \cos \pm(2n\pi \pm x) \text{ und}$$

$$\sin x = \sin(\pm 2n\pi + x) = \sin(\pm(2n+1)\pi - x),$$

wenn π den halben Umfang, für den Halbmesser 1, und n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Allein zugleich hat, wie man sieht, nur allein der Bogen $\pm 2n\pi + x$ mit x einerlei Sinus und einerlei Cosinus; der Bogen $\pm 2n\pi - x$ z. B. hat schon verschiedene Sinus und Cosinus, denn sein Cosinus ist zwar gleich $\cos x$, aber der Sinus ist gleich $-\sin x$. Man kann also nur allein $\pm 2n\pi + x$ statt x setzen.

Die

auf Winkel-Functionen.

Die obige Gleichung, allgemein für jedes beliebige m, so eingerichtet, dass sie für alle Werthe, die sie ausdrückt, passt und genau ist, heisst also

$$(\cos x + \sin x \sqrt{-1})^m$$

$$= \cos m(\pm 2n\pi + x) + \sin m(\pm 2n\pi + x)\sqrt{-1}.$$

Weiter unten wird sich zeigen, dass diese Vervollständigung, wenn die Resultate, die die Formel giebt, allgemein richtig seyn sollen, durchaus nothwendig ist.]

109.

Es scheint, Moivre sey der Erfinder dieses schönen Ausdrucks. Man sieht aus den Miscellaneis analyticis, dass er darauf bei der Untersuchung der hyperbolischen Abschnitte, verglichen mit den Abschnitten des Kreises, kam. Jetzt ist der Satz zu einem elementaren Satze geworden, der durch die Ausdrücke für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$, so wie sie die Geometrie giebt, bewiesen wird, indem man nemlich das Product der Grössen $\cos x + \sin x\sqrt{-1}$ und $\cos y + \sin y\sqrt{-1}$ macht, welches die ähnliche Grösse $\cos(x+y) + \sin(x+y)\sqrt{-1}$ giebt. Euler gebührt das Verdienst, einen so nützlichen Ausdruck in die Elemente versetzt zu haben. [*Ein solches Verdienst, eine nützliche Wahrheit aus dem sogenannten Höhern herab, oder vielmehr an das Licht herauf zu ziehen, und in die Elemente, oder in den Bereich der allgemeinen Fassungs-Kraft zu versezzen, damit die Wahrheit ihrem rechtmässigen Ei-*

genthümer, dem gesammten Menschengeschlechte überliefert werde, ist wichtig! Darum ist Eulers Verdienst bei dieser und so mancher andren gelungenen Bemühung solcher Art, und Lagrange's Verdienst um die gesammte sogenannte höhere Analysis, die er, gleichsam aus den Träumen eines, dem gesunden Begriffe der Grössen fremden Unendlichen erweckend, in die Elemente versetzte, gross.]

Freilich lässt sich der Ausdruck auf diesem Wege nur für rationale Werthe von m beweisen; aber es ist hier wie mit dem binomischen Lehrsatze und überhaupt mit allen Ausdrücken, die eine unbestimmte Grösse enthalten, welche einen beliebigen irrationalen Werth annehmen kann. Die Allgemeinheit der Ausdrücke für beliebige Werthe der unbestimmten Grösse, lässt sich nur vermittelst der Ableitungen beweisen. [*Darum war es so wichtig, die Theorie der Ableitungen, oder die sogenannte höhere Analysis elementar zu machen, weil dadurch die Zugänglichkeit so vieler Sätze befördert wird.*]

110.

Nimmt man in dem obigen Ausdrucke die Wurzelgrösse $\sqrt{-1}$ positiv und negativ [*oder setzt* $-x$ *statt* $+x$], so erhält man

$$\cos mx + \sin mx \sqrt{-1} = (\cos x + \sin x \sqrt{-1})^m \text{ und}$$

$$\cos mx - \sin mx \sqrt{-1} = (\cos x - \sin x \sqrt{-1}),$$

woraus folgt,

auf Winkel-Functionen.

$$\cos mx = \frac{(\cos x + \sin x \sqrt{-1})^m + (\cos x - \sin x \sqrt{-1})^m}{2}$$

$$\sin mx = \frac{(\cos x + \sin x \sqrt{-1})^m - (\cos x - \sin x \sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}},$$

Entwickelt man die mten Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze, so verschwinden die unmöglichen Grössen. [*Es ist nemlich*

$2 \cos mx =$

$$\cos x^m + m \cos x^{m-1} \sin x \sqrt{-1} - \frac{m.m-1}{2} \cos x^{m-2} \sin x^2 \ldots.$$

$$+ \cos x^m - m \cos x^{m-1} \sin x \sqrt{-1} - \frac{m.m-1}{2} \cos x^{m-2} \sin x^2 \ldots.$$

und

$2 \sin mx \sqrt{-1} =$

$$\cos x^m + m \cos x^{m-1} \sin x \sqrt{-1} - \frac{m.m-1}{2} \cos x^{m-2} \sin x^2 \ldots.$$

$$-(\cos x^m - m \cos x^{m-1} \sin x \sqrt{-1} - \frac{m.m-1}{2} \cos x^{m-2} \sin x^2 \ldots.)]$$

Man erhält also

$$\cos mx = \cos x^m - \frac{m.m-1}{2} \cos x^{m-2} \quad x^2$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} \cos x^{m-4} \sin x^4 \ldots. \text{ und}$$

$$\sin mx = m \cos x^{m-1} \sin x - \frac{m.m-1.m-2}{2.3} \cos x^{m-3} \sin x^3 \ldots$$

111.

Diese beiden Ausdrücke hatte Johann Bernouilli im Jahre 1701 in der Leipziger Actis gegeben, aber ohne Beweis. Man sieht aus dem 129sten

Briefe des Commercium epistolicum und aus L'Hopital Abhandlung über die Kegelschnitte, dass er sie fand, als er nach den bekannten [*trigonometrischen*] Sätzen die Ausdrücke der Sinus und Cosinus der zweifachen, dreifachen u. s. w. Winkel suchte, und die Aehnlichkeit der Glieder dieser Ausdrücke mit denen der Binomial-Formel bemerkte. Man erhält in der That, wenn man in die obigen Ausdrücke für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$, der Reihe nach, $y=x$, $2x$, $3x$ *etc.* setzt, und, ebenfalls der Reihe nach, die vorhergehenden Ausdrücke in die folgenden substituirt,

$$\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x$$

$$\cos 3x = \cos x^3 - 3 \cos x \sin x^2$$

$$\sin 3x = 3 \cos x^2 \sin x - \sin x^3 \text{ etc.}$$

Die Aehnlichkeit dieser Ausdrücke mit denen der gleichen Binomial-Potenzen fällt in die Augen.

In diesem Betracht ist es sonderbar, dass Johann Bernoulli nicht die endlichen Ausdrücke für $\sin mx$ und $\cos mx$ fand, [*nemlich die Ausdrücke im Anfange von* 110.] und dass noch zwanzig Jahre vergehen mussten, ehe er auf die von Moivre gegebenen Ausdrücke kam. So ist Johann Bernoulli zweimal sehr nahe an der nemlichen Entdeckung gewesen, hat aber die Ehre derselben seinem Nachfolger überlassen.

112.

In dem obigen Ausdrucke kommen $\sin x$ und $\cos x$ mit einander vermischt vor. Da aber immer

auf Winkel-Functionen.

$$\sin x^2 + \cos x^2 = 1$$

ist, so lassen sich die Potenzen mit graden Exponenten von $\sin x$ und $\cos x$ wegschaffen.

Es würde schwierig seyn, durch die blosse Substitution dazu zu gelangen. Aber die bekannten Ausdrücke

$$2 \cos x \cos mx = \cos (m+1) x - \cos (m-1) x \text{ und}$$

$$2 \cos x \sin mx = \sin (m+1) x - \sin (m-1) x$$

zeigen, dass die Cosinus und Sinus der vielfachen Bogen x zwei rücklaufende Reihen bilden, deren Scale $2 \cos x, -1$ ist.

[*Nemlich aus*

$$\cos (m+1) x = 2 \cos x \cos mx - \cos (m-1) x \text{ und}$$

$$\sin (m+1) x = 2 \cos x \sin mx - \sin (m-1) x$$

folgt, dass man, sowohl um $\cos (m+1) x$ *aus* $\cos mx$ *und* $\cos (m-1) x$, *als* $\sin (m+1) x$ *aus* $\sin mx$ *und* $\sin (m-1) x$ *zu finden, die ersten der beiden gegebenen Grössen* $\cos mx$ *und* $\sin mx$ *mit* $2 \cos x$, *die andern* $\cos (m-1) x$ *und* $\sin (m-1) x$ *mit* -1 *multipliciren und die Producte addiren muss.*]

Geht man also von den einfachsten Werthen von $\cos mx$ und $\sin mx$, nemlich von denjenigen für $m = 0$ und $m = 1$ aus, und setzt der Kürze wegen

$$\cos x = c, \ \sin x = s,$$

[*Lagrange setzt* $\cos x = p$ *und* $\sin x = q$. *Ich habe die Buchstaben c und s gewählt, welche gleichsam nur Abkürzungen der Worte* cos *und* sin, *und also ohne weitere Deutung verständlich sind,*] so erhält man

Anwend. der Ableitungs-Gleichungen

$$\cos 0x = 1$$
$$\cos 1x = c$$
$$\cos 2x = 2c \cdot \cos x - \cos 0x = 2c^2 - 1$$
$$\cos 3x = 2c \cdot \cos 2x - \cos x = 4c^3 - 3c$$

u. s. w.,

welches folgende Tafel giebt:

$$\left.\begin{array}{l} \cos 1x = c \\ \cos 2x = 2c^2 - 1 \\ \cos 3x = 4c^3 - 3c \\ \cos 4x = 8c^4 - 8c^2 + 1 \\ \cos 5x = 16c^5 - 20c^3 + 5c \end{array}\right\} (A.)$$

etc.

und allgemein:

$$2 \cos mx = (2c)^m - m(2c)^{m-2} + \frac{m \cdot m-3}{2}(2c)^{m-4}$$
$$- \frac{m \cdot m-4 \cdot m-5}{2 \cdot 3}(2c)^{m-6} \ldots\ldots$$

Auf eine ähnliche Weise findet man

$$\left.\begin{array}{l} \sin 1x = s \\ \sin 2x = 2cs \\ \sin 3x = (4c^2 - 1)s \\ \sin 4x = (8c^3 - 4c)s \\ \sin 5x = (16c^4 - 12c^2 + 1)s \end{array}\right\} (B.)$$

etc.

und allgemein:

$$\sin mx = s \cdot \Big((2c)^{m-1} - m-2 \cdot (2c)^{m-3}$$
$$+ \frac{m-3 \cdot m-4}{2}(2c)^{m-5} \ldots\ldots\Big).$$

auf Winkel-Functionen.

113.

Diese Reihen schreiten nach abnehmenden Potenzen von c fort. Man findet auch leicht die Reihen nach steigenden Potenzen von c und s. Aber man muss alsdann die Fälle unterscheiden, wenn m ungrade und wenn m grade ist.

[*I. Ausdrücke durch den Cosinus.*]

Erstlich. m sey uugrade, so ist

$$\left.\begin{aligned} \cos 1x &= c \\ \cos 3x &= -(3c - 4c^3) \\ \cos 5x &= (5c - 20c^3 + 16c^5) \end{aligned}\right\} (C.)$$

etc.

und allgemein:

$$\cos mx = \pm\left(mc - \frac{m.(m^2-1)}{2.3}c^3 + \frac{m.(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}c^5 \ldots\right)$$

wo das obere Zeichen für den Fall gilt, wenn m von der Form $4n+1$, das untere Zeichen, wenn m von der Form $4n+3$ ist.

Eben so findet man, wenn m ungrade ist,

$$\left.\begin{aligned} \sin 1x &= s \\ \sin 3x &= -s(1 - 4c^2) \\ \sin 5x &= s(1 - 12c^2 + 16c^4) \end{aligned}\right\} (D.)$$

etc.

und allgemein:

$$\sin mx = \pm s\left(1 - \frac{m^2-1}{2}c^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}c^4 - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6}c^6 \ldots\right),$$

Anwend. der Ableitungs-Gleichungen

wo die Wahl des Zeichens nach der obigen Regel geschieht.

Zweitens. m sey gerade, so ist

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x &= -(1-2c^2) \\ \cos 4x &= 1-8c^2+8c^4 \\ \cos 6x &= -(1-18c^2+48c^4-32c^6) \end{aligned}\right\} (E.)$$
etc.

und allgemein:

$$\cos mx = \pm\left(1-\frac{m^2}{2}c^2+\frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}c^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}c^6 \ldots\right).$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} \sin 2x &= 2cs \\ \sin 4x &= s(4c-8c^3) \\ \sin 6x &= s(6c-32c^3+32c^5) \end{aligned}\right\} (F.)$$
etc.

und allgemein:

$$\sin mx = \pm s\left(mc-\frac{m(m^2-4)}{2.3}c^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}c^5 \ldots\right).$$

Das obere Zeichen gilt, wenn m von der Form $4n+2$, das untere, wenn m von der Form $4n$ ist.

[*II. Ausdrücke durch den Sinus.*]

Sodann hat man, weil $c^2 = 1-s^2$ ist

Erstlich für ein ungrades m:

auf Winkel-Functionen.

$$\left.\begin{aligned} \cos 1x &= c \\ \cos 3x &= c(1-4s^2) \\ \cos 5x &= c(1-12s^2+16s^4) \end{aligned}\right\} (G.)$$

etc.

und allgemein:

$$\cos mx = c\left(1-\frac{m^2-1}{2}s^2+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}s^4 - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6}s^6 \ldots\right)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \sin 1x &= s \\ \sin 3x &= 3s-4s^3 \\ \sin 5x &= 5s-20s^3+16s^5 \end{aligned}\right\} (H.)$$

etc.

und allgemein:

$$\sin mx = ms - \frac{m(m^2-1)}{2.3}s^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}s^5 \ldots$$

Zweitens, für ein grades m:

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x &= 1-2s^2 \\ \cos 4x &= 1-8s^2+8s^4 \\ \cos 6x &= 1-18s^2+48s^4-32s^6 \end{aligned}\right\} (J.)$$

etc.

und allgemein:

$$\cos mx = 1-\frac{m^2}{2}s^2+\frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}s^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}s^6 \ldots$$

und

$$\left.\begin{aligned} \sin 2x &= 2cs \\ \sin 4x &= c(4s-8s^3) \\ \sin 6x &= c(6s-32s^3+32s^5) \end{aligned}\right\} (K.)$$

etc.

und allgemein:

$$\sin mx = c\left(ms - \frac{m(m^2-4)}{2.3}s^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}s^5 \ldots\right).$$

Ich habe diese verschiedenen Ausdrücke hergesetzt, weil mir kein Werk bekannt ist, in welchem sie sich beisammen fänden, [*später erschienene Bücher haben sie aus dem gegenwärtigen genommen*] besonders aber, weil sie uns Gelegenheit zu manchen Bemerkungen geben werden, die den Leser interessiren dürften.

114.

Wir wollen zuerst bemerken, dass die Ausdrücke in den oben mit (*A*), (*B*), (*H*) und (*J*) bezeichneten Tafeln von Vieta gefunden sind und mit den Ausdrücken übereinstimmen, die man S. 295, 297 und 299 seiner, im Jahr 1646 zu Leyden gedruckten Werke findet. Man muss aber bemerken, dass Vieta' von den Sehnen und nicht von den Sinus und Cosinus redet. Da nun $2\cos x$ die Sehne des Supplements von $2x$; $2\cos 2x$, $2\cos 3x$ *etc.* die Sehnen der Supplemente der doppelten, dreifachen Winkel sind, so kommt die Tafel (*A*) mit derjenigen S. 295 bei Vieta überein, wenn man noch mit 2 multiplicirt und, seiner Bezeichnung zu Folge, $2c = N$, $(2c)^2 = Q$, $(2c)^3 = C$ setzt.

Die Tafel Seite 297, bei Vieta, giebt das Verhältniss der Sehnen der doppelten, dreifachen, vierfachen etc. Bogen zu der Sehne des einfachen Bogens. Das erste dieser Verhältnisse ist dort mit *N*,

das Quadrat davon mit Q, der Cubus mit C u. s. w. bezeichnet. Setzt man also $2 \sin x$ gleich der Sehne des einfachen Bogens, so werden jene Verhältnisse durch $\frac{\sin 2x}{\sin x}$, $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ *etc.* bezeichnet und die Vietasche Tafel kommt mit der Tafel (B) überein, wenn man statt $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 2c$, N schreibt und jede Gleichung durch die erste dividirt.

Die Vietasche Tafel S. 299 enthält die beiden Tafeln (H), (J), wenn man alle Glieder dieser Tafeln mit 2 multiplicirt und $2s = N$, $(2s)^2 = Q$ setzt.

Es schien mir nöthig, zu zeigen, was Vieta für diesen Gegenstand gethan hat, besonders aber, welche von den bekannten Ausdrücken für die Vervielfältigung der Winkel ihm zugehören, was bis jetzt, so viel ich weiss, noch nicht genau geschahe.

Uebrigens hat Vieta nicht die allgemeinen Formeln der obigen Tafeln gegeben, sondern blos die Mittel gezeigt, wie man die Ausdrücke so weit fortsetzen könne, als man will, nemlich durch das Gesetz der Glieder und ihrer Coefficienten.

115.

In den oben citirten Leipziger Acten von 1701 hat auch Johann Bernoulli, ohne Beweis, einen allgemeinen Ausdruck für die Sehnen der vielfachen Bogen gegeben, welcher mit dem der Tafel (B) überstimmt, wenn man sich erinnert, dass $2s$ die Sehne des Supplements ist.

Anwend. der Ableitungs-Gleichungen

Sodann hat Jacob Bernoulli, in den Abhandlungen der [*Pariser*] Academie der Wissenschaften von 1702, zwei Ausdrücke für die Sehnen der vielfachen Bogen gegeben, welche mit den allgemeinen Ausdrücken der Tafeln (*H*) und (*J*) stimmen, wenn man bemerkt, dass $2s$ die Sehne des Bogens $2x$, $2c$ die Sehne seines Supplements, $2\sin mx$ die Sehne des mfachen Bogens, $2\cos mx$ die Sehne seines Supplements ist. Aber der erste dieser beiden Ausdrücke ist auch schon von Newton in seinem ersten Briefe an Oldemburg gegeben, der in den Werken von Wallis gedruckt ist.

Endlich bemerken wir, dass die allgemeinen Ausdrücke der Tafeln (*A*), (*B*), (*H*), (*K*) im vierzehnten Abschnitte von Eulers Introductio vorkommen.

116.

Alle obige Ausdrücke sind aber bis jetzt nur durch Induction gefunden, oder nur für den Fall, wenn man annimmt, dass m eine von den Zahlen der Reihe 1, 2, 3.... ist, so dass sich zweifeln lässt, ob sie auch für andre Werthe von m gelten.

Ferner sieht man bald, wenn man die Ausdrücke der Tafeln (*A*) und (*B*) betrachtet, dass sie eigentlich ins Unendliche fortlaufen, selbst wenn m eine ganze positive Zahl ist. Denn man setze z. B. $m = 1$ so giebt der erste Ausdruck

$$\cos x = c - \frac{1}{4c} - \frac{1}{16c^3} - \frac{2}{64c^5} \ldots,$$

und der zweite

$$\sin x = s + \frac{s}{4c^2} + \frac{3s}{16c^4} \ldots,$$

welche Ausdrücke augenscheinlich unrichtig sind. Eben das findet man, wenn man *m* beliebige andere ganze positive Werthe giebt, und alle Glieder in Rechnung bringt, welche nicht verschwinden.

Dem Sinne der Tafeln (*A*) und (*B*) zu Folge, von welchen Tafeln die allgemeinen Ausdrücke nur das allgemeine Glied bezeichnen, darf man zwar allerdings nur die Glieder in Rechnung bringen, welche Potenzen von *c* mit ganzen positiven Exponenten enthalten. Da indessen die folgenden Glieder nicht von selbst verschwinden, so sieht man a priori nicht, warum man sie weglassen soll, und noch weniger, was die Ausdrücke bedeuten, wenn man sie nicht weglässt. Wir behalten die Entwickelung dieser Schwierigkeit der folgenden Vorlesung vor.

Eilfte Vorlesung.

Fortsetzung der Analyse der Winkel-Functionen, worin die allgemeinen Ausdrücke zu den Tafeln der vorigen Vorlesung bewiesen werden.

Ausdrücke der Cosinus und Sinus vielfacher Bogen.

117.

Wir wollen die allgemeinen Ausdrücke der vorigen Vorlesung [*die Grundformeln* 110.] für $\cos mx$ und $\sin mx$ wieder vornehmen. Sie sind, wenn man wieder c statt $\cos x$ setzt, weil alsdann $\sin x = \sqrt{(1-c^2)}$ ist,

$$2 \cos mx = (c+\sqrt{(c^2-1)})^m + (c-\sqrt{(c^2-1)})^m$$

$$2\sqrt{-1} \sin mx = (c+\sqrt{(c^2-1)})^m - (c-\sqrt{(c^2-1)})^m.$$

Wir bemerken zuerst, dass diese Ausdrücke, weil sie aus dem allgemeinen Ausdrucke

$$\cos x \pm \sin x \sqrt{-1} = e^{\pm x\sqrt{-1}}$$

vielfacher Bogen.

entstehen, wenn man ihn zur Potenz m erhebt, für jedes beliebige m gelten [*jedoch nur in so fern m eine ganze positive, oder negative Zahl ist, so dass die Potenz mit dem Exponenten m, nicht mehrere Werthe hat. Sobald m ein Bruch ist, kommt die Anmerkung in* (108.) *in Betracht*]. Alle Zweifel, die auf diesem Wege entstehen könnten, verschwinden also gänzlich.

118.

Es kommt folglich nur darauf an, den Ausdruck

$$(c + \sqrt{(c^2 - 1)})^m$$

nach c zu entwickeln.

I. Da die Grössen $c + \sqrt{(c^2-1)}$ und $c - \sqrt{(c^2-1)}$ die beiden Wurzeln der Gleichung

$$z^2 - 2cz + 1 = 0$$

sind, [*indem der Coefficient* $2c$ *zu der unbekannten Grösse* z, *in dieser Gleichung die Summe jener beiden Grössen, der Coefficient* 1 *zu* z^0 *ihr Product ist, worin bekanntlich die Eigenschaften der quadratischen Gleichungen besteht,*] so will ich hier den Satz anwenden, welchen ich in dem XIten Zusatze zu der „Auflösung numerischer Gleichungen“ von der Summe der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung bewiesen habe.

II. Dieser Satz besteht darin, dass, wenn man die Gleichung

$$u - x + fx = 0$$

hat, in welcher x die unbekannte Grösse ist,

$$u^{-m} + \frac{d(u^{-m})}{du} fu + \frac{d\left(\frac{1}{2}\frac{d(u^{-m})}{du}(fu)^2\right)}{du}$$

$$+ \frac{d^2\left(\frac{1}{2.3}\frac{d(u^{-m})}{du}(fu)^3\right)}{du^2} \ldots .$$

die Summe der $-m$ten Potenzen aller Wurzeln der Gleichung ausdrückt, in so fern man den Ausdruck nur so weit nimmt, als negative Potenzen von u vorkommen; hingegen nur die $-m$te Potenz der kleinsten Wurzel allein, wenn man den Ausdruck bis ins Unendliche fortsetzt. Die Grössen fu^2, fu^3 *etc.* bedeuten das Quadrat, den Cubus etc. von fu.

III. In unserm Falle ist die gegebene Gleichung, wenn man z in x verändert und durch den Coefficienten $2c$ von x dividirt,

$$\frac{1}{2c} - x + \frac{x^2}{2c} = 0,$$

Dieses mit

$$u - x + fx = 0$$

verglichen, giebt

$$u = \frac{1}{2c} \text{ und } fx = \frac{x^2}{2c},$$

also

$$fu = \frac{u^2}{2c}$$

[*weil man in der Gleichung u mit x verwechseln kann*]. Der obige allgemeine Ausdruck geht also in

u^{-m}

vielfacher Bogen.

$$u^{-m}+\frac{d(u^{-m})}{du}\cdot\frac{u^2}{2c}+\frac{d\left(\frac{d(u^{-m})}{du}\cdot\frac{u^4}{2.4.c^2}\right)}{du}$$
$$+\frac{d^2\left(\frac{d(u^{-m})}{du}\cdot\frac{u^6}{2.28.c^3}\right)}{du^2}\ldots$$

über, wo man, nachdem die angezeigten Ableitungen genommen worden, $u=\frac{1}{2c}$ setzen muss.

IV. Nun ist

$$\frac{d(u^{-m})}{du}=-mu^{-m-1}$$

$$\frac{d\left(\frac{d(u^{-m})\,u^4}{du}\right)}{du}=\frac{d(-mu^{-m+3})}{du}=m(m-3)u^{-m+2}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{d(u^{-m})}{du}u^6\right)}{du^2}=\frac{d^2(-mu^{-m+5})}{du^2}=$$
$$-m(m-5)(m-4)u^{-m+3}$$

etc.

also erhält man die Reihe:

$$u^{-m}-\frac{m}{2c}u^{-m+1}+\frac{m.m-3}{2.4.c^2}.u^{-m+2}$$
$$-\frac{m.m-4.m-5}{2.3.8c^3}u^{-m+3}\ldots$$

und, wenn man $u=\frac{1}{2c}$ setzt,

$$(2c)^m-m(2c)^{m-2}+\frac{m.m-3}{2}(2c)^{m-4}$$
$$-\frac{m.m-4.m-5}{2.3}(2c)^{m-6}\ldots$$

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

V. Setzt man diese Reihe nur so lange fort, als Potenzen von $\frac{1}{2c}$ mit negativen Exponenten, das heisst, Potenzen von $2c$ mit positiven Exponenten vorkommen, so drückt sie [*dem Lehrsatze zu Folge*] den Werth von

$$(c+\sqrt{(c^2-1)})^{-m}+(c-\sqrt{(c^2-1)})^{-m}$$

aus, welche Grösse, weil

$$(c+\sqrt{(c^2-1)})(c-\sqrt{(c^2-1)})=1$$

[*und folglich* $c+\sqrt{(c^2-1)}=\frac{1}{c-\sqrt{(c^2-1)}}$, *also* $(c+\sqrt{(c^2-1)})^{-m}=(c-\sqrt{(c^2-1)})^m$, *desgleichen* $c-\sqrt{(c^2-1)}=\frac{1}{c+\sqrt{(c^2-1)}}$, *folglich* $(c-\sqrt{(c^2-1)})^{-m}$ $=(c+\sqrt{(c^2-1)})^m$] ist, mit

$$(c-\sqrt{(c^2-1)})^m+(c+\sqrt{(c^2-1)})^m$$

übereinkommt. [*Nemlich die Summe der* $-m$*ten Potenzen der beiden Wurzeln*].

Die Reihe drückt also, auf diese Weise genommen, den Werth von $2\cos mx$ aus [*welcher* $(c-\sqrt{(c^2-1)})^m$ $+(c+\sqrt{(c^2-1)})^m$ *war* (117.)]. Das Resultat stimmt mit dem allgemeinen Ausdrucke der obigen Tafel (*A*.)

VI. Setzt man aber die Reihe bis ins Unendliche fort, so giebt sie den Werth von

$$(c-\sqrt{(c^2-1)})^{-m},$$

allein, weil $c-\sqrt{(c^2-1)}$ die kleinste der beiden Wur-

zeln ist, oder, was das Nemliche ist, den Werth von

$$(c + \sqrt{(c^2 - 1)})^m$$

allein.

119.

Um uns zu überzeugen, dass die gefundene Reihe in ihrer ganzen Ausdehnung wirklich nur die Entwickelung dieser Grösse allein ist, wollen wir diese Entwickelung auf einem directen Wege suchen, welches zugleich ein Beispiel von der Anwendung der Ableitungen auf dergleichen Untersuchungen seyn wird.

I. Man setze also, es komme darauf an, den Ausdruck

$$(c + \sqrt{(c^2 - 1)})^m$$

in eine fallende Reihe von der Form

$$Ac^m + Bc^{m-1} + Cc^{m-2} + Dc^{m-3} \ldots.$$

zu entwickeln.

II. Man dividire auf beiden Seiten mit c^m und setze

$$\frac{1}{c} = z,$$

so erhält man

$$(1 + \sqrt{(1 - z^2)})^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 \ldots.,$$

woraus sogleich folgt, dass die Reihe rechterhand nur Potenzen von z mit graden Exponenten enthalten kann [*weil die Entwickelung der Grösse linkerhand offenbar nur dergleichen Potenezn enthält*].

III. Setzt man also

$$z^2 = u,$$

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

so erhält man die Grösse

$$(1+\sqrt{(1-u)})^m,$$

welche nach den Potenzen von u zu entwickeln ist.

IV. Der allgemeine Ausdruck am Ende der neunten Vorlesung [*in* 96.] giebt also, wenn man

$$(1+\sqrt{(1-u)})^m = fu$$

setzt,

$$1+\sqrt{(1-u)})^m = fou + u\frac{dfou}{du} + \frac{u^2}{2}\frac{d^2fou}{du^2} \ldots,$$

wo fou, $\frac{dfou}{du}$, $\frac{d^2fou}{du^2}$ die Werthe von fu, $\frac{dfu}{du}$, $\frac{d^2fu}{du^2}$ für $u = 0$ sind und die Coefficienten A, C, E.... geben.

V. Zunächst ist

$$fou = 2^m.$$

Ferner ist $\frac{dfu}{du} = -\frac{1}{2}m\frac{(1+\sqrt{(1-u)})^{m-1}}{\sqrt{(1-u)}}$, woraus folgt:

$$\frac{dfou}{du} = -m \cdot 2^{m-2}$$

u. s. w.

Man kann auf diese Weise, der Reihe nach, alle Coefficienten finden. Man erhält aber nicht das Gesetz der Fortschreitung, welches ein wesentliches Erforderniss ist.

120.

Um auch dieses Fortschreitungs-Gesetz allgemein zu finden, nehme man wieder den Ausdruck mit c und setze ihn gleich y, so dass

vielfacher Bogen.

$$y = (c + \sqrt{(c^2 - 1)})^m$$

ist.

I. Nun besteht einer der vorzüglichsten Dienste der Ableitungen darin, dass sich, mit Hülfe derselben, Potenzen und Wurzeln aus den Gleichungen wegschaffen lassen. Nimmt man nemlich die Ableitungen nach c, indem man y als Function von c betrachtet, so erhält man

$$\frac{dy}{dc} = m(c + \sqrt{(c^2 - 1)})^{m-1}\left(1 + \frac{c}{\sqrt{(c^2-1)}}\right), \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dc} = m\,\frac{(c + \sqrt{(c^2 - 1)})^m}{\sqrt{(c^2 - 1)}}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch ihre Stammgleichung $[y = (c + \sqrt{(c^2 - 1)})^m]$, so erhält man

$$\frac{dy}{dc} : y = \frac{m}{\sqrt{(c^2 - 1)}},$$

und wenn man kreuzweise multiplicirt und quadrirt,

$$\left(\frac{dy}{dc}\right)^2 (c^2 - 1) = m^2 y^2.$$

II. Man nehme von Neuem die Ableitung nach c, so erhält man

$$2\left(\frac{dy}{dc}\right) \cdot \frac{d^2y}{dc^2}(c^2 - 1) + 2c\left(\frac{dy}{dc}\right)^2 = 2m^2 y \cdot \frac{dy}{dc}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $2\frac{dy}{dc}$, so erhält man folgende Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung zwischen y und c:

$$m^2 y - c\frac{dy}{dc} - (c^2 - 1)\frac{d^2y}{dc^2} = 0,$$

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

welche, wie man sieht, lineär nach y ist und keine Wurzelgrösse enthält, also sehr bequem ist, um y in eine Reihe [*nach* c] zu verwandeln.

III. Man darf in der That in diese Gleichung nur für y die [*oben* (119.) *für* $(c+\sqrt{(c^2-1)})^m$ *supponirte*] Reihe

$$Ac^m + Bc^{m-1} + Cc^{m-2} + Dc^{m-3} \ldots,$$

desgleichen statt $\frac{dy}{dc}$ [*die erste Ableitung derselben*]

$$mAc^{m-1} + \overline{m-1}\,Bc^{m-2} + \overline{m-2}\,Cc^{m-3} \ldots$$

und statt $\frac{d^2y}{dc^2}$ [*ihre zweite Ableitung*]

$$m.\overline{m-1}\,Ac^{m-2} + \overline{m-1}.\overline{m-2}\,Bc^{m-3} \ldots$$

setzen, so erhält man, wenn man die Glieder nach Potenzen von c ordnet,

$$\begin{aligned}
&(m^2A - \quad mA - . \quad m(m-1)A)c^m \\
&+ (m^2B - (m-1)B - (m-1)(m-2)B)c^{m-1} \\
&+ (m^2C - (m-2)C - (m-2)(m-3)C \\
&\qquad\qquad + m(m-1)A)c^{m-2} \\
&+ (m^2D - (m-3)D - (m-3)(m-4)D \\
&\qquad\qquad + (m-1)(m-2)B)c^{m-3} \\
&\ldots\ldots\ldots = 0
\end{aligned}$$

IV. Da diese Gleichung unabhängig von c Statt finden soll, so muss man die Coefficieuten jedes Gliedes [*nemlich die Coefficienten zu den verschiedenen Potenzen von* c] einzeln gleich Null setzen.

Der Coefficient von c^m ist in sich selbst Null [*denn*

vielfacher Bogen.

es ist $m^2A - mA - m(m-1)A = m^2A - mA - m^2A + mA = 0$], woraus folgt, dass der Coefficient A unbestimmt bleibt.

Der Coefficient von c^{m-1} reducirt sich auf $m^2B - (m-1)^2B$, was nur Null seyn kann, wenn B Null ist. Ist aber B Null, so können, wie leicht zu sehen, die Coefficienten zu c^{m-3}, c^{m-5} *etc.* Null seyn, wenn $D = 0$, $F = 0$ *etc.* ist.

Der Coefficient zu c^{m-2} reducirt sich auf

$$m^2 C - (m-2)^2 C + m(m-1) A,$$

derjenige von c^{m-4} auf

$$m^2 E - (m-4)^2 E + (m-2)(m-3) C$$

u. s. w.

Man erhält also, nach der nöthigen Reduction, die Gleichungen

$$\begin{aligned} 4(m-1)\,C &+ m(m-1)\,A \\ 8(m-2)\,E &+ (m-2)(m-3)\,C = 0 \\ 12(m-3)\,G &+ (m-4)(m-5)\,E = 0 \text{ etc.}, \end{aligned}$$

welche das Gesetz zeigen, nach welchem die Coefficienten A, C, E, G, einer von dem andern, abhängen.

Sie geben

$$C = -\frac{mA}{4}$$

$$E = -\frac{(m-3)\,C}{8} = \frac{m.(m-3)\,A}{4\cdot 8}$$

$$G = -\frac{(m-4)(m-5)E}{12(m-3)} = -\frac{m(m-4)(m-5)A}{4\cdot 8\cdot 12}$$

etc.

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

V. Nun haben wir [*oben in* (119.)] gesehen, dass der erste Coefficient A gleich 2^m ist. [*Er war nemlich dort* $= f o u$ *und* $f o u$ *war gleich* 2^m.] Also erhält man folgende Entwickelung der Grösse $y = (c + \sqrt{(c^2 - 1)})^m$

$$[y =] \ (c + \sqrt{(c^2 - 1)})^m = (2c)^m - m(2c)^{m-2} + \frac{m.m-3}{2}(2c)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2 \cdot 3}(2c)^{m-6} \ldots$$

welches mit dem, oben [*in* 118. *IV.*] gefundenen Ausdrucke übereinstimmt.

121.

Man suche eben so die Entwickelung des Ausdrucks

$$(c - \sqrt{(c^2 - 1)})^m.$$

Da dieser Ausdruck von dem vorigen in nichts weiter, als in dem Zeichen der Wurzelgrösse verschieden ist und diese Wurzelgrösse in der Ableitungs-Gleichung, deren wir uns bedienten, nicht vorkommt; so folgt, dass die nemliche Reihe, die wir eben fanden, auch die Entwickelung der Grösse $(c - \sqrt{(c^2 - 1)})^m$ geben muss. Es ist blos zu bemerken, dass, da die ersten Glieder der Wurzelgrösse $\sqrt{(c^2 - 1)}$ jetzt $c - \frac{1}{2p} \ldots$ sind, das erste Glied der gesuchten Entwickelung jetzt $\left(\frac{1}{2c}\right) m$ ist, so dass man jetzt m negativ nehmen muss. Und da nun die Ableitungs-Gleichung nur m^2 enthält [120. *II.*], so erhält man

vielfacher Bogen.

nothwendig die nemliche Reihe und darf darin blos $-m$ statt m setzen, wie solches auch ausserdem daraus folgt, dass [*zu Folge* 118. *V.*]

$$(c-\sqrt{(c^2-1)})^m = (c+\sqrt{(c^2-1)})^{-m}$$

ist. Man erhält also

$$(c-\sqrt{(c^2-1)})^m = (2c)^{-m} + m(2c)^{-m-2} + \frac{m.m+3}{2}(2c)^{-m-3}$$
$$+ \frac{m.m+4.m+5}{2.3}(2c)^{-m-6} \ldots\ldots$$

122.

Addirt man nun diese beiden Reihen, so erhält man [*weil* $(c+\sqrt{(c^2-1)})^m + (c-\sqrt{(c^2-1)})^{-m}$ $= 2\cos mx$ *ist* (117.)]

$$2\cos mx = (2c)^m - m(2c)^{m-2} + \frac{m.m-3}{2}(2c)^{m-4}$$
$$- \frac{m.m-4.m-5}{2.3}(2c)^{m-6} \ldots\ldots$$
$$+ (2c)^{-m} + m(2c)^{-m-2} + \frac{m.m+3}{2}(2c)^{-m-4}$$
$$+ \frac{m.m+4.m+5}{2.3}(2c)^{-m-6} \ldots\ldots$$

welches die vollständige Entwickelung von $2\cos mx$ in Potenzen von $\cos x$, für jeden beliebigen Werth von m ist.

123.

Setzt man in diesen Ausdruck $m = 1$, so erhält man

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

$$2\cos x = c - \frac{1}{4c} - \frac{1}{16c^3} - \frac{2}{64c^5} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{4c} + \frac{1}{16c^3} + \frac{2}{64c^5} \ldots\ldots,$$

wo sich die beiden Reihen, wie man sieht, bis auf das erste Glied $c = \cos x$ aufheben.

Setzt man für m beliebige ganze und positive Werthe, so wird man immer finden, dass die zweite Reihe, welche negative Potenzen von c enthält, in der ersten alle Glieder mit den gleichen negativen Potenzen aufhebt, wie sich solches aus dem Fortschreitungs-Gesetz der beiden Reihen allgemein beweisen lässt, so dass sich das Resultat immer blos auf diejenigen Glieder der ersten Reihe reducirt, welche Potenzen mit ganzen positiven Potenzen von c enthalten, was folglich das Nemliche ist, als wenn man von dieser Reihe nur die Glieder beibehielte, in welchen c in Potenzen von ganzen positiven Exponenten, oder vom Exponenten Null vorkommt; wie wir solches oben a priori fanden.

Setzt man aber m einem beliebigen Bruche gleich, so heben sich die beiden Reihen nicht auf, sondern sie sind beide vereinigt nöthig, wenn man den vollständigen Werth von $2\cos mx$ verlangt.

124.

Nimmt man den Unterschied der beiden Reihen statt ihrer Summe, so erhält man den Werth von $\sin mx \sqrt{-1}$. Aber $\sin mx$ wird dann durch unendliche Reihen mit unmöglichen Grössen ausgedrückt. Um einen endlichen Ausdruck zu finden, darf man

sich nur erinnern, dass die erste Ableitung von $\cos mx$, $-m \sin mx$ und diejenige von $\cos x = c$, $-\sin x = -s$ ist. Man erhält daher, wenn man die erste Ableitung der für $\cos mx$ gefundenen Reihe nimmt, die Zeichen verwechselt und mit $2m$ dividirt,

$$\sin mx =$$

$$s\left((2c)^{m-1} - (m-2)(2c)^{m-3} + \frac{m-3.m-4}{2}(2c)^{m-5} \ldots\right)$$

$$-s\left((2c)^{-m-1} + (m+2)(2c)^{-m-3} + \frac{m+3.m+4}{2}(2c)^{-m-5} \ldots\right)$$

Dieser Ausdruck reducirt sich ebenfalls auf eine endliche Zahl von Gliedern, wenn m eine ganze Zahl ist, weil sich die Glieder mit Potenzen von c mit negativen Exponenten unter einander aufheben, so dass man, wenn m eine ganze positive Zahl ist, nur von der ersten Reihe die Glieder nehmen darf, welche Potenzen von c mit positiven Exponenten enthalten; welcher Theil der Reihe mit derjenigen in dem allgemeinen Ausdrucke zur Tafel (*B*) übereinkommt.

Ist m ein Bruch, so gehen beide Reihen ins Unendliche fort, aber beide zusammen geben den wahren Werth von $\sin mx$ nach steigenden Potenzen von $\cos x$, wie bei $\cos mx$.

[*Wenn m keine ganze Zahl, sondern z. B. ein Bruch ist, so sind die gefundenen Reihen für $\cos mx$ und $\sin mx$ unbestimmte und in gewisser Rücksicht nicht vollständige Ausdrücke, wovon man sich leicht in besondern Fällen überzeugen kann.*

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

I. Man setze z. B. $x = \frac{1}{2}\pi$, *so ist* $\cos x$ *oder* $c = 0$. *Nun sey* $m = \frac{1}{2}$, *so giebt die Reihe* (122)

$$2\cos\tfrac{1}{4}\pi = 0^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{2.2.2}\,\frac{1}{0^{\frac{7}{2}}}\ldots.$$

$$+\frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{0^{\frac{5}{2}}} + \frac{7}{2.2.2}\,\frac{1}{0^{\frac{7}{2}}}\ldots.,$$

welches lauter *unendliche* *Grössen sind, die sich gegenseitig aufheben müssen, wenn das richtige endliche Resultat herauskommen soll. So ist es für jeden beliebigen Bruchwerth von* m, *wenn der Cosinus des Bogens* x, 0 *ist, weil alsdann allemal unendliche Glieder entstehen, besonders im zweiten Theile der Ausdrücke, die alsdann lauter unendliche Glieder enthalten. Die Ausdrücke sind also in allen diesen Fällen unbestimmt.*

II. Man setze ferner x *gleich irgend einem Bogen, dessen Cosinus negativ ist und* m *z. B.* $= \frac{1}{2}$, *so sind alle Glieder der Ausdrücke* (122 *und* 124), *ohne Ausnahme* *unmögliche* *Grössen.*

Gleichwohl sind $2\cos mx$ *und* $2\sin mx$ *reelle Grössen. Wären einzelne Glieder der Reihen imaginair und die übrigen reell, so könnte man annehmen, dass die imaginairen Glieder sich aufheben und nur die reellen übrig bleiben. Allein, da sie* *alle* *imaginair sind, so sind die Ausdrücke um so mehr unbestimmt.*

III. Endlich aber geben auch die Ausdrücke (122) *und* (124) *mehr Werthe, als* $\cos mx$ *und* $\sin mx$ *haben können. Denn es sey z. B.* $m = \frac{1}{2}$, *so ha-*

ben die Reihen rechterhand für jedes beliebige x oder c zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe. Hingegen $\cos mx$ und $\sin mx$ hat nur einen bestimmten und reellen Werth.

IV. Alles dieses beweiset zwar noch Nichts gegen die Richtigkeit der Ausdrücke; denn dass völlig richtige Ausdrücke mit ähnlichen paradoxen Eigenschaften existiren können, kann man leicht an einem einfachen Beispiele sehen. Es ist nemlich bekanntlich allgemein

$$\cos \tfrac{1}{2}x = \sqrt{\left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)}, \text{ oder}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}x \sqrt{2} = \sqrt{(\cos x + 1)}.$$

Entwickelt man die Wurzelgrösse rechts, so erhält man

$$\cos \tfrac{1}{2}x\sqrt{2} = \cos x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\cos x^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}\cos x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{16}\cos x^{-\frac{5}{2}} \ldots$$

Dieser Ausdruck hat rechterhand, für $\cos x = 0$, nach dem ersten Gliede, ebenfalls lauter unendliche Glieder und für jedes x, für welches $\cos x$ negtiv ist, auch lauter unmögliche Glieder, eben wie die obigen.

Geht man indessen in die Entwickelung der obigen Ausdrücke, namentlich desjenigen für $\cos mx$ zurück, so finden sich mehrere Bedenken, und folglich Zweifel gegen die Richtigkeit der Resultate.

V. In (120. V.) nemlich, wurde gefunden, dass

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

$$(c+\sqrt{(c^2-1)})^m = (2c)^m - m(2c)^{m-2} + \frac{m.m-3}{2}(2c)^{m-4}$$
$$-\frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2c)^{m-6}\ldots$$

seyn soll, das heisst, es soll, wenn man für c *seinen Werth* $\cos x$ *hinschreibt,*

$$(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = (2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2}$$
$$+\frac{m.m-3}{2}(2\cos x)^{m-4} - \frac{m.m-3.m-5}{2.3}(2\cos x)^{m-6}\ldots$$

für jedes beliebige m *und für jedes beliebige* x *seyn.*

Nun ist aber bekanntlich $\cos(-x) = \cos(+x)$ *und* $\sin(-x) = -\sin x$ *für jedes beliebige* x. *Schreibt man also* $-x$ *statt* $+x$, *so geht* $(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m$ *in* $(\cos x - \sin x\sqrt{-1})^m$ *über, hingegen die Reihe für* $(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m$ *bleibt völlig und genau dieselbe, weil nur der Cosinus von* x *vorkommt. Es wäre also, dem gefundenen Ausdrucke zu Folge,*

$$(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = (\cos x - \sin x\sqrt{-1})^m,$$

welches unmöglich ist; denn es ist $\cos x + \sin x\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}}$ *und* $\cos x - \sin x\sqrt{-1} = e^{-x\sqrt{-1}}$ *und* $e^{mx\sqrt{-1}}$ *kann nicht gleich* $e^{-mx\sqrt{-1}}$ *seyn.*

VI. Ferner wurde in (121.) *gefunden, dass* $(c-\sqrt{(c^2-1)})^m$, *oder*

vielfacher Bogen.

$(\cos x - \sin x \sqrt{-1})^m =$

$$(2\cos x)^{-m} + m(2\cos x)^{-m-2} + \frac{m.m+3}{2}(2\cos x)^{-m-4}$$
$$+ \frac{m.m-3.m-5}{2.3}(2\cos x)^{-m-6} \ldots\ldots$$

seyn soll. Dieser Ausdruck ist wesentlich von demjenigen verschieden, den man für $(\cos x - \sin x \sqrt{-1})^m$ *fand, als man in den Ausdruck für* $(\cos x + \sin x \sqrt{-1})^m$, $-x$ *statt* $+x$ *setzte. Da beide Ausdrücke nicht für alle Fälle einerlei Werthe haben können, wie man sich leicht durch Beispiele überzeugen kann; so folgt auch hieraus, dass die gefundenen Entwickelungen von* $(c + \sqrt{(c^2-1)})^m$ *und* $(c - \sqrt{(c^2-1)})^m$ *nicht wohl allgemein richtig seyn können.*

VII. Geht man in (120.) weiter zurück, so findet man auch bald gegen die Coefficienten-Bestimmung in (120. IV.) Zweifel.

Die Gleichung in (120. III.) nemlich, woraus die Coefficienten bestimmt wurden, hat die Form

$$\alpha c^m + \beta c^{m-1} + \gamma c^{m-2} + \delta c^{m-3} \ldots\ldots = 0$$

und hieraus wurde in (120. IV.) geschlossen, dass weil $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots$ *von c nicht abhängen,*

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 0 \ldots\ldots$$

seyn müsse. Dieses kann für jeden beliebigen Werth von m, namentlich sobald z. B. m irgend ein Bruch ist, nicht zugegeben werden. Ist nemlich m z. B. irgend ein positiver Bruch, so kommt

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

in der Reihe die Grösse c offenbar in Potenzen mit negativen Exponenten vor, und da die Reihe nicht abbricht, so werden diese Exponenten zuletzt sogar unendlich grosse negative Zahlen. Dividirt man also mit dem Coefficienten irgend eines Gliedes, um eine der Grössen α, β, γ, und zwar dadurch zu finden, dass man sie von c absondert, weil die Grössen α, β, γ wirklich nicht von c abhängen sollen, so bleiben in den übrigen Gliedern allemal Potenzen von c mit negativen Exponenten, und wenn man nicht grade mit dem Coefficienten des ersten Gliedes c^m dividirt, auch zugleich Potenzen von c mit positiven Exponenten. Die Summe solcher Glieder kann nicht für irgend einen Werth von c Null seyn, ohne dass dieser Werth von c nicht zugleich von den Grössen α, β, γ (mit Ausnahme derjenigen, die durch die Division von c bestimmt wurden) abhinge, was aber nicht der Fall seyn soll; daher kann auch nicht die durch die Division von c bestimmte Grösse aus der Mitte von α, β, γ Null seyn.

Dividirt man mit dem Coefficienten des ersten Gliedes, so kommt in allen übrigen Gliedern, ohne Ausnahme, c nur in Potenzen von negativen Exponenten vor. Die Summe dieser übrigen Glieder könnte also alsdann zwar, wenn man c den von α, β, γ unabhängigen Werth ∞ giebt, Null und folglich könnte auch der erste Coefficient α u. s. w. β, γ.... Null seyn; aber unendlich gross darf c nicht gesetzt werden, weil es einen

Cosinus

vielfacher Bogen.

Cosinus bedeutet. Also folgt auch in diesem Falle nicht, dass die Grössen α, β, γ.... nothwendig Null seyn müssen.

Wollte man endlich mit dem Coefficienten der letzten unter den Grössen α, β, γ...., welcher eine Potenz von c mit einem unendlich grossen negativen Exponenten ist, dividiren, oder sich diese Operation, die eigentlich nicht Statt findet, weil die letzte der Grössen α, β, γ.... im Unendlichen liegt nnd also eigentlich nicht existirt, wenigstens vorstellen; so würden alle übrige Glieder mit Potenzen von c von unendlich hohen Exponenten multiplicirt werden und dann ist es zweifelhaft, ob die Summe solcher Producte für c = o verschwinde; und c ist nur gleich Null zu setzen erlaubt, weil sonst jeder andere Werth von c nothwendig, gegen die Voraussetzung, von α, β, γ.... abhängen müsste.

Also ist auch auf dem dritten Wege nicht zu zeigen, dass α, β, γ.... nothwendig Null seyn müssen.

Aus der Gleichung

$$\alpha c^m + \beta c^{m-1} + \gamma c^{m-2} = 0$$

folgt also wirklich nicht, für jeden beliebigen Werth von m, dass die Grössen α, β, γ.... nothwendig verschwinden müssen.

Die Richtigkeit der Coefficienten-Bestimmung möchte daher ebenfalls Zweifeln unterworfen seyn.

VIII. Auch die Bestimmung des ersten Coefficienten A in (119. IV.) für den zweiten Theil

der Reihe ist nicht überzeugend. Dieser Coefficient nemlich wird daselbst dadurch gefunden, dass man $(1-\sqrt{(1-u)})^m = fu$, *nach der allgemeinen Entwickelungs-Formel* $f(u+k) = fu + k\frac{dfu}{du} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fu}{du^2} \ldots$, *in eine Reihe auflöset und in dieselbe dann* $u = 0$ *und* $k = 0$ *setzt. Diese allgemeine Entwickelung giebt aber in diesem Falle, für die Ableitungen* $\frac{dfu}{du}$, $\frac{d^2fu}{du^2} \ldots$, *wenn man darin* $u = 0$ *setzt, sobald* m *z. B. ein Bruch ist, unendliche Grössen; denn es ist z. B.* $\frac{dfu}{du} =$

$$m(1-\sqrt{(1-u)})^{m-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}} = \frac{m}{(1-\sqrt{(1-u)})^{1-m}\sqrt{(1-u)}}.$$

Wäre nun z. B. $m = \frac{1}{2}$, *so gäbe dieser Ausdruck für* $u = 0$, $\frac{dfu}{du} = \infty$ *u. s. w. Es ist hier ein Fall, wo die allgemeine Entwickelungs-Reihe, nach* Lagrange's *eigner Lehre, nicht brauchbar ist. Also kann der erste Coefficient* A *auf diesem Wege nicht allgemein gefunden werden.*

IX. Man kann sich davon, dass der erste Coefficient wirklich nicht allgemein, weder 2^m, *noch* 2^{-m} *ist, auch aus dem, unmittelbar aus der Grundformel hergeleiteten, Ausdrucke für* $\cos mx$ (110.) *überzeugen. Setzt man nemlich in denselben die Werthe von* $\sin x^2 = 1 - \cos x^2$, $\sin x^4 = 1 - 2\cos x^2 + \cos x^4 \ldots$, *so ist leicht zu sehen, dass*

vielfacher Bogen.

der Coefficient zu $\cos x^m$, welches alsdann in jedem Gliede vorkommt, zusammen

$$1 - \frac{m.m-1}{2} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} - \ldots$$

ist. Diese Grösse ist nicht gleich 2^m, oder 2^{-m},

sondern gleich $\frac{(1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m}{2}$, denn es ist

$(1+\sqrt{-1})^m =$

$$1 + m\sqrt{-1} - \frac{m.m-1}{2} - \frac{m.m-1.m-2}{2.3}\sqrt{-1} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} \ldots$$

$(1-\sqrt{-1})^m =$

$$1 - m\sqrt{-1} - \frac{m.m-1}{2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}\sqrt{-1} + \frac{.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} \ldots,$$

welches, zusammengerechnet, auf der einen Seite den obigen Coefficienten zu $\cos x^m$, doppelt genommen, auf der andern $(1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m$ giebt; also ist der Coefficient zu $\cos x^m$ gleich $(1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m$ und nicht 2^m oder 2^{-m}.

X. Aus allen diesen Gründen scheinen die in (122) und (124.) aufgestellten Ausdrücke nicht allgemein richtig zu seyn.

XI. Zuverlässiger sind unstreitig die Ausdrücke in (110.), weil sie unmittelbar auf unzweifelhaft- und allgemein richtigen Grundformeln beruhen. Jedoch muss man darin, zu Folge der in der Anmerkung zu (108.) enthaltenen Erinnerung,

$$\pm 2n\pi + x \text{ statt } x$$

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

setzen, welches

$$\cos m(\pm 2n\pi + x) = \cos x^{m} - \frac{m.m-1}{2} \cos x^{m-2} \sin x^2$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} \cos x^{m-4} \sin x^4 \ldots.$$

und

$$\sin m(\pm 2n\pi + x) =$$

$$m \cos x^{m-1} \sin x - \frac{m.m-1.m-2}{2.3} \cos x^{m-3} \sin x^3 \ldots.$$

giebt. Man kann auch diese Ausdrücke, wie leicht zu sehen, vermittelst des Ausdrucks $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ *in solche verwandeln, die blos* $\sin x$ *oder* $\cos x$ *enthalten.*

XII. Diese beiden Ausdrücke sind aber allerdings eben so unbestimmt, wie die in (122 *und* 124), *obgleich sonst an ihrer Richtigkeit nicht zu zweifeln ist, da sie unmittelbar, ohne weitere Rechnung, auf den Grundformeln beruhen.*

Will man sie brauchbar machen, so muss man sie auf denjenigen Umfang von x beschränken, innerhalb dessen sie convergiren.

Bringt man nemlich die Ausdrücke auf die Gestalt

$$\cos m(\pm 2n\pi + x) =$$

$$\cos x^{m}\left(1 - \frac{m.m-1}{2} \tang x^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} \tang x^4 \ldots.\right)$$

$$\sin m(\pm 2n\pi + x) =$$

$$m \cos x^{m} \tang x\left(1 - \frac{m.m-1.m-2}{2.3} \tang x^2 \ldots.\right),$$

vielfacher Bogen.

so ist leicht zu sehen, dass sie nur in dem Umfange von $x = 0$ *bis* $x = \pm \frac{1}{4}\pi$ *convergiren. Denn da für das möglich-kleinste m, also* $m = 0$ *(welches der nachtheiligste Fall ist, für welchen die Reihen passen sollen), die Binomial-Coefficienten in* $m, -\frac{m}{2}, \frac{m}{3}, -\frac{m}{4}, \frac{m}{5}$ *etc. übergehen, so divergiren die Reihen, sobald* $\tang x$ *grösser ist als* ± 1, *oder x ausser dem Umfange von 0 und* $\pm \frac{1}{2}\pi$ *liegt.*

Nur in dem Umfange von 0 bis $\pm \frac{1}{4}\pi$ *sind also diese Reihen (XI.) convergent, passen aber dann auch für alle mögliche m und x. Sie sind in diesem Umfange nicht allein, wie im Allgemeinen, vollkommen richtig, sondern auch jedesmal brauchbar und vollständig. Denn da* $\cos x$ *in dem Umfange von 0 bis* $\pm \frac{1}{4}\pi$ *nie Null und nie negativ ist, so enthalten sie nie, weder unendliche noch unmögliche Glieder, sondern sind Ausdrücke mit lauter reellen Gliedern, die allemal convergiren. Desgleichen passen sie für alle die verschiedenen Wurzelwerthe, welche rechterhand vorkommen können, weil die Ausdrücke* $\cos m(\pm 2n\pi + x)$ *und* $\sin m(\pm 2n\pi + x)$ *linkerhand eben so viele Werthe haben.*

XIII. Für $x = \frac{1}{4}\pi$ *geben die Ausdrücke, weil alsdann* $\cos x = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$, $\tang x = 1$ *ist,*

$$\cos m\left(\pm\frac{8n+1}{4}\pi\right) = (\tfrac{1}{2})^{\frac{m}{2}}\left(1 - \frac{m.m-1}{2} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} \ldots\right)$$

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

$$\sin m\left(\pm\frac{8n+1}{4}\pi\right)=$$

$$m\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1-\frac{m.m-1.m-2}{2}+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5}\ldots\right),$$

welches, wie aus den Grundformeln in (110.) *leicht zu sehen, die reellen Entwickelungen der unmöglichen Ausdrücke*

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{m-1}\left((1+\sqrt{-1})^m+(1-\sqrt{-1})^m\right) \text{ und}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{m-1}\frac{\left((1+\sqrt{-1})^m-(1-\sqrt{-1})^m\right)}{\sqrt{-1}}$$

sind.

XIV. Dadurch, dass man x auf den Umfang zwischen o *und* $\pm\frac{1}{4}\pi$ *beschränkt, verlieren übrigens die Ausdrücke an Allgemeinheit Nichts. Denn sobald x grösser als $\frac{1}{4}\pi$, oder kleiner als $-\frac{1}{4}\pi$ ist, darf man nur $\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)$ statt x setzen, wodurch sich, während p immer nur eine ganze positive Zahl bedeutet, alle mögliche Bogen bezeichnen lassen. Die allgemeinen Ausdrücke für die Sinus und Cosinus vielfacher Bogen wären also*

$$\cos m\left(\pm\left(2n\pi\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)\right)\right)=$$

$$\cos\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)^m$$

$$-\frac{m.m-1}{2}\cos\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)^{m-2}\sin\pm\left(\frac{px}{4}+x\right)^2$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}\cos\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)^{m-4}\sin\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)^4$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

vielfacher Bogen.

$$\sin m\left(\pm\left(2n\pi + \left(\frac{p\pi}{4}+x\right)\right)\right) =$$

$$m \cos\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)^{m-1} \sin\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)$$

$$-\frac{m.m-1.m-2}{2.3}\cos\pm\left(\frac{px}{4}+x\right)^{m-3}\sin\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)^{3}$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5}\cos\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)^{m-5}\sin\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)^{5}$$

.

Diese Ausdrücke gelten für jeden beliebigen Bogen, wenn man ihn nur durch $\pm\left(\frac{p\pi}{4}+x\right)$ *oder so ausdrückt, dass* x *immer zwischen* 0 *und* $\pm\frac{1}{4}\pi$ *liegt.*

XV. Es ist mit diesen Ausdrücken, wie mit einigen andern Ausdrücken, die sich auf den Kreis beziehen, z. B. mit dem bekannten Ausdrucke

$$\tfrac{1}{2}z = \sin z - \tfrac{1}{2}\sin 2z + \tfrac{1}{3}\sin 3z - \tfrac{1}{4}\sin 4z \ldots,$$

wo z einen Kreisbogen für den Halbmesser 1 *bedeutet, welcher Ausdruck auch, obgleich vollkommen richtig, auf den Umfang von z zwischen* 0 *und* $\pm\frac{1}{4}\pi$ *beschränkt werden muss.*

Meines Erachtens liegt in dieser Beschränkung der Schlüssel zur Auflösung der Schwierigkeiten, welche dergleichen Ausdrücke zu machen pflegen. Sie geben zwar nicht unrichtige, aber unbestimmte Ausdrücke und sobald die Analysis etwas Unbestimmtes giebt, zeigt sie an, dass man irgend eine Beschränkung oder Modification

übersehen habe. Verlangt man von ihr bestimmte Ausdrücke, wo sie unbestimmte giebt, so kann man das Verlangte nicht finden.]

125.

Euler hat zuerst diese Art von Unvollkommenheit der bekannten Ausdrücke in den Tafeln (A) und (B) bemerkt. Er hat, ungefähr auf eine ähnliche Weise wie hier, gezeigt, dass diese Ausdrücke, wenn sie allgemein und auf beliebige Werthe von m anwendbar seyn sollen, durch ähnliche Ausdrücke vervollständigt werden müssen, in welchen der Exponent m negativ ist.

Ich habe zum Nutzen angehender Analysten in dieses Detail eingehen zu müssen geglaubt, noch mehr aber um bemerklich zu machen, dass wenn die Analysis zuweilen zu fehlen scheint, die Schuld immer daran liegt, dass man den Gegenstand nicht umfassend genug und nicht so allgemein als möglich behandelte. (Man sehe den IX. Band der Nova acta der Petersburger Academie.)

126.

[Wir haben oben die Ausdrücke

$$(c \pm \sqrt{(c^2 - 1)})^m$$

nach steigenden Potenzen von c entwickelt. Man kann sie, auf die nemliche Weise und durch die nemliche Ableitungs-Gleichung mit y, nach fallenden Potenzen von c entwickeln, welches die Tafeln (C),

(*D*), (*E*), (*F*) giebt, und dazu dient, sie für jeden Werth von *m* zu vervollständigen.

I. Man setze also allgemein

$$y = A + Bc + Cc^2 + Dc^3 \ldots .$$

und substituire $\left[y, \frac{dy}{dc} \text{ und } \frac{d^2y}{dc^2}\right]$ in die Ableitungs-Gleichung, so erhält man, wenn man das Resultat nach Potenzen von *c* ordnet,

$$\left.\begin{array}{r} m^2 A + c\,C \\ (m^2 B - 1 . B + 2.3 D) c \\ + (m^2 C - 2 C + 3.4 E - 2 C) c^2 \\ + (m^2 D - 3 D + 4.5 F - 2.3 D) c^3 \\ + (m^3 E - 4 E + 5.6 G - 3.4 E) c^4 \end{array}\right\} = 0$$

.

II. Setzt man die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von *c* gleich Null, so erhält man, nach der nöthigen Reduction:

$$\begin{array}{r} m^2 A + 2C = 0 \\ (m^2 - 1) B + 2.3 D = 0 \\ (m^2 - 4) C + 3.4 E = 0 \\ (m^2 - 9) D + 4.5 F = 0 \\ (m^2 - 16) E + 5.6 G = 0 \\ etc., \end{array}$$

woraus, wenn man, der Reihe nach, die entwickelten Werthe substituirt,

$$C = -\frac{m^2}{2} . A$$

$$D = -\frac{m^2 - 1}{2.3} . B$$

$$E = \frac{m^2(m^2-4)}{2\cdot3\cdot4}\cdot A$$

$$F = \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot B$$

$$G = -\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot A$$

etc.

folgt.

III. Die beiden Coefficienten A und B, bleiben unbestimmt. Man muss sie aus den Eigenschaften der Function y zu finden suchen.

Es ist leicht zu sehen, dass

$$A = y \text{ und } B = \frac{dy}{dc} \text{ für } c = 0$$

[*weil nemlich* $y = A + Bc + Cc^2 \ldots$ *gesetzt wurde, welches*

$$\frac{dy}{dc} = B + 2Cc \ldots,$$

und für $c = 0$, $A = y$, $B = \frac{dy}{dc}$ *giebt*].

Da nun $y = (c + \sqrt{(c^2-1)})^m$ ist, so ist für $c = 0$, y oder

$$A = (\sqrt{-1})^m.$$

Setzt man $c = 0$ in den oben gefundenen Werth von $\frac{dy}{dc}\left[= m\frac{(c^2+\sqrt{(c^2-1)})}{\sqrt{(c^2-1)}}, \text{ (120. } I.)\right]$, so erhält man $\frac{dy}{dc}$, oder

$$B = m(\sqrt{-1})^{m-1}.$$

Substituirt man diese Werthe von A und B, so

vielfacher Bogen.

erhält man die Grösse

$$(c+\sqrt{(c^2-1)})^m$$

entwickelt.

IV. Um die Entwickelung von

$$(c-\sqrt{(c^2-1)})^m$$

zu finden, darf man nur die Wurzelgrösse $\sqrt{(c^2-1)}$ negativ annehmen. Da aber diese Wurzelgrösse in der Ableitungs-Gleichung mit y, aus welcher wir die Coefficienten der Reihe fanden, nicht vorkommt, so folgt, dass man für den Ausdruck $(c-\sqrt{(c^2-1)})^m$ die nemliche Reihe erhält, wie für den Ausdruck $(c+\sqrt{(c-1)})^m$, bis auf die beiden Coefficienten A und B, welche andere Werthe haben können. Durch ein ähnliches Verfahren findet man hier

$$A=(-\sqrt{-1})^m \text{ und } B=m(-\sqrt{-1})^{m-1}.$$

V. Da nun die Summe der beiden Ausdrücke den Werth von $2\cos mx$ giebt, wie wir oben sahen [118.], so erhält man $2\cos mx$, wenn man in die Reihe $A+Bc+Cc^2\ldots.$ die Summe der beiden für A und B gefundenen Ausdrücke statt A und B setzt, das heisst:

$$A=(\sqrt{-1})^m+(-\sqrt{-1})^m$$

$$B=m(\sqrt{-1})^{m-1}+m(-\sqrt{-1})^{m-1};$$

woraus leicht zu sehen, dass, wenn m eine ganze ungrade Zahl ist, $A=0$ und $B=\pm 2m$ und wenn m eine grade Zahl ist, $A=\pm 2$ und $B=0$ seyn muss.

VI. Um aber für jeden beliebigen Werth von m, Ausdrücke von A und B ohne unmögliche Grössen zu finden, darf man nur den allgemeinen Ausdruck

$$(\cos x + \sin x \sqrt{-1})^m = \cos mx + \sin mx \sqrt{-1}$$

zu Hülfe nehmen und darin x gleich dem Bogen eines rechten Winkels setzen; denn alsdann ist $\cos x = 0$ und $\sin x = 1$. Man erhält also, je nachdem man die Wurzelgrösse $\sqrt{-1}$ positiv oder negativ nimmt,

$$(\pm\sqrt{-1})^m = \cos\frac{m\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{m\pi}{2}.$$

[*Lagrange bezeichnet* $\frac{1}{2}\pi$ *durch* 1. *Da diese Bezeichnung Verwechselungen verursachen könnte, so habe ich das gewöhnliche* $\frac{1}{2}\pi$ *beibehalten.*]

Also sind die Werthe von A und B

$$A = 2\cos\frac{m\pi}{2} \text{ und } B = 2m\cos\frac{(m-1)\pi}{2}.$$

VII. Man erhält also für jede beliebige Zahl m:

$$\cos mx = \cos\frac{m\pi}{2}\left(1 - \frac{m^2}{2}c^2 + \frac{m^2(m-4)}{2.3.4}c^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}c^6 \ldots\right)$$

$$+ \cos\frac{-1\pi}{2}\left(mc - \frac{(m.m^2-1)}{2.3}c^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}c^5 \ldots\right)$$

VIII. Dieses ist die vollständige Entwickelung von $\cos mx$ in eine, nach c oder $\cos x$ steigende Reihe. Man sieht, dass wenn m eine ganze Zahl ist, immer ein Theil der Reihe abbricht, während der andere, welcher ins Unendliche fortläuft, verschwin-

det, weil er den Coefficienten $\cos\frac{m\pi}{2}$, oder $\cos\frac{(m-1)\pi}{2}$, welcher Null ist, zum Factor hat. Man erhält also alsdann eine der beiden Tafeln (*C*) und (*E*). Ist aber *m* ein Bruch, so gehen die beiden Reihen ins Unendliche fort und sie sind beide nöthig, um den vollständigen Werth von $\cos mx$ zu haben, welches meines Wissens nach Niemand bemerkte.]

127.

Nimmt man, wie oben, die erste Ableitung, um aus $\cos mx$ den Werth von $\sin mx$ zu finden, so erhält man, weil $\frac{dc}{dx} = -s$ ist,

$$\sin mx =$$

$$-s\cos\frac{m\pi}{2}\left(mc - \frac{m(m^2-4)}{2.3}c^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}c^5 \ldots\right)$$

$$+s\cos\frac{(m-1)\pi}{2}\left(1 - \frac{m^2-1}{2}c^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}c^4 \ldots\right),$$

welches die vollständige Entwickelung von $\sin mx$ für jeden Werth von *m* ist. Ist *m* eine ganze Zahl, so erhält man, wie man sieht, die Ausdrücke der Tafeln (*D*) und (*F*).

[*Auch gegen diese Ausdrücke finden mehrere Bedenken Statt.*

I. Erstlich nemlich wäre zwar dann gegen die Coefficienten-Bestimmung in (126. I. und II.) Nichts einzuwenden, wenn unter allen den Werthen von c, für welche die Gleichung gelten soll, und aus

welcher man die Coefficienten bestimmen will und welche die Form

$$\alpha + \beta c + \gamma c^2 + \delta c^3 \ldots = 0$$

hat, auch der Werth 0 *wäre. Denn dann erhielte man aus* $\alpha + \beta c + \gamma c^2 \ldots = 0$, *für* $c = 0$, *zunächst* $\alpha = 0$, *für jedes c; also* $\beta c + \gamma c^2 \ldots = 0$, *oder* $\beta + \gamma c \ldots = 0$; *also für* $c = 0$, $\beta = 0$ *für jedes c, und so weiter:* $\gamma = 0$, $\delta = 0$ *etc.*

Dehnt man indessen die Gleichung auf den Fall aus, wenn $c = 0$ *ist, so lässt man sie mindestens bis* $x = \frac{1}{2}\pi$ *gelten; denn erst für* $x = \frac{1}{2}\pi$ *ist c, oder* $\cos x$, $= 0$. *Die Ausdehnung bis* $x = \frac{1}{2}\pi$ *aber hat die oben bemerkten Schwierigkeiten weil man unbestimmte Ausdrücke erhält, so bald man den Umfang von* 0 *bis* $\frac{1}{4}\pi$ *erreicht.*

II. Zweitens geschieht die Bestimmung der beiden ersten Coefficienten A und B wiederum durch Ableitungen. Dieses geht, wie bei den obigen Ausdrücken für $\cos mx$ *und* $\sin mx$, *nicht wohl an, weil die Ableitungen alsdann unendlich gross sind, und also die Entwickelung durch Ableitungen nicht geschehen kann.*

Deshalb ist die Richtigkeit der Ausdrücke (126. *VII.*) *und* (127.) *für* $\cos mx$ *und* $\sin mx$ *zu bezweifeln.*

III. Zuverlässigere Ausdrücke erhält man, wenn man bei den Grundformeln (110.) *stehen bleibt. Dieselben geben*

$$2\cos mx = (\sin x \sqrt{-1} + \cos x)^m + (-\sin x \sqrt{-1} + \cos x)^m$$

vielfacher Bogen.

und

$$2\sqrt{-1}\sin mx =$$

$$(\sin x\sqrt{-1} + \cos x)^m - (-\sin x\sqrt{-1} + \cos x)^m.$$

Entwickelt man diese Ausdrücke, so erhält man

$$2\cos mx = \sin x^m (\sqrt{-1})^m + m \sin x^{m-1} \cos x (\sqrt{-1})^{m-1}$$
$$+ \frac{m.m-1}{2} \sin x^{m-2} \cos x^2 (\sqrt{-1})^{m-2} \ldots$$
$$+ \Big(\sin x^m (-\sqrt{-1})^m + m \sin x^{m-1} \cos x (-\sqrt{-1})^{m-1}$$
$$+ \frac{m.m-1}{2} \sin x^{m-2} \cos x^2 (-\sqrt{-1})^{m-2} \ldots\Big)$$

$$2\sqrt{-1}\sin mx = \sin x^m (\sqrt{-1})^m + m \sin x^{m-1} \cos x (\sqrt{-1})^{m-1}$$
$$+ \frac{m.m-1}{2} \sin x^{m-2} \cos x^2 (\sqrt{-1})^{m-2} \ldots$$
$$- \Big(\sin x^m (-\sqrt{-1})^m + m \sin x^{m-1} \cos x (-\sqrt{-1})^{m-1}$$
$$+ \frac{m.m-1}{2} \sin x^{m-2} \cos x^2 (-\sqrt{-1})^{m-2} \ldots\Big)$$

Nun findet man, wenn man in die obigen Grundgleichungen für $2\cos mx$ *und* $2\sqrt{-1}\sin mx$, $x = \frac{1}{2}\pi$ *setzt, weil alsdann* $\cos x = 0$ *ist,*

$$2\cos\frac{m\pi}{2} = (\sqrt{-1})^m + (-\sqrt{-1})^m \text{ und}$$

$$2\sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{2} = (\sqrt{-1})^m - (-\sqrt{-1})^m;$$

also ist

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

$$\cos mx = \sin x^{m} . \cos\frac{m\pi}{2} + m \sin x^{m-1} \cos x \cos\frac{(m-1)\pi}{2}$$

$$+ \frac{m.m-1}{2} \sin x^{m-2} \cos x^{2} \cos\frac{(m-2)\pi}{2} \ldots$$

$$\sin mx = \sin x^{m} . \sin\frac{m\pi}{2} + m \sin x^{m-1} \cos x \sin\frac{(m-1)\pi}{2}$$

$$+ \frac{m.m-1}{2} \sin x^{m-2} \cos x^{2} \sin\frac{(m-2)\pi}{2} \ldots$$

oder, allgemein:

$$\cos m(\pm 2n\pi + x) =$$

$$\sin x^{m}\left(\cos\frac{m}{2}\pi + m\frac{\cos x}{\sin x}\cos\frac{m-1}{2}\pi + \frac{m.m-1}{2}\frac{\cos x^{2}}{\sin x^{2}}\cos\frac{m-2}{2}\pi \ldots\right)$$

$$\sin m(\pm 2n\pi + x) =$$

$$\sin x^{m}\left(\sin\frac{m}{2}\pi + m\frac{\cos x}{\sin x}\sin\frac{m-1}{2}\pi + \frac{m.m-1}{2}\frac{\cos x^{2}}{\sin x^{2}}\sin\frac{m-2}{2}\pi \ldots\right).$$

IV. Dieses sind die Ausdrücke für $\cos mx$ *und* $\sin mx$ *nach steigenden Potenzen von* $\cos x$, *wie man sie unmittelbar aus den Grundformeln findet.*

Man darf dieselben aber, wenn sie brauchbar seyn, das heisst, wenn sie weder unmögliche noch unendliche Grössen enthalten sollen, wieder nur in dem Umfange eines halben Kreises nehmen, und zwar nur in dem Umfange, innerhalb dessen $\frac{\cos x}{\sin x}$ *kleiner als 1 ist, weil sonst die Reihen divergiren. Dieses ist der Fall von* $\frac{1}{4}\pi$ *bis zu* $\frac{3}{4}\pi$. *Hat man grössere oder kleinere Bogen* x, *so muss man die erforderlichen Vielfachen von* $\frac{1}{4}\pi$ *zu* x *ab*

vielfacher Bogen.

ab und zurechnen, auf eine ähnliche Weise, wie in der Anmerkung zu (123.)]

128.

Es bleibt uns noch übrig die Entwickelungen von $\cos mx$ und $\sin mx$ nach steigenden Potenzen von $s = \sin x$, wie in den Tafeln (G), (H), (J), (K) zu untersuchen.

Zu dem Ende bemerken wir, dass für $\sin x = s$, $\cos x = \sqrt{(1-s^2)}$ ist, und dass also die allgemeinen Ausdrücke von $\cos mx$ und $\sin mx$ (110.) in

$$2\cos mx = (\sqrt{(1-s^2)} + s\sqrt{-1})^m + (\sqrt{(1-s^2)} - s\sqrt{-1})^m$$

$$2\sqrt{-1}\sin mx =$$

$$(\sqrt{(1-s^2)} + s\sqrt{-1})^m - (\sqrt{(1-s^2)} - s\sqrt{-1})^m$$

übergehen.

Es kommt also nur darauf an, die Ausdrücke

$$(\sqrt{(1-s^2)} \pm s\sqrt{-1})^m$$

nach steigenden Potenzen von s zu entwickeln.

Man setze

$$(\sqrt{(1-s^2)} + s\sqrt{-1})^m = z$$

und nehme die erste Ableitung nach s, so erhält man

$$\frac{dz}{ds} = m(\sqrt{(1-s^2)} + s\sqrt{-1})^{m-1} \times \left(-\frac{s}{\sqrt{(1-s^2)}} + \sqrt{-1}\right)$$

$$= \frac{m(\sqrt{(1-s^2)} + s\sqrt{-1})^{m-1}(\sqrt{(1-s^2)}\sqrt{-1} - s)}{\sqrt{(1-s^2)}}$$

$$= \frac{m\sqrt{-1}(\sqrt{(1-s^2)} + s\sqrt{-1})^m}{\sqrt{(1-s^2)}}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch ihre Stammgleichung, so erhält man

Ausdrücke der Cosinus und Sinus

$$\frac{dz}{ds} : z = \frac{m\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-s^2)}}.$$

Multiplicirt man kreuzweise und quadrirt, so erhält man

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 (1-s^2) = -m^2 z^2.$$

Nimmt man von Neuem die erste Ableitung und dividirt durch $2\frac{dz}{ds}$, so erhält man folgende Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung mit z:

$$m^2 z - s\frac{dz}{ds} - (s^2-1)\frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

welche, wie man sieht, ganz der obigen Gleichung in y und c ähnlich ist.

Setzt man also

$$z = A + Bs + Cs^2 + Ds^3 \ldots.,$$

so wird man die nemlichen Werthe der Coefficienten finden. Da aber die beiden ersten, A und B unbestimmt bleiben, so können sie, je nach der Verschiedenheit der Functionen y und z von c und s, von einander verschieden seyn.

Um diese beiden Coefficienten zu finden, ist das einfachste Mittel, die beiden ersten Glieder der Reihe wirklich zu entwickeln. Es ist $\sqrt{(1-s^2)} = 1 - \frac{s^2}{2} \ldots.$; also ist klar, dass die beiden ersten Glieder von

$$\left(1 + s\sqrt{-1} - \frac{s^2}{2} \ldots.\right)^m,$$

$$1 + ms\sqrt{-1}$$

sind. Folglich ist

vielfacher Bogen.

$$A = 1,\ B = m\sqrt{-1}.$$

Die Entwickelung von $(\sqrt{(1-s^2)} - s\sqrt{-1})^m$ giebt das Nemliche, blos das $-\sqrt{-1}$, statt $\sqrt{-1}$ vorkommt. Also ist für die zweite Grösse,

$$A = 1, \text{ und } B = -m\sqrt{-1}$$

Um daher die Summe der beiden Entwickelungen zu finden, darf man nur für A und B die Summe ihrer beiden correspondirenden Werthe setzen, welches giebt:

$$A = 2 \text{ und } B = 0.$$

Will man den Unterschied der beiden Entwickelungen, so muss man die Unterschiede der correspondirenden Werthe von A und B setzen, welches giebt:

$$A = 0 \text{ und } B = 2m\sqrt{-1}.$$

Substituirt man Dieses, so erhält man, nachdem man mit 2 und $2\sqrt{-1}$ dividirt hat,

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{2}s^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2\cdot 3\cdot 4}s^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}s^6 \dots$$

$$\sin mx = ms - \frac{m(m^2-1)}{2\cdot 3}s^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}s^5 \dots$$

129.

Diese Ausdrücke stimmen, wie man sieht, mit denen der Tafeln (J) und (K) überein; aber aus der Art, wie wir sie fanden, sieht man zugleich, dass sie allgemein für jeden beliebigen Werth von m gelten. Da indessen die erste Reihe nur dann abbricht, wenn

m eine ganze grade Zahl ist, die zweite nur dann, wenn m ungrade ist, so können sie zur Theilung der Winkel nur in eben diesen Fällen dienen. Nimmt man aber die Ableitungen davon, wie oben, so kann man aus den Ausdrücken andre finden, welche in eben den Fällen abbrechen, wo die gefundenen Ausdrücke ohne Ende fortlaufen. Dabei muss man sich erinnern, dass die Ableitungen von $\cos mx$ und $\sin mx$, $-m \sin mx$ und $m \cos mx$ und von c und s, $-s$ und c sind. Auf diese Weise geben die beiden vorigen Gleichungen, wenn man die Ableitungen nimmt,

$$\sin mx = c\left(ms - \frac{m(m^2-4)}{2.3}s^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}s^5 \ldots\right)$$

$$\cos mx = c\left(1 - \frac{m^2-1}{2}s^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}s^4 \ldots\right)$$

welche Gleichungen, wie man sieht, den Ausdrücken der Tafeln (K) und (G) entsprechen und folglich für beliebige Werthe von m eben so allgemein sind.

Alle Ausdrücke der verschiedenen Tafeln, sind also auf diese Weise allgemein bewiesen.

[*Gegen die Entwickelungen in* (128.) *finden ähnliche Bedenken wie gegen die obigen Statt. Die sicherern Formeln für* $\cos mx$ *und* $\sin mx$, *welche unmittelbar aus den Grundformeln* (110.) *folgen, sind diejenigen* (123. *Anmerk. XIV.*) *und* (127. *Anmerk. III.*) *Man kann dieselben nach Belieben in Reihen, welche nach steigenden oder fal-*

lenden Potenzen von $\sin x$ *und* $\cos x$ *fortlaufen, verwandeln, wenn man, vermittelst der Gleichung* $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$, $\sin x$ *oder* $\cos x$, *so weit es angeht, wegschafft.*]

Der Cotesische und der Moivresche Lehrsatz.

130.

Der Cotesiche Lehrsatz ist so innig mit der Theorie der Winkel-Theilung verwandt, dass wir nicht umhin können, ein Wort darüber zu sagen.

Es ist nicht bekannt, wie Cotes den Satz fand. Nach seinem Tode hat man verschiedene, mehr oder weniger einfache, und selbst mehr oder weniger strenge Beweise desselben gegeben. Ohne die unmöglichen Ausdrücke zu Hülfe zu nehmen, wie man es gewöhnlich thut, kann man den Satz unmittelbar aus den Vietaschen Formeln der obigen Tafel (A) finden und es ist nicht unwahrscheinlich, dass Cotes so darauf gekommen sey.

I. Multiplicirt man nemlich diese Formeln mit 2 und setzt

$$c = y + \frac{1}{y},$$

so erhält man folgende sehr einfache Ausdrücke:

$$2 \cos 1\, x = y + \frac{1}{y}$$

$$2 \cos 2\, x = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

$$2 \cos 3\, x = y^3 + \frac{1}{y^3}$$

$$2\cos 4x = y^4 + \frac{1}{y^4}$$

etc.,

woraus leicht zu schliessen, dass allgemein

$$2\cos mx = y^m + \frac{1}{y^m}$$

ist.

II. Um sich direct von der Allgemeinheit dieses Ausdrucks zu überzeugen, darf man nur erwägen, dass, wenn man in die [*bekannte*] Gleichung

$$2\cos x \cos mx = \cos(m+1)x + \cos(m-1)x,$$

$$2\cos x = y + \frac{1}{y}$$

setzt und annimmt, die beiden auf einander folgenden Glieder $2\cos(m-1)x$ und $2\cos mx$ wären von der Form

$$y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}} \text{ und } y^m + \frac{1}{y^m},$$

dass dann die Gleichung

$$2\cos(m+1)x = \left(y + \frac{1}{y}\right)\left(y^m + \frac{1}{y^m}\right) - \left(y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}}\right)$$

$$= y^{m+1} + \frac{1}{y^{m+1}}$$

giebt. Da nun die beiden ersten Glieder $2\cos 0x$ und $2\cos x$ von der Form $y^m + \frac{1}{y^m}$ sind, wenn man $m = 0$ und $m = 1$ setzt, so sind nothwendig alle übrige Glieder von der nemlichen Form. [*Nemlich wenn man in die Gleichung* $2\cos(m+1)x = 4\cos x \cos mx - 2\cos(m-1)x$, $y + \frac{1}{y}$ *statt* $2\cos x$,

der Moivresche Lehrsatz.

$y^m + \frac{1}{y^m}$ statt $2\cos mx$ und $y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}}$ statt $2\cos(m-1)x$ setzt, so erhält man $2\cos(m+1)x$

$$= \left(y + \frac{1}{y}\right)\left(y^m + \frac{1}{y^m}\right) - \left(y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}}\right)$$

$$= y^{m+1} + \frac{1}{y^{m-1}} + y^{m-1} + \frac{1}{y^{m+1}} - y^{m-1} - \frac{1}{y^{m-1}}$$

$$= y^{m+1} + \frac{1}{y^{m-1}}.$$ Hieraus wird geschlossen, dass die für den Cosinus eines beliebigen Winkels angenommene Form allgemein gilt, weil sie, wenn man voraussetzt, sie passe für $\cos x$, $\cos(m-1)x$ und $\cos mx$, auch, wie die Rechnung zeigt, für $\cos(m+1)x$ passt.

Uebrigens geben die Ausdrücke für $\cos x$ uud $\sin x$ mit unmöglichen Grössen in (105.), diese Formeln unmittelbar. Denn es ist

$$2\cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

und

$$2\cos mx = e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}.$$

Setzt man

$$e^{x\sqrt{-1}} = y,$$

so erhält man ganz allgemein

$$2\cos mx = y^m + \frac{1}{y^m}.]$$

III. Nun geben die Gleichungen $2\cos x = y + \frac{1}{y}$ und $2\cos mx = y^m + \frac{1}{y^m}$, folgende beide;

$y^2 - 2y\cos x + 1 = 0$ und $y^{2m} - 2y^m \cos mx + 1 = 0.$

Da diese Gleichungen zugleich Statt finden; so müssen sie eine gemeinschaftliche Wurzel haben [*das heisst, es muss irgend einen Werth von y geben, der beiden zugleich genug thut*].

IV. Dieser letzte Satz ist ohne Beweis von Moivre in den philosophical transactions von 1722, in dem nemlichen Jahre mitgetheilt worden, als Cotes Harmonia mensurarum, sechs Jahre nach seinem Tode, erschien.

V. Nun sey a die gemeinschaftliche Wurzel der beiden Gleichungen. Da die Gleichungen unverändert die nemlichen bleiben, wenn man $\frac{1}{y}$ statt y setzt, so folgt, dass $\frac{1}{a}$ noch eine gemeinschaftliche Wurzel seyn muss. Die Gleichung $y^2 - 2y \cos x + 1 = 0$, welche vom zweiten Grade ist, hat aber nur zwei Wurzeln, folglich die beiden Wurzeln a und $\frac{1}{a}$; mithin hat diese Gleichung alle ihre Wurzeln mit der Gleichung $y^{2m} - 2y^m \cos mx + 1 = 0$ gemein; folglich ist sie von dieser nothwendig ein Divisor.

VI. Man setze

$$mx = \varphi, \text{ also } x = \frac{\varphi}{m};$$

so folgt aus dem, was oben bewiesen wurde, dass der Ausdruck

$$y^{2m} - 2y^m \cos \varphi + 1$$

nothwendig durch

der Moivresche Lehrsatz.

$$y^2 - 2y \cos \frac{\varphi}{m} + 1$$

theilbar seyn muss, wenn m irgend eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

VII. Wenn nun der Umfang eines Kreises, [*für den Halbmesser* 1,] oder das Maass von 4 rechten Winkeln, durch 2π bezeichnet wird [*Lagrange schreibt c; ich behalte die gewöhnliche Bezeichnung bey*], so ist, wie bekannt,

$$\cos \varphi = \cos(\varphi + 2n\pi),$$

[*eigentlich* $\cos \varphi = \cos \pm (2n\pi \pm x)$], wo n eine beliebige ganze Zahl seyn kann. Setzt man also $2n\pi + \varphi$ statt φ und, der Reihe nach, $n = 0, 1, 2$ *etc.* bis $m - 1$, so folgt, dass der Ausdruck

$$y^{2m} - 2y^m \cos \varphi + 1,$$

nothwendig folgende m Divisoren hat

$$y^2 - 2y \cos \frac{\varphi}{m} + 1$$

$$y^2 - 2y \cos \left(\frac{2\pi}{m} + \frac{\varphi}{m}\right) + 1$$

$$y^2 - 2y \cos \left(\frac{4\pi}{m} + \frac{\varphi}{m}\right) + 1$$

$$y^2 - 2y \cos \left(\frac{6\pi}{m} + \frac{\varphi}{m}\right) + 1$$

etc.

$$y^2 - 2y \cos \left(\frac{2(m-1)}{m}\pi + \frac{\varphi}{m}\right) + 1$$

$$\left[\textit{eigentlich } y^2 - 2y \cos \left(\frac{\pm(2(m-1)\pi \pm \varphi)}{m}\right) + 1\right].$$

Ausdrücke der Potenzen von

VIII. Da diese Ausdrücke alle von einander verschieden sind, ihre Zahl m und die Grösse $y^{2m} - 2y^m \cos\varphi + 1$ von dem $2m$ten Grade ist, so folgt, dass dieselbe nur das Product jener m Grössen vom zweiten Grade seyn kann.

IX. Der Cotesische Lehrsatz ist, wie bekannt, nur ein besonderer Fall dieses allgemeinen Satzes, nemlich derjenige, für welchen $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ ist, welches $\cos\varphi = \pm 1$ giebt, wodurch sich der allgemeine Ausdruck $[y^{2m} - 2y^m \cos\varphi + 1]$ auf $(y^m \pm 1)^2$ reducirt.

X. Der allgemeine Satz gebührt Moivre, wie man aus den Miscellaneis analyticis sehen kann.

Ausdrücke der Potenzen von Cosinus und Sinus.

131.

Bis jetzt haben wir nur die Cosinus und Sinus vielfacher Bogen in Potenzen der Cosinus und Sinus der einfachen Bogen entwickelt. Man kann, umgekehrt, die Potenzen der Sinus und Cosinus einfacher Bogen in Cosinus und Sinus der vielfachen Bogen verlangen. Die Ausführbarkeit dieser Umformung, welche immer Statt findet, ist einer der grössten Vorzüge des Algorithmus der Sinus und Cosinus, wegen der Leichtigkeit, von den Stammgrössen zu

Cosinus und Sinus.

den Ableitungen und von diesen zu jenen überzugehen.

Wir könnten die Ausdrücke aus den oben gefundenen nehmen. Aber wir wollen sie lieber direct, mittels Ableitungen entwickeln, um ein neues Beispiel vom Gebrauche der Ableitungen bei der Umformung der Functionen zu geben.

I. Man betrachte die Potenz $\cos x^m$ und setze, diese Grösse sey gleich y, so dass also

$$y = \cos x^m$$

ist. Nimmt man hiervon die erste Ableitung nach x, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = -m \cos x^{m-1} \sin x.$$

Diese Gleichung, durch die Stammgleichung dividirt giebt

$$\frac{dy}{dx} : y = -\frac{m \sin x}{\cos},$$

woraus folgt:

$$my \sin x + \frac{dy}{dx} \cos x = 0,$$

welches eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist, die den Vorzug hat, dass sie die unbestimmte Potenz von $\cos x$ nicht mehr enthält.

II. Nun setze man allgemein

$$y = A \cos nx + B \cos (n-1) x + C \cos (n-2) x + D \cos (n-3) x \ldots,$$

wo A, B, C.... unbestimmte Coefficienten bedeuten, desgleichen auch die Grösse n unbestimmt ist.

Substituirt man diesen Ausdruck [*für* y, *und*

Ausdrücke der Potenzen von

die erste Ableitung davon für $\frac{dy}{dx}$ *in die Ableitungs-Gleichung (I.)*], so erhält man

$$m \sin x(A \cos nx + B \cos(n-1)x + C \cos(n-2)x \ldots)$$
$$-\cos x(nA \sin nx + (n-1)B \cos(n-1)x + (n-2)C \cos(n-2)x \ldots)$$
$$= 0.$$

III. Entwickelt man die Producte der Sinus und Cosinus und ordnet die Glieder der Resultate nach den Sinus der vielfachen Bogen, so erhält man

$$\left.\begin{array}{r} +(mA - nA) \sin(n+1)x \\ +(mB - (n-1)B) \qquad \sin x \\ +(mC - mA - (n-2)C - nA) \sin(n-1)x \\ +(mD - mB - (n-3)D - (n-1)B) \sin(n-2)x \\ +(mE - mC - (n-4)E - (n-2)C) \sin(n-3)x \end{array}\right\} = 0.$$

.

IV. Setzt man die Coefficienten der verschiedenen Glieder einzeln gleich Null, so erhält man:

$$(m-n)A = 0$$
$$(m-n+1)B = 0$$
$$(m-n+2)C \quad -(m+n)A = 0$$
$$(m-n+3)D - (m+n-1)B = 0$$
$$(m-n+4)E - (m+n-2)C = 0$$

etc.

V. Die erste Gleichung giebt

$$n = m.$$

Substituirt man diesen Werth von n, so geben die andern:

$$B = 0$$
$$2C - 2mA = 0$$

Cosinus und Sinus.

$$3D-(2m-1)B=0$$
$$4E-(2m-1)C=0$$
etc.

Der erste Coefficient A bleibt also unbestimmt. Dann aber erhält man

$$B=0$$
$$C=\frac{2m}{2}A$$
$$D=\frac{2m-1}{3}B$$
$$E=\frac{2m-2}{4}C$$
$$F=\frac{2m-3}{5}D$$
etc.,

folglich

$$B=0,\quad D=0,\quad F=0 \text{ etc.}$$

und

$$C=mA$$
$$E=\frac{m.m-1}{2}A$$
$$G=\frac{m.m-1.m-2}{2.3}A$$
etc.

Also ist allgemein, was auch m seyn mag:

$$\cos x^m=A\left(\cos mx+m\cos(m-2)x+\frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x\ldots\right).$$

VI. Es bleibt noch übrig, den Coefficienten A zu bestimmen.

Man setze zu dem Ende $x=0$, so erhält man

Ausdrücke der Potenzen von

$$1 = A\left(1 + m + \frac{m.m-1}{2} + \frac{m.m-1.m-2}{2\cdot 3}\ldots\right)$$
$$= A(1+1)^m = 2^m A,$$

woraus folgt:

$$A = \frac{1}{2^m}.$$

VII. Man erhält also, schliesslich, wenn man die ganze Gleichung mit 2^m multiplicirt, die sehr einfache Reihe

$$(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x\ldots,$$

welche, wie die Binomial-Formel, immer abbricht, wenn *m* eine ganze positive Zahl ist.

132.

Man kann aus diesem Ausdrucke eine ähnliche Entwickelung von $(2\sin x)^m$ ableiten, wenn man blos $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x setzt. Dieses giebt

$$(2\sin x)^m = \cos m(\tfrac{1}{2}\pi - x) + m\cos(m-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x)$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x)\ldots.$$

[*Gegen die Herleitung dieser Ausdrücke sind wieder mancherlei Bedenken vorhanden.*

I. Erstlich nemlich ist wohl die Coefficienten-Bestimmung in (131. *III. u. IV.*) *nicht allgemein für jedes beliebige m gerechtfertigt; denn man sieht nicht, warum die Coefficienten von* $\sin(n+1)x$, $\sin nx$, $\sin(n-1)x$ *u. s. w. einzeln, gleich Null seyn müssen. Dividirt man die Gleichung* (131. *III.*) *mit* $\sin(n+1)x$, *um den Coef-*

ficienten des ersten Gliedes abzusondern, so sind die Multiplicatoren der andern Coefficienten: $\frac{\sin nx}{\sin(n+1)x}$, $\frac{\sin(n-1)x}{\sin(n+1)x}$, $\frac{\sin(n-2)x}{\sin(n+2)x}$ *etc. und es ist nicht klar, für welchen Werth von* x *alle diese Grössen zugleich Null seyn sollten. Giebt es aber einen solchen Werth nicht, so folgt auch nicht, dass der Coefficient des ersten Gliedes Null ist. Eben so verhält es sich mit den andern Gliedern.*

II. Zweitens dürfte die Bestimmung des ersten Coefficienten A in (131. *VI.*) *nicht vollständig seyn, denn da* $\cos x = \cos \pm(2n\pi + x)$ *ist, so kann man auch* $\pm(2n\pi + x)$ *statt* x *setzen. Dadurch geht die Reihe für* $\cos x^m$ (131. *V.*) *in*

$$\cos x^m =$$

$$A(\cos(m(\pm 2n\pi + x)) + m\cos((m-2)(\pm 2n\pi + x))\ldots.)$$

über, welches für $x = 0$ *nicht allgemein* $1 = A.2^m$, *sondern*

$$1 = A(\cos(\pm 2mn\pi) + m\cos(\pm 2(m-2)n\pi)\ldots.),\ oder$$

$$1 = A\cos 2mn\pi\left(1 + m + \frac{m.m-1}{2}\ldots.\right),\ oder$$

$$1 = A.2^m\cos(2mn\pi)$$

giebt.

III. Drittens hat $(2\cos x)^m$, *im Fall z. B.* m *ein Bruch ist,* m *verschiedene Werthe, hingegen die Reihe rechterhand hat nur einen.*

IV. Auch wenn man den Ausdruck auf bestimmte Fälle anwendet, ist wenigstens nicht allemal sichtbar, dass das Resultat richtig sey. Setzt

Ausdrücke der Potenzen von

man z. B. für x irgend einen Bogen, dessen Cosinus negativ ist und $m = \frac{1}{2}$, so ist $(2 \cos x)^m$ eine unmögliche Grösse: hingegen rechterhand stehen lauter mögliche Grössen, daher die Reihe wenigstens nicht überall etwas Bestimmtes zu geben scheint.

Also ist die Allgemeinheit des Ausdrucks wenigstens zweifelhaft.

V. Zuverlässigere Ausdrücke erhält man, ohne Umweg, unmittelbar aus den Grundformeln, auf folgende Weise.

Es ist

$2 \cos x = \cos x + \sin x \sqrt{-1} + \cos x - \sin x \sqrt{-1}$, oder

$$2 \cos x = \cos x + \sin x \sqrt{-1} + \frac{1}{\cos x + \sin x \sqrt{-1}}$$

und

$$2 \sqrt{-1} \sin x = \sin x \sqrt{-1} + \cos x + \sin x \sqrt{-1} - \cos x,$$

oder

$$2 \sqrt{-1} \sin x = \cos x + \sin x \sqrt{-1} - \frac{1}{\cos x + \sin x \sqrt{-1}},$$

oder, wenn man, der Kürze wegen,

$$\cos x + \sin x \sqrt{-1} = v$$

setzt,

$$2 \cos x = v + \frac{1}{v} = \frac{1}{v} + v \text{ und}$$

$$2 \sqrt{-1} \sin x = v - \frac{1}{v} = -\frac{1}{v} + v.$$

VI. Dieses giebt

$$(2 \cos x)^m = v^m + m v^{m-2} + \frac{m \cdot m-1}{2} \cdot v^{m-4} \ldots\ldots$$

und

$$(2 \cos x)^m = v^{-m} + m v^{-m+2} + \frac{m \cdot m-1}{2} v^{-m+4} \ldots\ldots;$$

$(2 \sqrt{-1}$

Cosinus und Sinus.

$$(2\sqrt{-1}\sin x)^m = v^m - mv^{m-2} + \frac{m.m-1}{2} v^{m-4} \ldots$$

$$(-2\sqrt{-1}\sin x)^m = v^{-m} - mv^{-m+2} + \frac{m.m-1}{2}(-v)^{-m+4} \ldots$$

VII. Nun ist

$$v^m = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx \ (110.)$$

$$v^{-m} = (\cos x - \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx - \sqrt{-1}\sin mx,$$

$$v^{m-2} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^{m-2} = \cos(m-2)x + \sqrt{-1}\sin(m-2)x,$$

$$v^{-m+2} = (\cos x - \sin x\sqrt{-1})^{-m+2} = \cos(m-2)x - \sqrt{-1}\sin(m-2)x;$$

u. s. w., also

$$(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x \ldots$$

$$\pm\sqrt{-1}\left(\sin mx + m\sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x \ldots\right)$$

und $(2\sqrt{-1}\sin x)\, m =$

$$\cos mx - m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x \ldots$$

$$+\sqrt{-1}\left(\sin mx - m\sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x \ldots\right)$$

und $(-2\sqrt{-1}\sin x)^m =$

$$\cos mx - m\cos(m-2)x + \frac{m\ .-1}{2}\cos(m-4)x \ldots$$

$$-\sqrt{-1}\left(\sin mx - m\sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x \ldots\right)$$

VIII. In diese Ausdrücke muss man nun noch $\pm 2n\pi + x$, wo n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann, statt x setzen, weil $\cos(\pm 2n\pi + x) = \cos x$ und zugleich $\sin(\pm 2n\pi + x) = \sin x$ ist. Man erhält alsdann

Ausdrücke der Potenzen von

$$(2\cos x)^m =$$
$$\cos(\ m(\pm 2n\pi + x)) \pm \sqrt{-1}\ \sin(\ m(\pm 2n\pi + x))$$
$$+ m\cos((m-2)(\pm 2n\pi + x)) \pm \sqrt{-1}\ m\sin((m-2)(\pm 2n\pi + x))$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}\cos((m-4)(\pm 2n\pi + x)) \pm \sqrt{-1}\frac{m.m-1}{2}\sin((m-4)(\pm 2n\pi + x))$$
$$+ + \ldots.$$
$$(\pm 2\sin x\sqrt{-1})^m$$
$$\cos(m\ (\pm 2n\pi + x)) \pm \sqrt{-1}\ \sin(\ m(\pm 2n\pi + x))$$
$$- m\cos((m-2)(\pm 2n\pi + x)) \mp \sqrt{-1}\ m\sin((m-2)(\pm 2n\pi + x))$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}\cos((m-4)(\pm 2n\pi + x)) \pm \sqrt{-1}\frac{m.m-1}{2}\sin((m-4)(\pm 2n\pi + x))$$
$$- + - + \ldots.,$$

welches die vollständigen Ausdrücke für die Potenzen der Sinus und Cosinus eines beliebigen Bogens x sind.

IX. Statt des Ausdrucks für die Potenz des Sinus mit den unmöglichen Grössen kann man auch einen andern Ausdruck ohne unmögliche Grössen finden, wenn man in $(2\cos x)^m$, $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x setzt. Dieses giebt

$$(2\sin x)^m = \cos\left(m\left(\frac{\pm 4n + 1}{2}\pi - x\right)\right)$$
$$\pm \sqrt{-1}\sin\left(m\left(\frac{\pm 4n + 1}{2}\pi - x\right)\right)$$
$$+ m\cos\left((m-2)\left(\frac{\pm 4n + 1}{2}\pi - x\right)\right)$$
$$\pm \sqrt{-1}\ m\sin\left((m-2)\left(\frac{\pm 4n + 1}{2}\pi - x\right)\right)$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}\cos\left((m-4)\left(\frac{\pm 4n + 1}{2}\pi - x\right)\right)$$
$$\pm \sqrt{-1}\frac{m.m-1}{2}\sin\left((m-4)\left(\frac{\pm 4n + 1}{2}\pi - x\right)\right)$$
$$+ + \ldots.$$

Cosinus und Sinus.

X. Ist m eine ganze positive Zahl, so haben

Erstlich die Ausdrücke für $(2\cos x)^m$ *und* $(2\sin x)^m$ *immer eine endliche Zahl von Gliedern, weil von den Binomial-Coefficicnten, in welche dic Glieder multiplicirt sind, der* $m+2$*te und alle folgenden verschwinden.*

Zweitens heben sich alle Glieder, die in $\sqrt{-1}$ *multiplicirt sind, auf, weil, wie leicht zu sehen, allemal die Sinus, die, gleich weit von den beiden Enden der Reihe, in gleiche Binomial-Coefficienten multiplicirt sind, gleich gross sind, aber entgegengesetzte Zeichen haben. Ist m ungrade, so dass ein Sinus in der Mitte der Reihe allein steht, so ist dieser an sich selbst Null.*

Drittens ist, im Fall m eine ganze Zahl ist, auch $\cos m(\pm 2n\pi + x)$, *für jedes beliebige m,* $= \cos mx$, $\cos(m-2)(\pm 2n\pi + x) = \cos(m-2)x$ *u. s. w.*

Im Fall also m eine ganze positive Zahl ist, gehen die Ausdrücke für $(2\cos x)^m$ *und* $(2\sin x)^m$ *in folgende über:*

$$(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x\ldots,$$

$$(2\sin x)^m =$$

$$\cos m(\tfrac{1}{2}\pi - x) + m\cos(m-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x)\ldots$$

Diese Ausdrücke stimmen genau mit den Lagrangischen in (131. VII.) und (132.) überein. Letztere gelten also, wenn m eine ganze positive Zahl ist; aber nicht allgemein in allen andern Fällen.

Ausdrücke der Potenzen von

XI. Ist m eine ganze negative Zahl, so findet von den Einschränkungen (X.) nur die letzte Statt. In diesem Falle also sind die Ausdrücke folgende:

$$(2 \cos x)^m = mx + m \cos (m-2)x + \frac{m.m-1}{2} \cos (m-4)x \ldots$$

$$\pm \sqrt{-1}\left(\sin mx + m \sin (m-2)x + \frac{m.m-1}{2} \sin (m-4)x \ldots \right)$$

$$(2 \sin x)^m = \cos m(\tfrac{1}{2}\pi - x) + m \cos (m-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x)$$

$$+ \frac{m.m-1}{2} \cos (m-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) \ldots$$

$$\pm \sqrt{-1}\left(\sin m(\tfrac{1}{2}\pi - x) + m \sin (m-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) \right.$$

$$\left. + \frac{m.m-1}{2} \sin (m-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) \ldots \right)$$

XII. Für jeden andern Werth von m ändert sich die allgemeine Form, in so fern die Reihen für ein beliebiges x gelten sollen, nicht.

XIII. Ist $x = 2\mu\pi$, wo μ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so ist

$$\cos m(\pm 2n\pi + 2\mu\pi) = \cos (m-2)(\pm 2n\pi + 2\mu\pi)$$

$$= \cos (m-4)(+2n\pi + 2\mu\pi)$$

etc.

Eben so die Sinus.

Weil beide Zahlen μ und n willkürlich sind, so lässt sich $\pm 2n\pi + 2\mu\pi$ durch $2\nu\pi$ ausdrücken, wo ν eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Also giebt der Ausdruck für $(2 \cos x)^m$, in dem Falle $x = 2\mu\pi$, weil alsdann zugleich $\cos x = \cos 2\mu\pi = +1$ ist,

Cosinus und Sinus.

$$(+2)^m = \cos 2\nu m\pi\left(1+m+\frac{m.m-1}{2}+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}\ldots\right)$$

$$\pm\sqrt{-1}\sin 2\nu m\pi\left(1+m+\frac{m.m-1}{2}+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}\ldots\right)$$

und, weil $1+m+\frac{m.m-1}{2}\ldots = (1+1)^m = 2^m$ *ist,*

$$(+2)^m = (\cos 2\nu m\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2\nu m\pi)(2^m),$$

und wenn man mit 2^m *dividirt,*

$$(+1)^m = \cos 2m\nu\pi \pm \sqrt{-1}\sin 2m\nu\pi.$$

XIV. Ist $x = (2\mu+1)\pi$, *wo* $2\mu+1$ *jede ungrade Zahl bedeuten kann, so erhält man durch eine ähnliche Rechnung:*

$$(-1)^m = \cos m(2\nu+1)\pi \pm \sqrt{-1}\sin m(2\nu+1)\pi.$$

XV. Diese beiden Ausdrücke sind auch ganz den Grundformeln gemäss. Denn setzt man in die Grundformel

$$\cos mx + \sin mx\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m,$$

$x = 2\nu\pi$, *so erhält man* $\cos 2m\nu\pi + \sin 2m\nu\pi\sqrt{-1} = (+1)^m$, *weil* $\cos 2\nu\pi = 1$. *Setzt man* $x = (2\nu+1)\pi$, *so erhält man* $\cos m(2\nu+1)\pi \pm \sqrt{-1}\sin m(2\nu+1)\pi = (-1)^m$, *wie vorhin.*

XVI. Setzt man in den Ausdruck für $(2\sin x)^m$ *(IX.)* $x = 2\mu\pi$, *so ist* $\cos m\left(\frac{\pm 4n+1}{2} - 2\mu\pi\right)$, *oder, wenn man die ganze grade Zahl* $\pm 2n - 2\mu$ *durch* 2ν *bezeichnet,*

$$\cos m(2\nu+\tfrac{1}{2})\pi = -\cos(m-2)(2\nu+\tfrac{1}{2}\pi)$$

$$= +\cos(m-4)(2\nu+\tfrac{1}{2}\pi)$$

etc.

Ausdrücke der Potenzen von

Also sind die Cosinus alle gleich, und haben abwechselnde Zeichen. Eben so die Sinus.

Mithin ist für $x = 2\mu\pi$, *welches* $\sin x = 0$ *giebt,*

$$(0)^m = \cos m(2\nu + \tfrac{1}{2}\pi)\left(1 - m + \frac{m.m-1}{2}\ldots\right)$$

$$\pm\sqrt{-1}\sin m(2\nu + \tfrac{1}{2}\pi)\left(1 - m + \frac{m.m-1}{2}\ldots\right)$$

$$= \cos m(2\nu + \tfrac{1}{2}\pi)(1-1)^m \pm \sqrt{-1}\sin m(2\nu + \tfrac{1}{2}\pi)(1-1)^m$$

$= 0$, *wie gehörig.*

Gleiches findet man für $x = (2\mu + 1)\pi$.

XVII. Alle diese Resultate beweisen die Richtigkeit der allgemeinen Ausdrücke.

XVIII. Diese allgemeine Ausdrücke geben aber auch vollständig a l l e d i e v e r s c h i e d e n e n W e r t h e, welche $(2\cos x)^m$ *und* $(2\sin x)^m$ *haben können, wenn z. B.* m *ein Bruch ist. Denn es sey z. B.* m *ein Bruch* $\frac{p}{q}$, *wo* p *und* q *ganze Zahlen bedeuten, in welchem Falle* $(2\cos x)^m$ *und* $(2\sin x)^m$, q *verschiedene Werthe haben können; so ist klar, dass auch* $m(\pm 2n\pi + x)$ *und folglich* $\cos m(\pm n\pi + x)$ *und so alle übrige Glieder der beiden Ausdrücke, durch die Veränderung von* n, *ebenfalls* q *verschiedene Werthe erhalten, je nachdem man für* n, *der Reihe nach, die Zahlen* 1, 2, 3 *bis* $q - 1$ *setzt. Aber auch nur* q *verschiedene Werthe, denn der* $q + 1$*ste Werth* $\frac{\pm 2q\pi + x}{q}.p$ *ist wieder gleich* $\left(\pm 2\pi + \frac{x}{q}\right)p$

Cosinus und Sinus.

und folglich das Nemliche, wie $\frac{p}{q}x$, *oder* mx; *und so weiter.*

XIX. Das doppelte Zeichen vor $2n\pi$ *giebt auch nicht etwa die doppelte Zahl von Werthen, sondern zwei Werthe sind immer, in Plus und Minus, einander gleich. Es sey z. B.* $q = 5$, *so sind die sämmtlichen möglichen Werthe von* $\frac{x \pm 2n\pi}{q}$, *der Reihe nach,*

$$\tfrac{1}{5}x + \frac{2\pi}{5} \text{ und } \tfrac{1}{5}x - \frac{2\pi}{5} = \tfrac{1}{5}x + \frac{8\pi}{5} - 2\pi,$$

$$\tfrac{1}{5}x + \frac{4\pi}{5} \text{ und } \tfrac{1}{5}x - \frac{4\pi}{5} = \tfrac{1}{5}x + \frac{6\pi}{5} - 2\pi,$$

$$\tfrac{1}{5}x + \frac{6\pi}{5} \text{ und } \tfrac{1}{5}x - \frac{6\pi}{5} = \tfrac{1}{5}x + \frac{4\pi}{5} - 2\pi,$$

$$\tfrac{1}{5}x + \frac{8\pi}{5} \text{ und } \tfrac{1}{5}x - \frac{8\pi}{5} = \tfrac{1}{5}x + \frac{2\pi}{5} - 2\pi,$$

$$\tfrac{1}{5}x + \frac{10\pi}{5} \text{ und } \tfrac{1}{5}x - \frac{10\pi}{5} = \tfrac{1}{5}x + 0 - 2\pi.$$

Es haben aber

$$\tfrac{1}{5}x + \frac{2\pi}{5} \text{ und } \tfrac{1}{5}x + \frac{2\pi}{5} - 2\pi,$$

$$\tfrac{1}{5}x + \frac{4\pi}{5} \text{ und } \tfrac{1}{5}x + \frac{4\pi}{5} - 2\pi,$$

$$\tfrac{1}{5}x + \frac{6\pi}{5} \text{ und } \tfrac{1}{5}x + \frac{6\pi}{5} - 2\pi,$$

$$\tfrac{1}{5}x + \frac{8\pi}{5} \text{ und } \tfrac{1}{5}x + \frac{8\pi}{5} - 2\pi,$$

$$\tfrac{1}{5}x + \frac{10\pi}{5} \text{ und } \tfrac{1}{5}x + 0 - 2\pi,$$

Ausdrücke der Potenzen von

einerlei Sinus und Cosinus. Also finden nicht etwa 2 q, sondern jedesmal nur q Werthe Statt.

XX. Aus der Vollständigkeit der Ausdrücke, vermöge welcher sie nicht blos einen der Werthe von $(2\cos x)^m$ und $(2\sin x)^m$, sondern alle Werthe geben, folgt nun schon, dass der imaginaire Theil derselben keinesweges überflüssig, sondern nothwendig ist und dass die Formeln, wenn sie alle Fälle umfassen sollen, keine andre als die Gestalt

$$A \pm B\sqrt{-1}$$

haben können, welche sie wirklich haben.

XXI. Da aber vorhin gezeigt worden, dass die so eben durch A und B bezeichneten Grössen an sich selbst, wenn z. B. $M = \frac{p}{q}$ ist, q wesentlich von einander verschiedene Werthe haben können; so folgt, dass von denen, wegen des doppelten Zeichens vor $B\sqrt{-1}$, hieraus entstehenden 2q Werthen von $A \pm B\sqrt{-1}$, wiederum je zwei und zwei einander gleich seyn müssen, weil ihrer sonst nicht q, sondern 2q seyn würden, welches unmöglich ist, da $(2\cos x)^{\frac{p}{q}}$ und $(2\sin x)^{\frac{p}{q}}$ überhaupt nur q verschiedene Werthe haben können.

XXII. Die schwierigste Aufgabe bei diesem Gegenstande, welche bis jetzt noch nicht genügend gelöset worden, besteht darin: zu sagen, für welche *Werthe von n die Ausdrücke von $(2\cos x)^m$*

Cosinus und Sinus.

und $(2 \sin x)^m$ *die Form* $A \pm B\sqrt{-1}$ *verlassen und in ganz reelle oder in ganz imaginaire Ausdrücke, dergleichen es unter den verschiedenen Wurzeln einer Grösse nach den Umständen giebt, übergehen, das heisst, die Form* A *oder* $\pm B\sqrt{-1}$ *annehmen.*

XXIII. Unter den q Wurzeln einer ***positiven*** *Grösse nemlich giebt es bekanntlich, wenn q eine* ***grade*** *Zahl ist, immer zwei, an Werth gleiche, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte, ganz reelle Wurzeln; alle übrigen sind von der Form* $a \pm b\sqrt{-1}$. *Ist q eine* ***ungrade*** *Zahl, so giebt es nur eine positive ganz reelle Wurzel; andere können ganz imaginair seyn, die übrigen sind von der Form* $a \pm b\sqrt{-1}$. *Unter den q Wurzeln einer* ***negativen*** *Grösse giebt es, wenn q eine* ***grade*** *Zahl ist, immer zwei ganz imaginaire Wurzeln, ohne reelle Theile. Alle übrigen sind von der Form* $a \pm b\sqrt{-1}$. *Ist q eine* ***ungrade*** *Zahl, so giebt es eine ganz reelle negative Wurzel. Alle übrigen sind von der Form* $a \pm b\sqrt{-1}$.

In jedem möglichen Falle also sind unter den q Wurzeln einer Grösse allemal ***ganz*** *reelle oder* ***ganz*** *imaginaire Wurzeln und nur die übrigen sind von der Form* $a \pm b\sqrt{-1}$. *Es frägt sich also,* ***für welche*** *Werthe der, allemal zwischen o und q liegenden, und irgend eine ganze Zahl bezeichnenden Grösse n, die* ***ganz reellen*** *und*

die ganz imaginairen Werthe von $(2\cos x)^m$ *und* $(2\sin x)^m$ *Statt finden.*

Diese Frage ist um so wichtiger, weil es auf die ganz reellen und die ganz imaginairen Werthe von $(2\cos x)^m$ *und* $(2\sin x)^m$ *gewöhnlich vorzüglich ankommt, auch diese Werthe aus den allgemeinen Ausdrücken dann selbst erst angegeben werden können, wenn man die zugehörigen Werthe von* n *kennt, weil jeder andere Werth von* n *einem wesentlich verschiedenen Werthe von* $(2\cos x)^m$ *und* $(2\sin x)^m$ *entspricht.*

Diese Aufgabe lässt sich, wie folgt, lösen.

XXIV. Man bezeichne den absoluten Zahlen-Werth von $(2\cos x)^m$, *oder, wenn man* $m = \frac{1}{q}$ *setzt, von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *ohne Rücksicht auf das Zeichen der Grösse* $2\cos x$ *genommen, durch* $|2\cos x|^{\frac{1}{q}}$, *so ist*

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}} = |2\cos x|^{\frac{1}{q}} \cdot (\pm 1)^{\frac{1}{q}},$$

wo die Grösse $|2\cos x|^{\frac{1}{q}}$ *immer nur einen einzigen Werth, ohne Zeichen, die Grösse* $(\pm 1)^{\frac{1}{q}}$, *dagegen* q *Werthe hat. Das Product beider giebt genau die* q *verschiedenen Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$.

Es ist hinreichend bei der Untersuchung von

Cosinus und Sinus.

$(2 \cos x)^m$ stehen zu bleiben, weil die Formel für $(2 \sin x)^m$ unmittelbar daraus folgt. Der Kürze wegen, mag auch q nur eine ganze positive Zahl bedeuten. Die Ausdehnung auf andere Fälle ist leicht.

Nun ist klar, dass man die ganz reellen und die ganz imaginairen Werthe von $(2 \cos x)^{\frac{1}{q}}$ dann erhält, wenn man die ganz reellen oder die ganz imaginairen Werthe von $(\pm 1)^{\frac{1}{q}}$ mit $|2 \cos x|^{\frac{1}{q}}$ multiplicirt, weil $|2 \cos x|^{\frac{1}{q}}$ nur immer einen einzigen Werth hat und doch $|2 \cos x|^{\frac{1}{q}} (\pm 1)^{\frac{1}{q}}$ alle mögliche Werthe von $(2 \cos x)^{\frac{1}{q}}$ ausdrückt. Es kommt also nur darauf an, zu sagen, welche Werthe von n, aus dem allgemeinen Ausdrucke für $(2 \cos x)^m$, den ganz reellen, oder den ganz imaginairen Werthen von $(\pm 1)^{\frac{1}{q}}$, oder $(\pm 1)^{\frac{1}{q}}$ entsprechen. Um dieses zu finden, muss man also der Grösse x, von welcher, wie der Ausdruck $|2 \cos x|^{\frac{1}{q}} . (\pm)^{\frac{1}{q}}$ zeigt, die Verschiedenheit der Wurzeln gar nicht abhängt, indem $|2 \cos x|^{\frac{1}{q}}$ immer nur einen einzigen Werth und nur $(\pm 1)^q$ die q verschiedenen

Ausdrücke der Potenzen von

Werthe hat, solche Werthe geben, dass der allgemeine Ausdruck $A \pm B\sqrt{-1}$ *für* $(2\cos x)^m$ *die Grösse* $(\pm 1)^{\frac{1}{q}}$, *oder* $(\pm 1)^m$, *oder vielleicht* $(\pm 1)^{\frac{1}{q}}$, *noch mit irgend einer bestimmten Zahl multiplicirt, bezeichnet, um an diesem Ausdrucke zu sehen, für welche Werthe von n entweder A oder B Null ist, das heisst* $A \pm B\sqrt{-1}$ *in eine ganz imaginaire, oder ganz reelle Grösse übergeht.*

Diese Werthe von x sind 0 *und* π, *weil* $\cos 0 = 1$ *und* $\cos\pi = -1$ *ist. Man darf also in den allgemeinen Ausdruck für* $(2\cos x)^m$ *nur* $x = 0$ *und* π *setzen und untersuchen, für welche Werthe von n alsdann A oder B Null sind. Für die nemlichen Werthe von n finden auch die ganz imaginairen oder die ganz reellen Werthe von* $(2\cos x)^m$ *Statt.*

XXV. Es war nach (VIII.)

$$(2\cos x)^m = \cos m(x \pm 2n\pi) \pm \sqrt{-1}\sin m(x \pm 2n\pi)$$
$$+ m\left(\cos(m-2)(x \pm 2n\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(m-2)(x \pm 2n\pi)\right)$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}\left(\cos(m-4)(x \pm 2n\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(m-4)(x \pm 2n\pi)\right)$$
$$+ + \ldots,$$

welches wir durch

$$(2\cos x)^m = P_n \pm \sqrt{-1}\,Q_n$$

bezeichnen wollen, so dass

$$P_n = \cos(m(x \pm 2n\pi)) + m\cos((m-2)(x \pm 2n\pi))$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}(\cos(m-4)(x \pm 2n\pi))\ldots$$

Cosinus und Sinus.

$$Q_n = \sin(m(x \pm 2n\pi)) + m \sin((m-2)(x \pm 2n\pi)) + \frac{m.m-1}{2}(\sin(m-4)(x \pm 2n\pi)) \ldots.$$

ist.

Setzt man hierin $x = 0$, *so erhält man*

$$(2\cos x)^m = \cos 2mn\pi + m\cos 2(m-2)n\pi + \frac{m.m-1}{2}\cos 2(m-4)n\pi \ldots$$
$$\pm \sqrt{-1}\left(\sin 2mn\pi + m\sin 2(m-2)n\pi + \frac{m.m-1}{2}\sin 2(m-4)n\pi \ldots\right)$$

oder

$$(2\cos x)m = \cos \pm 2mn\pi\left(1 + m + \frac{m.m-1}{2}\ldots\right)$$
$$\pm\sqrt{-1}\sin \pm 2mn\pi\left(1 + m + \frac{m.m-1}{2}\ldots\right),$$

oder

$$(2\cos x)^m = 2^m\left(\cos \pm\left(2\frac{1}{q}n\pi\right) \pm \sqrt{-1}\sin \pm\left(2\frac{1}{q}n\pi\right)\right),$$

oder

$$(2\cos x)^m = \cos \pm\left(2\frac{1}{q}n\pi\right) \pm \sqrt{-1}\sin \pm\left(2\frac{1}{q}n\pi\right).$$

Setzt man $x = \pi$, *so erhält man*

$$(2\cos x)^m = \cos m(1 \pm 2n)\pi + m\cos(m-2)(1 \pm 2n)\pi + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)(1 \pm 2n)\pi \ldots$$
$$\pm\sqrt{-1}\left(\sin m(1 \pm 2n)\pi + m\sin(m-2)(1 \pm 2n)\pi + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)(1 \pm 2n)\pi \ldots\right),$$

oder

$$(2\cos x)^m = m(1 \pm 2n)\pi\left(1 + m + \frac{m.m-1}{2}\ldots\right)$$
$$\pm\sqrt{-1}\sin m(1 \pm 2n)\pi\left(1 + m + \frac{m.m-1}{2}\ldots\right),$$

Ausdrücke der Potenzen von

oder

$$(2\cos x)^m = 2^m\left(\cos\left(\frac{1\pm 2n}{q}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{1\pm 2n}{q}\right)\pi\right),$$

oder

$$(\cos x)^m = \cos\left(\frac{1\pm 2n}{q}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\sin\left(\frac{1\pm 2n}{q}\right),$$

so, dass also für $x = 0$, oder für $(\pm 1)^{\frac{1}{q}}$, oder, weil $(2\cos x)^m = |2\cos x|^m (+1)^m$ gesetzt wurde, für jeden positiven Cosinus,

$$A_n = \cos \pm \frac{2n}{q} \text{ und } B_n = \sin \pm \frac{2n\pi}{q}$$

und für $x = \pi$, oder für $(-1)^{\frac{1}{q}}$, oder für jeden negativen Cosinus,

$$A_n = \cos\left(\frac{1\pm 2n}{q}\right)\pi \text{ und } B_n = \sin\left(\frac{1\pm 2n}{q}\right)\pi$$

ist.

XXVI. Nun ist leicht zu sehen, dass

I. im ersten Falle, für positive Cosinus:

1. $A_n = 0$ ist für $\frac{2n}{q} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ etc.

2. $B_n = 0$ für $\frac{2n}{q} = 0, 1, 2, 3$ etc.

II. im zweiten Falle für negative Cosinus:

1. $A_n = 0$ für $\frac{1\pm 2n}{q} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ etc.

2. $B_n = 0$ für $\frac{1\pm 2n}{q} = 0, 1, 2, 3$ etc.,

Cosinus und Sinus.

woraus man die zugehörigen Werthe von n finden kann.

XXVII. Man erinnere sich, dass die Zahl der verschiedenen Werthe von $\frac{2n}{q}$ *und* $\frac{1 \pm 2n}{q}$, *also von n, nie grösser seyn kann, als die Zahl q selbst, weil die Zahl der verschiedenen Werthe von* $(2 \cos x)^{\frac{1}{q}}$, *das heisst, die Zahl der, diesen Werthen correspondirenden Werthe von* $\cos m(x \pm 2n\pi)$, $\cos (m-2)(x \pm 2n\pi) \ldots \sin m(x \pm 2n\pi)$, $\sin (m-2)(x \pm 2n\pi) \ldots$ *der Zahl q gleich ist, weshalb die Zahl der Werthe von n, wenn man diese Grösse den ganzen Zahlen, von 0 ab, gleich setzt, nicht grösser seyn kann, als q. Hieraus folgt, dass*

I. wenn $\cos x$ *positiv ist,*

nur

1. $A_n = 0$ *ist für* $\frac{2n}{q} = \frac{1}{2}$ *und* $\frac{3}{2}$, *oder für*

$$2n = \tfrac{1}{2} q \text{ und } \tfrac{3}{2} q,$$

und nur

2. $B_n = 0$ *für* $\frac{2n}{q} = 0$ *und* 1, *oder für*

$$2n = 0 \text{ und } q,$$

indem 2n nicht grösser als 2q seyn kann.

II. Wenn $\cos x$ *negativ ist,*

kann nur

1. $A_n = 0$ *seyn für* $\frac{1 \pm 2n}{q} = \frac{1}{2}$ *und* $\frac{3}{2}$, *oder für*

$$2n = \tfrac{1}{2} q - 1 \text{ und } \tfrac{3}{2} q - 1,$$

Ausdrücke der Potenzen von

2. $B_n = 0$ *für* $\frac{1 \pm 2n}{q} = 1$ *und* 2, *oder für*

$$2n = q - 1 \text{ und } 2q - 1.$$

Denn da n kein Bruch seyn kann, so finden die Werthe $2n = \pm(0q - 1)$ *nicht Statt. Da auch* $2n$ *nicht grösser als* $2q$ *seyn kann, so muss* $2n$, *für* $A_n = 0$, *zwischen* $\frac{1}{2}q - 1$ *und* $\frac{5}{2}q - 1$, *und für* $B_n = 0$, *zwischen* $q - 1$ *und* $3q - 1$ *liegen. Nun aber ist der kleinste Werth von* q, $= 2$ *und die Werthe* $\frac{5}{2}q - 1$ *und* $3q - 1$ *von* $2n$, *geben schon die Zahlen* 4 *und* 5, *das heisst,* $2q$ *und* $2q + 1$, *von welchen die erste die Grenze der Werthe von* $2n$ *ist, die andere sie übersteigt. Also existirt, weil der Werth von* $2n$ *für die eine Grenze nichts anders giebt, als derjenige für die andere Grenze, der Werth* $\frac{5}{2}q - 1$ *und alle folgenden, für* $A_n = 0$, *und der Werth* $3q - 1$ *und alle folgenden für* $B_n = 0$ *nicht. Es bleiben also nur die beiden Werthe* $\frac{1}{2}q - 1$ *und* $\frac{3}{2}q - 1$ *für* $A_n = 0$ *und die beiden Werthe* $q - 1$ *und* $2q - 1$ *für* $B_n = 0$ *übrig.*

XXVII. Da A_n *und* P_n *und* B_n *und* Q_n *zugleich, oder für den nemlichen Werth von n verschwinden und man den allgemeinen Ausdruck von* $(2 \cos x)^m$, *nemlich*

$$(2 \cos x)^m = P_n \pm Q_n \sqrt{-1}$$
$$= \cos m(x \pm 2n\pi) \pm \sin m(x \pm 2n\pi) \sqrt{-1}$$

+ m

Cosinus und Sinus.

$$+ m \cos(m-2)(x \pm 2n\pi) \pm m \sin(m-2)(x \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$$

$$+ \frac{m.m-1}{2} \cos(m-4)(x \pm 2n\pi) \pm \frac{m.m-1}{2} \sin(m-4)(x \pm 2n)\pi\sqrt{-1}$$

.

erhält, wenn man in dem Ausdrucke

$$P_0 \pm Q_0\sqrt{-1} = \cos mx \pm \sin mx\sqrt{-1}$$

$$+ m \cos(m-2)x \pm m \sin(m-2)x\sqrt{-1}$$

$$+ \frac{m.m-1}{2} \cos(m-4)x \pm \frac{m.m-1}{2} \sin(m-4)x\sqrt{-1}$$

.

die Grösse $\pm 2n\pi$ *zu* x *hinzufügt, so folgt aus dem Obigen, dass*

I. im Fall $\cos x$ *positiv,*

1. $P_n = 0$ *ist, wenn man zu* x *die Grösse* $\pm \frac{1}{2}q\pi$, *oder* $\pm \frac{3}{2}q\pi$, *das heisst, zu* mx *die Grösse* $\pm m(\frac{1}{2}q\pi) = \pm \frac{1}{2}\pi$, *oder* $\pm m(\frac{3}{2}q\pi) = \pm \frac{3}{2}\pi$, *hinzufügt, hingegen*
2. $Q_n = 0$, *wenn man zu* x *die Grösse* ± 0, *oder* $\pm \pi q$, *das heisst, zu* mx *die Grösse* ± 0, *oder* $\pm mq\pi = \pm \pi$ *hinzufügt.*

II. im Fall $\cos x$ *negativ, so ist*

1. $P_n = 0$, *wenn man zu* x *die Grösse* $\pm(\frac{1}{2}q-1)\pi$ *oder* $\pm(\frac{3}{2}q-1)\pi$, *das heisst, zu* mx *die Grösse* $\pm m(\frac{1}{2}q-1)\pi = \pm(\frac{1}{2}-m)\pi$, *oder* $\pm m(\frac{3}{2}q-1)\pi = \pm(\frac{3}{2}-m)\pi$ *hinzufügt;*
2. $Q_n = 0$, *wenn man zu* x *die Grösse* $\pm(q-1)\pi$ *oder* $\pm(2q-1)\pi$, *das heisst, zu* mx *die Grösse* $\pm m(q-1)\pi = \pm(1-m)\pi$, *oder* $\pm m(2q-1)\pi = \pm(2-m)\pi$ *hinzufügt.*

Ausdrücke der Potenzen von

XXVIII. *Die Unterschiede aller dieser zwiefachen Werthe der Zunahmeu von mx sind immer gleich π. Es ist leicht zu sehen, dass auch die Unterschiede der zwiefachen Werthe der Zunahmen von $(m-2)x$, $(m-4)x$ etc. allemal Vielfachen von π gleich sind. Da nun kein Cosinus oder Sinus seinen Werth, sondern blos vielleicht sein Zeichen ändert, wenn man einen oder mehrere halbe Umkreise dem ihn entsprechenden Bogen hinzufügt, so reduciren sich alle obigen zwiefachen Werthe der, für $P_n = 0$ und $Q_n = 0$, zu x hinzuzufügenden Grösse, auf einen einzigen und es ist also blos*

I. wenn $\cos x$ positiv:

1. $P_n = 0$, *wenn man zu x die Grösse $\pm \frac{1}{2} q\pi$ hinzufügt, welcher Grösse*

$$n = \frac{q}{4}$$

correspondirt (XXVI. I. 1), so dass

$$P_{(\frac{1}{4}q)} = 0.$$

2. $Q_n = 0$, *wenn man Null zu x hinzufügt, so dass*

$$n = 0 \quad (XXVI.\ I.\ 2)$$

und folglich

$$Q_0 = 0.$$

II. Wenn $\cos x$ negativ ist, so ist

1. $P_n = 0$, *wenn man zu x die Grösse $\pm(\frac{1}{2}q - 1)\pi$ hinzuthut, welches*

Cosinus und Sinus.

$$n = \frac{q-2}{4}$$

giebt (XXVI. II. 1.), so dass

$$P_{\frac{1}{4}(q-2)} = 0,$$

2. $Q_n = 0$, wenn man zu x die Grösse $\pm(q-1)\pi$ hinzuthut, zu welcher

$$n = \frac{q-1}{2}$$

gehört (XXVI. II. 2.), so dass

$$Q_{\frac{1}{2}(q-1)} = 0.$$

XXVIII. Hieraus folgt, dass

I. wenn $\cos x$ positiv ist,

1. die Grösse P_n nicht anders verschwinden kann, das heisst, dass keine ganz imaginairen Werthe von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ anders möglich sind, als wenn q ein Vielfaches von 4 ist, weil für diesen Fall $n = \frac{q}{4}$ war und n immer eine ganze Zahl ist.

2. Dass die Grösse Q_n immer verschwinden kann, das heisst, dass ein ganz reeller Werth von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ immer und für jeden beliebigen Werth von q möglich ist, weil für diesen Fall $n = 0$ war, und folglich n von q unabhängig ist.

Ausdrücke der Potenzen von

II. *Wenn* $\cos x$ *negativ ist,*

1. *dass die Grösse* P_n *nur dann verschwinden kann, das heisst, dass nur dann ganz imaginaire Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *möglich sind, wenn* $q-2$ *ein Vielfaches von* 4 *ist, weil für diesen Fall* $n=\frac{q-2}{4}$ *war und* n *eine ganze Zahl ist.*

2. *Dass die Grösse* Q_n *nur dann verschwinden kann, das heisst, dass nur dann ganz reelle Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *existiren können, wenn* q *eine ungrade Zahl ist, weil für diesen Fall* $n=\frac{q-1}{2}$ *war und* n *eine ganze Zahl ist.*

XXIX. *Setzt man in den allgemeinen Ausdruck von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, $\frac{1}{q}$ *statt* m, *so erhält man*

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}} = P_n \pm Q_n \sqrt{-1}$$
$$= \cos\frac{1}{q}(x\pm 2n\pi) \quad \pm\sqrt{-1}\sin\frac{1}{q}(x\pm 2n\pi)$$
$$+\frac{1}{q}\cos\left(\frac{1}{q}-2\right)(x\pm 2n\pi)\pm\sqrt{-1}\,\frac{1}{q}\sin\left(\frac{1}{q}-2\right)(x\pm 2n\pi)$$
$$+\frac{\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}-1\right)}{2}\cos\left(\frac{1}{q}-4\right)(x\pm 2n\pi)$$
$$\pm\sqrt{-1}\,\frac{\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}-2\right)}{2}\sin\left(\frac{1}{q}-4\right)(x\pm 2n\pi)$$

.

Substituirt man nun in diesen Ausdruck die verschiedenen, oben für $P_n = 0$ und $Q_n = 0$ gefundenen Werthe von n, um die ganz imaginairen und ganz reellen Werthe von $(2 \cos x)^{\frac{1}{q}}$ selbst zu finden, so erhält man Folgendes:

I. Wenn $\cos x$ positiv ist.

1. *Will man in diesem Falle die ganz imaginairen Werthe von $(2 \cos x)^{\frac{1}{q}}$ haben, so muss man $P_n = 0$ setzen. Nun ist für $P_n = 0$, $n = \frac{q}{4}$ (XXVII. I. 1.), also muss man in alle Glieder von Q, $n = \frac{1}{4}q$, oder $2n = \frac{1}{2}q$ setzen. Dieses giebt*

$$\sin \frac{1}{q}(x \pm 2n\pi) = \sin \frac{1}{q}(x \pm \tfrac{1}{2}q\pi) =$$

$$\sin\left(\frac{x}{q} \pm \tfrac{1}{2}\pi\right) \pm \cos \frac{x}{q} = \pm \cos mx,$$

$$\sin\left(\frac{1}{q} - 2\right)(x \pm 2n\pi) = \sin\left(\frac{1}{q} - 2\right)(x \pm \tfrac{1}{2}q\pi)$$

$$= \sin\left(\left(\frac{1}{q} - 2\right)x \pm (\tfrac{1}{2} - q)\pi\right) \pm \cos\left(\frac{1}{q} - 2\right)x = \cos(m-2)x.$$

Eben so findet sich

$$\sin\left(\frac{1}{q} - 4\right)(x \pm 2n\pi) = \pm \cos(m-4)x \text{ u. s. w.}$$

Die Grösse Q_n, welche aus allen diesen Gliedern zusammengesetzt ist, reducirt sich also, für den Fall $n = \frac{1}{4}q$, auf

Ausdrücke der Potenzen von

$$Q_{(\frac{1}{4}q)} = \pm\left(\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x \ldots\right)$$

das heisst auf

$$Q_{(\frac{1}{4}q)} = \pm P_0.$$

Der Werth von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *der jetzt in* $\pm\sqrt{-1}\,Q_{(\frac{1}{4}q)}$ *übergeht, ist also in dem gegenwärtigen Falle*

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}} = \pm\sqrt{-1}\,P_0,$$

woraus man sieht, dass für einen positiven Cosinus von x, *im Fall* q *ein Vielfaches von* 4 *ist, zwei gleiche und entgegengesetzte, ganz imaginaire Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *existiren.*

Wollte man den Ausdruck der Grösse $P_{\frac{1}{4}q}$ *selbst haben, die in dem gegenwärtigen Falle verschwindet, so müsste man in alle Glieder von* P_n, $n = \frac{1}{4}q$, *oder* $2n = \frac{1}{2}q$ *setzen. Dieses giebt*

$$\cos\frac{1}{q}(x \pm 2n\pi) = \cos\frac{1}{q}(x \pm \tfrac{1}{2}q\pi) =$$

$$\cos\left(\frac{x}{q} \pm \tfrac{1}{2}\pi\right) = \pm\sin\frac{x}{q} = \pm\sin mx,$$

$$\cos\left(\frac{1}{q}-2\right)(x \pm 2n\pi) = \cos\left(\frac{1}{q}-2\right)(x \pm \tfrac{1}{2}q\pi) =$$

$$\sin\left(\left(\frac{1}{q}-2\right)x \pm (\tfrac{1}{2}-q)\pi\right) = \pm\sin\left(\frac{1}{q}-2\right)x = \pm\sin(m-2)x,$$

Cosinus und Sinus.

$$\cos\left(\frac{1}{q}-4\right)(x\pm 2n\pi)=\pm\sin(m-4)x \text{ u. s. w.}$$

Der aus diesen Gliedern zusammengesetzte Ausdruck von $P_{(\frac{1}{4}q)}$ *reducirt sich also auf*

$$\pm\left(\sin mx+m\sin(m-2)x+\frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x\ldots\right),$$

das heisst, auf

$$P_{(\frac{1}{4}q)}=\pm Q_0,$$

woraus man sieht, dass für einen positiven Cosinus, die Gleichung

$$Q_0=0$$

Statt findet, so bald q ein Vielfaches von 4 ist.

2. *Die ganz reellen Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *welche für alle mögliche Werthe von q existiren (XXVI. I. 2.), findet man ohne Weiteres. Denn da n für diese Werthe gleich Null ist, so sind selbige nichts anders als* $\pm P_0$, *so dass also*

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}}=\pm P_0.$$

Das zwiefache Zeichen deutet an, dass der Werth von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *für ein grades q zwiefach ist und entgegengesetzte Zeichen hat. Für ein ungrades q gilt das Zeichen + allein. Denn der Ausdruck* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *ist denselben Be-*

dingungen unterworfen, wie $(\pm 1)^{\frac{1}{q}}$, *das heisst, für den gegenwärtigen Fall, wie der Ausdruck* $(+1)^{\frac{1}{q}} = \frac{2n\pi}{q} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2na}{2}$. *Dieser letzte Ausdruck aber hat immer zwei ganz reelle Werthe von entgegengesetzten Zeichen, nemlich für* $2n = 0$ *und* $2n = q$, *welches die beiden Werthe von* $2n$ *sind, für welche* $\sin\frac{2n\pi}{q}$ *verschwindet. Sie sind die nemlichen, für welche* $Q_n = 0$ *ist (XXVI. I. 2.). Also giebt es auch in dem nemlichen Falle nothwendig zwei ganz reelle Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$. *Aber* $2n = q$ *setzt voraus, dass* q *eine grade Zahl ist, weil* n *nur eine ganze Zahl seyn kann. Ist* q *ungrade, so findet der Werth* q *von* $2n$, *oder* $\frac{1}{2}q$ *von* n *nicht Statt und man kann nur* $2n = 0$ *setzen. Also existirt dann nur der positive Werth von* $(+1)^{\frac{1}{q}}$ *und folglich von* P_n.

Es giebt also nur dann zwei gleiche und entgegengesetzte, ganz reelle Werthe von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *wenn* k *eine grade Zahl ist. Sie sind* $\pm P_0$. *Ist* k *ungrade, so findet nur der eine Werth* $+P_0$ *Statt.*

Cosinus und Sinus.

Da übrigens **immer** *ein oder zwei ganz reelle Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *existiren, wenn* $\cos x$ *positiv ist, zugleich aber auch, wie oben gefunden, in dem besondern Falle, wenn q ein Vielfaches von 4 ist, ganz imaginaire Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *Statt finden, so folgt, dass letztere* **ausserdem** *existiren, so dass also, wenn k ein Vielfaches von 4 ist, bis vier verschiedene Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *vorhanden sind, die nicht die allgemeine Form* $P \pm Q\sqrt{-1}$ *haben.*

Die Grösse selbst, welche für die ganz reellen Werthe von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *das heisst, für einen positiven Cosinus* **immer** *verschwindet; findet sich ebenfalls ohne Weiteres. Sie ist nichts anders als* Q_0, *weil für den gegenwärtigen Fall* $n = 0$ *seyn soll. Es findet also für den Fall ganz reeller Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *immer die Gleichung*

$$Q_0 = 0$$

Statt, welches vollkommen mit dem übereinstimmt, was man oben fand. Denn da die ganz reellen Werthe von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *für einen positiven* $\cos x$ **immer** *Statt finden, so muss auch,*

Ausdrücke der Potenzen von

im Fall k ein Vielfaches von 4 ist, in welchem Falle ausserdem zwei ganz imaginaire Werthe von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *existiren, ebenfalls* $Q_0 = 0$ *seyn, weil in diesem Falle die beiden ganz reellen und die beiden ganz imaginairen Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *zugleich Statt fanden. Ganz so fand man es in* (1.)

II. *Wenn* $\cos x$ *negativ ist.*

1. *Um die ganz imaginairen Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *zu finden, die für den Fall, wenn* $q-2$ *ein Vielfaches von 4 ist, existiren (XXVIII. II. 1.), muss man den, diesem Falle correspondirenden Werth* $\frac{q-2}{4}$ *von n in die Grösse* Q_n *substituiren, in welche alsdann die gesuchten ganz imaginairen Werthe übergehen.*

Dieses giebt

$$\sin\frac{1}{q}(x \pm 2n\pi) = \sin\frac{1}{q}\left(x \pm \frac{q-2}{2}\pi\right) =$$

$$\sin\left(\frac{1}{q}(x \pm \pi) \pm \tfrac{1}{2}\pi\right) = \pm\cos\frac{1}{q}(x \pm \pi) = \pm\cos m(x \pm \pi),$$

$$\sin\left(\frac{1}{q}-2\right)(x \pm 2n\pi) = \sin\left(\frac{1}{q}-2\right)\left(x \pm \frac{q-2}{2}\pi\right) =$$

$$\sin\left(\left(\frac{1}{q}-2\right)(x \mp \pi) \pm (\tfrac{1}{2}-q)\pi\right) = \pm\cos\left(\frac{1}{q}-2\right)(x \pm \pi)$$

$$= \pm\cos(m-2)(x \pm \pi).$$

Man findet eben so

Cosinus und Sinus.

$$\sin\left(\frac{1}{q}-4\right)(x \pm 2n\pi) = \pm \cos(m-4)(x \pm \pi)$$

u. s. w.

Die Grösse Q_n ist also in diesem Falle

$$Q_{\left(\frac{q-2}{4}\right)} =$$

$$\pm\left(\cos m(x\pm\pi) + m\cos(m-2)(x\pm\pi) + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)(x\pm\pi)\ldots\right)$$

und man erhält

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}} = \pm\sqrt{-1}\left(\cos m(x\pm\pi) + m\cos(m-2)(x\pm\pi) + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)(x\pm\pi)\ldots\right),$$

das heisst,

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}} = \pm P_{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

welches die beiden ganz imaginairen Werthe von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ sind, die für den Fall, wenn $q-2$ ein Vielfaches von 4 ist, existiren.

Die in diesem Falle verschwindende Grösse P_n findet sich, wenn man $\frac{q-2}{4}$ in alle Glieder substituirt, aus welchen P_n zusammengesetzt ist. Ohne die Rechnung herzusetzen, die nur eine Wiederholung der vorigen seyn würde, ist leicht zu sehen, dass das Resultat

$$P_{\left(\frac{q-2}{4}\right)} = \pm Q_{\frac{1}{2}}$$

ist, oder, wenn man entwickelt,

$$P_{\left(\frac{q-2}{4}\right)} = \pm\Big(\sin mx \cos m\pi + \cos mx \sin m\pi$$

$$+ m(\sin(m-2)x \cos(m-2)\pi \pm \cos(m-2)x \sin(m-2)\pi)$$

$$+ \frac{m.m-1}{2}(\sin(m-4)x \cos(m-4)\pi \pm \cos(m-4)x \sin(m-4)\pi)$$

$$\Big(\ldots\ldots\ldots\ldots\Big)$$

oder, weil

$\cos m\pi = \cos(m-2)\pi = \cos(m-4)\pi \ldots$ und

$\sin m\pi = \sin(m-2)\pi = \sin(m-4)\pi \ldots$

ist,

$$P_{\left(\frac{q-2}{4}\right)} =$$

$$\pm \cos m\pi\Big(\sin mx + m \sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x \ldots\Big)$$

$$\pm \sin m\pi\Big(\cos mx + m \cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x \ldots\Big)$$

das heisst,

$$P_{\left(\frac{q-2}{4}\right)} = \pm P_0 \sin m\pi \pm Q_0 \cos m\pi.$$

Wenn also $q = \frac{1}{m}$ ein Vielfaches von 4 und $\cos x$ negativ ist, so findet allemal die Gleichung

$$P_0 \sin m\pi \pm Q_0 \cos m\pi = 0,$$

oder

$$Q_{\frac{1}{2}} = 0$$

Statt.

Cosinus und Sinus.

2. *Die ganz reellen Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *welche nach (XXVIII. II. 2.) für den Fall existiren, wenn q eine ungrade Zahl ist, findet man, wenn man den für diesen Fall passenden Werth* $\frac{q-1}{2}$ *von n in alle Glieder der Grösse* P_n *substituirt, die alsdann der gesuchte Werth von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *ist. Dieses giebt*

$$\cos\frac{1}{q}(x\pm 2n\pi)=\cos\frac{1}{q}(x+(q-1)\pi)=\cos\left(\frac{1}{q}(x\pm\pi)\pm\pi\right)$$

$$=-\cos\frac{1}{q}(x\pm\pi)=-\cos m(x\pm\pi),$$

$$\cos\left(\frac{1}{q}-2\right)(x\pm 2n\pi)=\cos\left(\frac{1}{q}-2\right)(x\pm(q-1)\pi)$$

$$=\cos\left(\left(\frac{1}{q}-2\right)(x\pm\pi)+(1-2q)\pi\right)=$$

$$-\cos\left(\frac{1}{q}-2\right)(x\pm\pi)=-\cos(m-2)(x\pm\pi).$$

Eben so findet man

$$\cos\left(\frac{1}{q}-4\right)(x\pm 2n\pi)=-\cos(m-4)(x\pm\pi)\ \text{u. s. w.},$$

also

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}}=P_{\left(\frac{q-1}{2}\right)}$$

$$=-\left(\cos m(x\pm\pi)+m\cos(m-2)(x\pm\pi)\right.$$

$$\left.+\frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)(x\pm\pi)\ldots\right)$$

$$=-P_{\frac{1}{2}},$$

Ausdrücke der Potenzen von

welches der einzige ganz reelle Werth von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *in dem Falle ist, wenn* $\cos x$ *negativ, und* q *eine ungrade Zahl ist.*

Die Grösse $Q_{\left(\frac{q-1}{2}\right)}$, *welche in diesem Falle gleich Null ist, findet man durch eine ähnliche Rechnung, wie oben* $P_{\left(\frac{q-1}{2}\right)}$, *nemlich*

$$\sin m(x \pm \pi) + m \sin (m-2)(x \pm \pi)$$
$$+ \frac{m.m-1}{2} \sin (m-4)(x \pm \pi) \ldots = 0,$$

das heisst,

$$Q_{\frac{1}{2}} = 0.$$

XXX. *Folgendes ist die Zusammenstellung der obigen Resultate.*

Man setze, wie oben, der Kürze wegen,

$$\cos m(x \pm 2n\pi) + m \cos (m-2)(x \pm 2n\pi)$$
$$+ \frac{m.m-1}{2} \cos (m-4)(x \pm 2n\pi) \ldots = P_n$$

$$\sin m(x \pm 2n\pi) + m \sin (m-2)(x \pm 2n\pi)$$
$$+ \frac{m.m-1}{2} \sin (m-4)(x \pm 2n\pi) \ldots = Q_n$$

und folglich für $n = 0$

$$\cos mx + m \cos (m-2)x + \frac{m.m-1}{2} \cos (m-4)x \ldots = P_0$$

$$\sin mx + m \sin (m-2)x + \frac{.m-1}{2} (\sin m-4)x \ldots = Q_0$$

und für $2n = 1$, *oder* $n = \frac{1}{2}$

Cosinus und Sinus.

$$\cos m(x \pm \pi) + m \cos(m-2)(x \pm \pi) + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)(x \pm \pi) \ldots = P_{\frac{1}{2}}$$

$$\sin m(x \pm \pi) + m \sin(m-2)(x \pm \pi) + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)(x \pm \pi) \ldots = Q_{\frac{1}{2}}$$

so dass

$$P_{\frac{1}{2}} = P_0 \cos m\pi \pm Q_0 \sin m\pi$$

$$Q_{\frac{1}{2}} = P_0 \sin m\pi \pm Q_0 \cos m\pi;$$

desgleichen setze man

$$m = \frac{1}{q},$$

so erhält man Folgendes.

Die Grösse $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *hat immer q verschiedene Werthe, welche allgemein durch*

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}} = P_n \pm \sqrt{-1}\, Q_n$$

ausgedrückt werden. Unter diesen existiren immer,

I. wenn $\cos x$ *positiv ist,*

für alle mögliche Werthe von x, ein ganz reeller Werth, wenn k eine ungrade und zwei gleiche und entgegengesetzte ganz reelle Werthe, wenn q eine grade Zahl ist. Diese ganz reellen Werthe werden durch

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}}_{(0 \text{ und } \frac{1}{2}q)} = \pm P_0$$

Ausdrücke der Potenzen von

ausgedrückt, wenn man durch o *und* $\frac{1}{2}q$, *unten an* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *gesetzt, die, den ganz reellen Werthen von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *in dem allgemeinen Ausdrucke von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *entsprechenden Werthe von n bezeichnet.*

Ausser diesen ganz reellen Werthen von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *giebt es noch, in dem Falle, wenn q ein Vielfaches von* 4 *ist, zwei ganz imaginaire Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *welche*

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}}_{(\frac{1}{4}q)} = \pm\sqrt{-1}\,P_0$$

sind.

Alle übrige Werthe von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *werden durch*

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}}_n = P_n \pm \sqrt{-1}\,Q_n$$

ausgedrückt, wenn man in diesem Ausdrucke der Grösse n die Werthe aller ganzen positiven Zahlen von o *an bis q giebt, ausser denjenigen, welche den obigen besonderen Werthen von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *zukommen; nemlich:* o *für alle Fälle;* o *und* $\frac{1}{2}q$, *wenn k eine grade Zahl*

und

und o, $\frac{1}{2}q$ und $\frac{1}{4}q$, wenn q ein Vielfaches von 4 ist.

Sodann findet, für alle mögliche Fälle eines positiven Cosinus, die Gleichung

$$Q_0 = 0$$

Statt.

II. Wenn $\cos x$ negativ ist.

1. Ist q eine grade Zahl, so giebt es unter den q verschiedenen Werthen von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ nur zwei ganz imaginaire Werthe, welche

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}}_{\left(\frac{q-2}{4} \text{ und } \frac{3q-2}{4}\right)} = \pm P_{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}$$

sind, wenn $q-2$ ein Vielfaches von 4 ist. Die übrigen Werthe von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, sind von der Form

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}}_n = P_n \pm Q_n \sqrt{-1},$$

wo man für n alle ganze positive Zahlen zwischen o und q setzen kann, ausser den beiden Zahlen $\frac{q-2}{4}$ und $\frac{3q-2}{4}$.

Für alle andere grade Zahlen q, für welche $q-2$ nicht ein Vielfaches von 4 ist, existiren weder ganz imaginaire, noch ganz reelle Werthe von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$. Alle q Werthe

Ausdrücke der Potenzen von

von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *sind alsdann von der Form*

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}} = P_n \pm Q_n.$$

2. *Wenn k eine ungrade Zahl ist, so existirt immer ein ganz reeller Werth von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *welcher*

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}} = -P_{\left(\frac{q-1}{2}\right)\frac{1}{2}}$$

ist. Die übrigen Werthe sind von der Form

$$(2\cos x)^{\frac{1}{q}} = P_n \pm \sqrt{-1}\, Q_n.$$

Ausserdem findet, für alle mögliche Fälle eines negativen Cosinus, immer die Gleichung

$Q_{\frac{1}{2}} = 0$, *oder* $P_0 \sin m\pi \pm Q_0 \cos m\pi = 0$

Statt.

XXXI. Die Gleichungen

$$Q_0 = \sin mx + \sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x \ldots = 0$$

für einen positiven, und

$$Q_{\frac{1}{2}} = \sin m(x \pm \pi) + m \sin(m-2)(x \pm \pi)$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)(x \pm \pi) \ldots = 0$$

für einen negativen Corinus, welche für jeden beliebigen Werth von x Statt finden, enthalten sehr allgemeine und merkwürdige trigonometrische Lehrsätze.

Cosinus und Sinus.

Entwickelt man z. B. die erste Gleichung, so erhält man

$$\tang mx = \frac{m \sin 2x + \frac{m.m-1}{2} \sin 4x \ldots.}{1 + m \cos 2x + \frac{m.m-1}{2} \cos 4x \ldots.}.$$

Für $x = \frac{1}{4}\pi$ *erhält man*

$\tang \frac{1}{4} m\pi =$

$$\frac{m - \frac{m.m-1.m-2}{2.3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5} \ldots.}{1 - \frac{m.m-1}{2} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4} \ldots.}.$$

XXXII. Der Ausdruck, welchen man bisher für $(2 \cos x)^{\frac{1}{q}}$, *allgemein für alle Fälle voraussetzte, und welchen auch oben* Lagrange *findet, ist*

$$(2 \cos x)^{\frac{1}{q}} = P_0.$$

Dabei wird ausserdem stillschweigend die Gleichung

$$Q_0 = 0$$

für alle Fälle angenommen.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den obigen Resultaten, so sieht man nunmehr leicht die Fälle, in welchen sie die Wahrheit verfehlen.

Der Ausdruck $(2 \cos x)^{\frac{1}{q}} = P_0$ *ist nemlich nur in dem Falle, wenn* $\cos x$ *positiv und* q *eine ungrade Zahl ist, vollkommen richtig. Ist* q *eine*

grade Zahl, so giebt er nur einen von den zwei *Werthen, die in diesem Falle Statt finden. Die beiden ganz imaginairen Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *aber, nemlich* $\pm P_0\sqrt{-1}$, *welche ausserdem noch Statt finden, wenn q ein Vielfaches von* 4 *ist, giebt er gar nicht. Ist* $\cos x$ *negativ und k eine grade Zahl, so ist der allgemein angenommene Ausdruck* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *unrichtig, weil in solchem Falle keine ganz reellen Werthe von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *existiren, sondern vielmehr, in dem Falle, wenn* $q-2$ *ein Vielfaches von* 4 *ist, nur zwei ganz imaginaire, gleiche und entgegengesetzte Werthe* $\pm P_{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$. *Ist* $\cos x$ *negativ und q ungrade, so ist der allgemein angenommene Ausdruck von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *ebenfalls unrichtig; denn der alsdann existirende ganz reelle Werth von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$ *ist nicht* P_0, *sondern* $-P_{\frac{1}{2}}$, *so dass also der allgemeine Ausdruck* P_0 *von* $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *für einen negativen Cosinus* immer *unrichtig ist.*

Ausserdem giebt auch dieser allgemeine Ausdruck immer nur einen einzelnen Werth von $(2\cos x)^{\frac{1}{q}}$, *statt der q verschiedenen Werthe, welche immer exsitiren.*

Cosinus und Sinus.

Die, stillschweigend, für alle Fälle angenommene Gleichung $Q_0 = 0$ *ist für einen positiven Cosinus immer richtig. Für einen negativen Cosinus hingegen ist sie unrichtig. Sie ist alsdann nicht* $Q_0 = 0$, *sondern* $Q_{\frac{1}{2}} = 0$.

XXXIII. Das scheinbare Paradoxon, dass man für $(2\cos x)^m$ *und* $(2\sin x)^m$ *Ausdrücke von der Form* $A \pm B\sqrt{-1}$ *findet, welche allgemein einen imaginairen Theil haben, obgleich, wenigstens in vielen Fällen, eine reelle Grösse ausgedrückt werden soll, und dass diese Ausdrücke von Grössen, welche nur einen Werth zu haben scheint, zwei Werthe derselben geben, ist, besonders in der neuern Zeit, ein Gegenstand vielfacher Untersuchungen gewesen.*

Euler, und hier, Lagrange nehmen noch an, dass Q_n *immer Null sey, was doch nur, wie sich oben zeigte, für die reellen Wurzeln von* $(2\cos x)^m$ *der Fall ist, während sogar der mögliche Theil* P_n *des allgemeinen Ausdrucks von* $(2\cos x)^m$ *Null seyn kann.*

Poisson scheint der Erste zu seyn, welcher den Irrthum bemerkte und fand, dass man die Wurzeln alle erhalte, wenn man $x \pm 2n\pi$ *statt* x *setze, welches geschehen könne und müsse, weil* $\cos x = \cos(x \pm 2n\pi)$ *ist. Man sehe deshalb die kleine, aber interessante Abhandlung dieses scharfsinnigen Analysten im zweiten Bande der Corres-*

pondence sur l'école polytechnique, S. 212. Nach diesem haben mehrere Andere über den Gegenstand gearbeitet; denn es kam noch darauf an, zu sagen, was n in $x \pm 2n\pi$ für die ganz reellen, und was für die ganz imaginairen Werthe von $(2 \cos x)^m$ sey. Im dritten Bande der zweiten Auflage des Traité du calcul diff. et int. von Lacroix S. 605 und 620 findet man Bemerkungen über die Frage, und Nachrichten von den Arbeiten von Deflers. Neuerdings hat Plana im XI. Bande der Annalen der Mathematik von Gergonne über die Aufgabe gearbeitet. Aber in allen diesen Abhandlungen scheint der Gegenstand noch nicht erschöpft. Ob er anderswo erschöpft sey, ist mir nicht bekannt. Der obige Versuch, ihn ins Reine zu bringen, dürfte daher nicht unnütz seyn und hier eine Stelle finden.]

133.

Wir haben hier eine vollständige Theorie der Winkel-Functionen gegeben und zugleich an verschiedenen Beispielen gezeigt, wie nützlich der Algorithmus der Ableitung bei Umformung der Functionen ist, wenn man dadurch aus den Gleichungen die Potenzen und Wurzelgrössen wegschafft, welche die Entwickelungen erschweren und das Gesetz der wechselseitigen Abhängigkeit der Glieder verdunkeln.

Wie man sieht, kommt Alles darauf an, zunächst die Ableitungen aus der gegebenen Stammgleichung, oder aus den gegebenen Gleichungen aufzustellen und

dann aus diesen Ableitungs-Gleichungen neue Stammgleichungen zu entwickeln, welche Umformungen der ersten sind. Die Kenntniss der Theorie dieser Gleichungen ist wichtig und es ist nützlich, sich mit den verschiedenen Kunstgriffen, durch welche sich die Rechnung erleichtern lässt, vertraut zu machen.

Wir wollen damit anfangen, die allgemeinen Grundsätze dieser Theorie aufzustellen.

Entstehung der Ableitungs-

Zwölfte Vorlesung.

Allgemeine Theorie der Ableitungs-Gleichungen und der willkürlichen Constanten.

134.

Wir zeigten oben, dass jede Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen, vermöge welcher eine der beiden Grössen eine Function der andern ist, auch allemal Statt findet, wenn man die ersten, zweiten Ableitungen der beiden Glieder der Gleichung, nach einer der veränderlichen Grössen nimmt.

Da diese abgeleiteten Gleichungen gleichzeitig mit der Stammgleichung Statt finden, so kann man auch die verschiedenen Gleichungen beliebig mit einander verbinden. Da nun die Constanten, welche neben den veränderlichen Grössen vorkommen können, in den abgeleiteten Gleichungen unverändert die nemlichen sind, so kann man zwischen den abgeleiteten Gleichungen und der Stammgleichung so viele Constanten wegschaffen, als abgeleitete Gleichungen vorhanden sind. Das Resultat der Elimination ist eine

Ableitungs-Gleichung von der Ordnung der höchsten Abgeleiteten. Sie findet mit der Stammgleichung zugleich Statt und kann folglich ihre Stelle vertreten. Sie wird [*gegen die Stammgleichung*] so viele Constanten weniger enthalten, als der Exponent ihrer Ordnung Einheiten hat.

Die Stammgleichung, verbunden mit ihrer ersten Abgeleiteten, giebt also eine Ableitungs-Gleichung der ersten Ordnung, welche eine Constante weniger enthält, als die Stammgleichung.

Die Stammgleichung, verbunden mit ihren ersten und zweiten Abgeleiteten, giebt eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, welche zwei Constanten weniger enthält, als die Stammgleichung u. s. w.

135.

Die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, welche man durch Wegschaffung einer Constante zwischen der Stammgleichung und ihrer ersten Abgeleiteten erhält, entsteht nur auf eine Art. Hingegen die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, welche man durch Wegschaffung zweier Constanten zwischen der Stammgleichung und ihren Abgeleiteten erster und zweiter Ordnung erhält, auf zweierley Art. Hieraus folgen merkwürdige, diese Art von Gleichungen betreffende Umstände.

Statt nemlich die beiden Constanten mittels der drei Gleichungen auf einmal zu eliminiren, kann man zuerst, nur je eine Constante zwischen der Stammgleichung und ihrer ersten abgeleiteten wegschaffen.

Entstehung der Ableitungs-

Auf diese Weise erhält man zwei verschiedene Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung, deren jede nur noch eine von den beiden Constanten enthält, und zwar jede eine andere. Verbindet man nun diese Gleichungen, jede mit ihrer eigenen Abgeleiteten, so lässt sich die übrig gebliebene Constante ebenfalls noch wegschaffen und man erhält zwei Ableitungs-Gleichungen zweiter Ordnung, ohne die beiden Constanten, welche mit einander und mit derjenigen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung übereinstimmen müssen, die entsteht, wenn man die beiden Constanten auf einmal wegschafft.

Aus jeder dieser Ableitungs-Gleichungen zweiter Ordnung folgt nemlich der Werth der Ableitung zweiter Ordnung derjenigen veränderlichen Grösse, die man als eine Function der andern betrachtet, und zwar durch die erste Ableitung der nemlichen veränderlichen Grösse und durch die beiden veränderlichen Grössen selbst, ausgedrückt, ohne die beiden Constanten der Stammgleichung. Es ist leicht zu sehen, dass nur e i n solcher Werth existirt und dass derselbe also immer der nemliche ist, auf welchem Wege man auch dazu gelangen mag, weil die Ableitungen einer entwickelt oder unentwickelt gegebenen Grösse immer nur einen Werth haben, welchen man, als Resultat der Elimination, völlig bestimmt ausgedrückt findet.

Es folgt also, dass eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung von zwei verschiedenen Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung herkommen kann, wel-

che jede eine willkürliche Constante mehr enthalten, und die also zwei Stammgleichungen der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung sind; aber Stammgleichungen **erster** Ordnung, die sich von der absoluten Stammgleichung [*oder Urgleichung*] von welcher sie herkommen, unterscheiden.

136.

Das Nemliche findet auf höhere Ordnungen Anwendung und es folgt eben so, dass eine Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung von drei verschiedenen Ableitungs-Gleichungen zweiter Ordnung herkommen kann und dass sie also drei erste Stammgleichungen hat u. s. w.

[*Man kann Dieses auf folgende Weise versinnlichen, oder bildlich darstellen.*

Man bezeichne nemlich die gegebene Gleichung zwischen x und y, die so viele Constanten a, b, c.... enthalten kann, als der Exponent der Ordnung der Gleichung Einheiten hat, der Kürze wegen, blos durch u; die davon abgeleiteten Gleichungen erster, zweiter Ordnung etc. durch du, d^2u etc., welche alle noch eben so viele Constanten enthalten können, als die Stammgleichung u; ferner die Operation der Wegschaffung, z. B. der Constante a zwischen den beiden Gleichungen u und du, durch $\frac{u \times du}{a}$; das Resultat einer solchen Operation, also die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung von u, ohne die Constante a, durch $\frac{du}{a}$,

Entstehung der Ableitungs-

die abgeleitete Gleichung von dieser, die noch eben so viele Constanten enthalten kann, als $\frac{du}{a}$, *durch* $d\frac{du}{a}$ *u. s. w.; so ist klar, dass*

zu einer Stammgleichung u mit einer Constante a nur eine Ableitungs-Gleichung $\frac{du}{a}$ *gehört und dass es also zu einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung* $\frac{du}{a}$ *auch nur eine Stammgleichung u giebt;*

zu einer Stammgleichung u mit zwei Constanten a und b hingegen, giebt es zwei, durch die Operationen $\frac{u \times du}{a}$ *und* $\frac{u \times du}{b}$ *entstehende Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung,* $\frac{du}{a}$ *und* $\frac{du}{b}$, *die von einander verschieden sind, aber nur eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, die auf drei verschiedene Arten gefunden werden kann, nemlich:*

$$\frac{u \times du \times d^2u}{ab}, \quad \frac{\frac{du}{a} \times d\frac{du}{a}}{b} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{du}{b} \times d\frac{du}{b}}{a}.$$

Umgekehrt hat eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung $\frac{d^2u}{ab}$ *zwei Stammgleichungen erster Ordnung,* $\frac{du}{a}$ *und* $\frac{du}{b}$, *aber nur eine Urgleichung u.*

Gleichungen.

Zu einer Stammgleichung u mit drei Constanten a, b und c giebt es d r e i, *durch die Operationen* $\frac{u \times du}{a}$, $\frac{u \times du}{b}$, $\frac{u \times du}{c}$ *entstehende Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung:* $\frac{du}{a}$, $\frac{du}{b}$ *und* $\frac{du}{c}$; *ferner drei, durch die Operationen*

$$\frac{u \times du \times d^2u}{ab}, \text{ oder } \frac{\frac{du}{a} \times d\frac{du}{a}}{b}, \text{ oder } \frac{\frac{du}{b} \times d\frac{du}{b}}{a}$$

$$\frac{u \times du \times d^2u}{ac}, \text{ oder } \frac{\frac{du}{a} \times d\frac{du}{a}}{c}, \text{ oder } \frac{\frac{du}{c} \times d\frac{du}{c}}{a}$$

und

$$\frac{u \times du \times d^2u}{bc}, \text{ oder } \frac{\frac{du}{b} \times d\frac{du}{b}}{c}, \text{ oder } \frac{\frac{du}{c} \times d\frac{du}{c}}{b}$$

entstehende Ableitungs-Gleichungen zweiter Ordnung: $\frac{d^2u}{ab}$, $\frac{d^2u}{ac}$, $\frac{d^2u}{bc}$, *aber* n u r e i n e, *durch die verschiedenen möglichen, ähnlicher Weise gemachten Operationen z. B. durch die Operationen*

$$\frac{\frac{d^2u}{ab} \times d\frac{d^2u}{ab}}{c}, \quad \frac{\frac{d^2u}{ac} \times d\frac{d^2u}{ac}}{b}, \quad \frac{\frac{d^2u}{bc} \times d\frac{d^2u}{bc}}{a}$$

entstehende Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung $\frac{d^3u}{abc}$, *die umgekehrt nothwendig drei Stammgleichungen erster Ordnung* $\frac{d^2u}{ab}$, $\frac{d^2u}{ac}$ *und* $\frac{d^2u}{bc}$, *drei Stammgleichungen zweiter Ordnung* $\frac{du}{a}$, $\frac{du}{b}$,

$\frac{du}{c}$, *aber nur eine Urgleichung u hat u. s. w. Man sehe Mehreres und Allgemeineres über diesen Gegenstand im ersten Abschnitte der dritten Abtheilung des ersten Bandes des Versuches über die Rechnung mit veränderlichen Grössen, vom Uebersetzer S. 322 etc.*]

137.

[*Beispiele.*] Wir wollen diese allgemeine Bemerkungen durch einige Beispiele erläutern und anschaulich machen.

I. Es sey die Gleichung des ersten Grades

$$y + ax + b = 0$$

gegeben. Betrachtet man y als eine Function von x und nimmt die erste Ableitung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} + a = 0.$$

Schafft man zwischen diesen beiden Gleichungen a weg, so erhält man die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung:

$$y - x\frac{dy}{dx} + b = 0,$$

deren Stammgleichung also

$$y + ax + b = 0$$

ist, wo a eine willkürliche Constante bedeutet.

II. Hinge die Constante b von der Constante a ab, z. B. wie

$$b = a^2,$$

so erhielte man, wenn man a wegschaffte, nemlich, indem man $\frac{dy}{dx}$ statt a setzte, die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung:

$$y - x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

deren Stammgleichung

$$y + ax + a^2 = 0$$

wäre, wo a die willkürliche Constante vorstellt.

Man setze

$$b = c\sqrt{(1 + a^2)},$$

so erhält man $\left[wegen\ a = -\frac{dy}{dx}\right]$ die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung:

$$y - x\frac{dy}{dx} + c\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = 0,$$

deren Stammgleichung, mit der willkürlichen Constante a,

$$y + ax + c\sqrt{(1 + a^2)} = 0$$

ist.

III. Es sey die Gleichung

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$$

gegeben, so ist die Abgeleitete erster Ordnung:

$$x - a\frac{dy}{dx} = 0,$$

von welcher die gegebene die Stammgleichung mit der willkürlichen Constante b ist.

Soll a die willkürliche Constante seyn, so muss man a wegschaffen. Die abgeleitete Gleichung giebt

Entstehung der Ableitungs-

$$a = x \frac{dy}{dx}.$$

Substituirt man diesen Werth von a in die gegebene Gleichung, so erhält man

$$x^2 - 2xy : \frac{dy}{dx} - x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b = 0,$$

oder

$$(x^2 - b)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy.\frac{dy}{dx} - x^2 = 0,$$

woraus folgt $\Big[(x^2 - b)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2xy\frac{dy}{dx} + x^2$, *oder*

$$(x^2 + y^2 - b)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + x^2$$

$= \left(y\frac{dy}{dx} + x\right)^2$, *oder*$\Big]$

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y\frac{dy}{dx} - x = 0,$$

von welcher Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, die Stammgleichung mit der willkürlichen Constante a,

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$$

ist.

Wollte man a und b, beide wegschaffen, so müsste man die Ableitung zweiter Ordnung nehmen. Da nun die Ableitung erster Ordnung

$$x - a\frac{dy}{dx} = 0$$

gab, worin b nicht mehr vorkam, so darf man nur abermals hiervon die Ableitung nehmen, welches

$$1 - a\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ und } a = 1 : \frac{d^2y}{dx^2}$$

giebt.

Gleichungen.

giebt. Setzt man diesen Werth von a in die vorige Gleichung $\left[x - a\frac{dy}{dx} = 0\right]$, so erhält man $x - \frac{dy}{dx} : \frac{d^2y}{dx^2} = 0$, oder

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

zu welcher Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, die Urgleichung

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$$

mit den beiden willkürlichen Constanten a und b gehört.

Das Nemliche findet man, wenn man aus der obigen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung,

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y\frac{dy}{dx} - x = 0,$$

die Constante b wegschafft; denn man erhält, wenn man die Ableitungen nimmt,

$$\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} + \frac{\frac{dy}{dx}\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}$$
$$- y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Eliminirt man zwischen dieser und der vorigen Gleichung, b, so erhält mau [*nach der nöthigen Rechnung*]

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}\left(y\frac{dy}{dx} + x\right)}{\frac{dy}{dx}} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0,$$

Entstehung der Ableitungs-

oder, wie oben

$$x \frac{d^2y}{dx^2} : \frac{dy}{dx} - 1 = 0, \text{ oder } x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

Auch sieht man, dass diese Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, zwei verschiedene Stammgleichungen erster Ordnung,

$$x - a \frac{dy}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} \frac{dy}{dx} - y \frac{dy}{dx} - x = 0$$

hat, [*die eine* $\frac{du}{b}$, *ohne b, die andere* $\frac{du}{a}$, *ohne a*] wenn a und b die beiden willkürlichen Constanten sind. Diese beiden Stammgleichungen erster Ordnung geben, wenn man zwischen ihnen die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ wegschafft [*und z. B. den aus der ersten Gleichung folgenden Werth* $\frac{x}{a}$ *von* $\frac{dy}{dx}$, *in die zweite Gleichung substituirt*], die Urgleichung $\frac{x}{a}\sqrt{(x^2+y^2-b)} - y\frac{x}{a} - x = 0$, oder $\sqrt{(x^2+y^2-b)} - y - a = 0$, oder, wenn man die Wurzelgrössen aufhebt [$x^2 + y^2 - b = y^2 + 2ay + a^2$, *oder*]

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0,$$

welches die nemliche Urgleichung ist, von welcher wir ausgingen.

[*Wenn man also z. B. zu einer Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung* $\frac{d^2u}{ab}$ *ihre beiden vollständigen Stammgleichungen erster Ordnung,*

Gleichungen.

jede mit einer Constante mehr, $\frac{du}{a}$ *und* $\frac{du}{b}$ *gefunden hat, so ist, um zu der Urgleichung u zu gelangen, keine neue Zurückleitung nöthig, sondern man darf nur die Ableitung* $\frac{dy}{dx}$, *von y nach x, zwischen* $\frac{du}{a}$ *und* $\frac{du}{b}$ *wegschaffen, so erhält man eine Gleichung ohne Ableitungen mit den beiden Constanten a und b, welche folglich nothwendig die Urgleichung selbst ist. Hätte man zu einer Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung* $\frac{d^3u}{abc}$, *die drei Stammgleichungen erster Ordnung* $\frac{d^2u}{ab}$, $\frac{d^2u}{ac}$ *und* $\frac{d^2u}{bc}$, *jede mit einer Constante mehr, gefunden, so dürfte man nur zwischen diesen drei Gleichungen die beiden Ableitungen von y nach x erster und zweiter Ordnung,* $\frac{dy}{dx}$ *und* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *wegschaffen. um ohne weitere Zurückleitung unmittelbar zu der Urgleichung zu gelangen u.s.w.*

138.

Indem man auf diese Weise die Constanten eliminirt, erhält man zuweilen, wie wir oben sahen, Gleichungen, in welchen die Ableitung der höchsten Ordnung auf Potenzen erhoben ist, so dass, um diese Ableitung durch die veränderlichen Grössen und ihre Ableitungen niedriger Ordnungen zu finden, die Auflösung von Gleichungen nöthig zu seyn scheint.

Entstehung der Ableitungs-

Diese Gleichungs-Auflösung aber kann man vermeiden und unmittelbar eine Ableitungs-Gleichung finden, in welcher die Ableitung der höchsten Ordnung nur in der ersten Potenz vorkommt, wenn man die Stammgleichung vorher so verwandelt, dass die willkürliche Constante, welche weggeschafft werden soll, von selbst, blos dadurch, dass man die Ableitung der verschiedenen Glieder nimmt, verschwindet. Man darf nemlich nur die Constante von den veränderlichen Grössen absondern und auf eine Seite bringen. Alsdann ist die Ableitung dieses Theils der Gleichung Null, die abgeleitete Gleichung enthält die Constante nicht mehr und die höchste Ableitung kommt dann nothwendig nur in der ersten Ordnung vor; denn, wie wir in der sechsten Vorlesung sahen, giebt jede veränderliche Grösse, wenn man die Ableitung einer Function mehrerer veränderlichen Grössen nimmt, nur Glieder, die mit der Ableitung der Grössen blos einfach multiplicirt sind.

Nun ist klar, dass diese Vorbereitung nur die Gleichungs-Auflösung der Stammgleichung nach der wegzuschaffenden Constante, als unbekannte Grösse, erfordert. Man kann also auf diesem Wege das nemliche Resultat finden, als wenn man die Ableitungs-Gleichung der höchsten Ordnung nach der höchsten Ableitung auflösete.

139.

[*Beispiele.*] I. In dem zweiten Beispiele, wo die Stammgleichung

Gleichungen.

$$y + ax + a^2 = 0$$

war, fanden wir die Ableitungs-Gleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

welche, wenn man sie $\left[nach\ \frac{dy}{dx}\right]$ auflöset,

$$2\frac{dy}{dx} = x + \sqrt{(x^2 - 4y)}$$

giebt. Hätte man dagegen zuvörderst die Stammgleichung selbst nach a aufgelöset, so hätte man

$$2a = -x + \sqrt{(x^2 - 4y)},$$

und für die Ableitung hiervon,

$$0 = -1 + \frac{x - 2\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(x^2 - 4y)}},$$

oder, wenn man mit $\sqrt{(x^2 - 4y)}$ multiplicirt,

$$x - 2\frac{dy}{dx} - \sqrt{(x^2 - 4y)} = 0$$

gefunden, welches mit dem Vorigen übereinstimmt, weil das Wurzelzeichen + und — seyn kann.

II. Auf dieselbe Weise kann man nach einander mehrere Constanten wegschaffen. Man darf nur immer die Gleichung erst so umformen, dass die Constante von den veränderlichen Grössen abgesondert ist und allein dasteht.

So giebt die Stammgleichung

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0,$$

in welcher die Constante b abgesondert ist, auf der Stelle die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ohne b:

Entstehung der Ableitungs-

$$x - a\frac{dy}{dx} = 0.$$

Entwickelt man hierauf aus dieser Gleichung a, welches $a - x : \frac{dy}{dx} = 0$ giebt und nimmt die Ableitungen der beiden Glieder, so erhält man

$$1 : \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

oder, wenn man mit $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ multiplicirt,

$$\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

wie oben.

Fängt man mit der Elimination der Constante a an, so findet man, wie oben, die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$x^2 - 2xy : \frac{dy}{dx} - x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b = 0.$$

Da die Constante b in dieser Gleichung schon abgesondert ist, so darf man nur von den beiden Gliedern die Ableitungen nehmen, um sogleich die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, ohne a und b zu finden. Man erhält:

$$x - y : \frac{dy}{dx} - \quad + xy\frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+ x^2\frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0,$$

welches sich auf

$$\left(x\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{dy}{dx} - 1\right)\left(y\frac{dy}{dx} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = 0$$

reduciren lässt.

Gleichungen.

Da der Factor $y : \frac{dy}{dx} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ nur die erste Ableitung $\frac{dy}{dx}$ enthält, so kann derselbe keine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung geben. Man darf also nur den andern Factor $x\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{dy}{dx} - 1$ beibehalten. Folglich ist das Resultat,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{dy}{dx} = 1, \text{ oder } x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

wie oben.

Wir werden weiter unten, wenn die Rede von den **singulairen** Stammgleichungen seyn wird, die Bedeutung des ersten Factors sehen.

140.

Diese wenigen, unter den einfachsten gewählten Beispiele zeigen hinlänglich, wie die Ableitungs-Gleichungen durch Wegschaffung der Constanten aus den Stammgleichungen entstehen. Man sieht, dass sich zu einer gegebenen Stammgleichung allemal eine Ableitungs-Gleichung finden lässt, welche gegen die Stammgleichung so viele Constanten weniger enthält, als Einheiten in dem Ordnungs-Exponenten der letzten sind, und dass diese Gleichnng, auf welchem Wege man sie auch finden, und welche Gestalt sie auch haben mag, immer nothwendig die nemliche ist. Die Aufgabe, die Ableitungs-Gleichung einer gegebenen Stammgleichung zu finden, lässt sich also ganz allgemein auflösen. Wir wollen jetzt die umgekehrte Auf-

gabe, von den Ableitungs-Gleichungen zu den Stammgleichungen zurückzukehren, untersuchen [*also mit Leibnitz zu reden, Differential-Gleichungen zu integriren*].

Beweis von der Zahl der Constanten.

141.

Da bei den Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung eine, zweiter Ordnung zwei Constanten weniger als die Stammgleichung enthalten kann u. s. w. so folgt, umgekehrt, dass eine Stammgleichung erster Ordnung eine Constante mehr, als die Ableitungs-Gleichung, eine Stammgleichung zweiter Ordnung zwei Constanten mehr als eine Ableitungs-Gleichung u. s. w. enthalten kann, welche Constanten willkürlich sind. Auch folgt, dass die Stammgleichung nicht mehr Constanten enthalten kann, weil man nicht mehrere derselben durch die Ableitung wieder wegschaffen kann.

Da dieser Satz in der Ableitungs-Theorie sehr wichtig und bis jetzt noch nicht strenge bewiesen ist, so wollen wir davon folgenden directen, auf dem allgemeinen Ausdrucke der Stammgrösse beruhenden Beweis mittheilen.

142.

Wenn y irgend eine Function von x ist und man bezeichnet durch oy, $\frac{doy}{dx}$, $\frac{d^2oy}{dx^2}$, $\frac{d^3oy}{dx^3}$ *etc.* die

der Constanten.

Werthe der Grösse y und ihrer Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ *etc.* für $x = 0$, welche folglich constant sind, so ist, vermöge des am Ende der 9ten Vorlesung bewiesenen Satzes:

$$y = 0y + x\frac{d0y}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2 0y}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3 0y}{dx^3} \ldots.$$

Will man in dieser Reihe bei dem nten Gliede stehen bleiben, so ist der Ausdruck der Grenzen für den Werth des Restes

$$\frac{x^n}{1.2.3.\ldots n} \cdot \frac{d^n 0y}{dx^n},$$

worin man statt $\frac{d^n 0y}{dx^n}$ den grössten und den kleinsten Werth von $\frac{d^n y}{dx^n}$ setzen muss, von $x = 0$ an, bis zu dem Werthe selbst, den man x beilegt.

Gesetzt nun y wäre durch eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ gegeben, so findet man aus dieser Gleichung den Werth von $\frac{dy}{dx}$ in x und y, und wenn man davon die Ableitungen nimmt, eine Gleichung zweiter Ordnung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$; ferner durch wiederholte Ableitung, eine Gleichung dritter Ordnung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w., so dass

Beweis von der Zahl

sich, wenn man in diese Gleichungen, der Reihe nach, die durch die obige Gleichung gegebenen Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ substituirt, zuletzt die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ in x und y ausgedrückt findet. Setzt man nun $x = o$, so gehen die Grössen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in oy, $\frac{doy}{dx}$, $\frac{d^2oy}{dx^2}$ über; also erhält man die Werthe von $\frac{doy}{dx}$, $\frac{d^2oy}{dx^2}$ in oy allein ausgedrückt, welches unbestimmt bleibt. [*Nemlich, wenn z. B. die Gleichung* $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o$ *gegeben ist, so lässt sich daraus* $\frac{dy}{dx}$ *in* x *und* y *z. B.* $\frac{dy}{dx} = f'(x, y)$ *finden. Nimmt man hiervon die erste Ableitung, so erhält man eine Gleichung von der Form* $\frac{d^2y}{dx^2} = f''\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$. *In diese Gleichung kann man den Werth von* $\frac{dy}{dx}$ *aus der vorigen Gleichung* $\frac{dy}{dx} = f'x, y$ *substituiren, so erhält man eine Gleichung von der Form* $\frac{d^2y}{dx^2} = f'''(x, y)$, *also* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *blos in* x *und* y *ausgedrückt. Nimmt man zweimal die Ableitung von* $\frac{dy}{dx} = f'(x, y)$, *so erhält man eine Gleichung von der Form* $\frac{d^3y}{dx^3} = f^{IV}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$. *In*

der Constanten.

diese Gleichung kann man aus $\frac{dy}{dx} = f'(x, y)$ *und* $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x, y)$ *die Werthe von* $\frac{dy}{dx}$ *und* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *substituiren, so erhält man auch* $\frac{d^3y}{dx^3}$ *blos durch* x *und* y *ausgedrückt u. s. w. Da nun für* $x = o$ *die Grössen* $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots$ *in* $\frac{doy}{dx}, \frac{d^2oy}{dx^2} \ldots\ldots$ *übergehen und von* x *und* y *blos* oy *bleibt, so folgt nun, dass man* $\frac{doy}{dx}, \frac{d^2oy}{dx^2}$ *etc. blos durch* oy *ausgedrückt erhält.*]

Eben so findet man, wenn zur Bestimmung von y nur eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ gegeben wäre, der Reihe nach, die Ableitungs-Gleichung höherer Ordnung, zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^3}$, zwischen y, dy, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ und $\frac{d^4y}{dx^4}$ u. s. w. und vermittelst der allmäligen Substitution der aus den jedesmal vorher gehenden Gleichungen genommenen Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ *etc.* zuletzt $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ *etc.* in x, y und $\frac{dy}{dx}$, so dass man für $x = o$ die Werthe von $\frac{d^2oy}{dx^2}$, $\frac{d^3oy}{dx^3}$ *etc.* in oy und $\frac{doy}{dx}$ erhält, welche beide Grössen unbestimmt bleiben u. s. w. [*auf eine ähnliche Art wie oben.*]

Werthe der

Substituirt man nun alles dieses [*nemlich die Werthe von* $\frac{doy}{dx}$, $\frac{d^2oy}{dx^2}$, $\frac{d^3oy}{dx^3}$] in den obigen allgemeinen Ausdruck von y durch x, so ist klar, dass in diesem Ausdrucke eine Constante oy unbestimmt bleibt, im Fall die Function y durch eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung gegeben ist, zwei Constanten oy und $\frac{doy}{dx}$, wenn y durch eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung gegeben ist; drei, nemlich oy, $\frac{doy}{dx}$ und $\frac{d^2oy}{dx^2}$, wenn y durch eine Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung gegeben ist u. s. w.

Der Ausdruck von y durch x enthält also nothwendig immer eben so viele unbestimmte Constanten, als der Exponent der Ordnungs-Zahl der Gleichung, welche die Function von y bestimmt, Einheiten. Obgleich sich dieser Beweis auf die Theorie der Reihen gründet, so ist doch leicht zu sehen, dass er allgemein Statt findet, welches auch der Ausdruck für y seyn mag, weil man immer eine Reihe als die Entwickelung eines endlichen Ausdrucks betrachten kann [*obgleich sich der letztere nicht immer angeben lässt.*]

Werthe der Constanten.

143.

Die willkürlichen Constanten waren immer die Werthe der Grössen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = o$,

Constanten.

statt dass sie, wenn man, wie oben, die Ableitungs-Gleichungen als die Resultate der Elimination der Constanten betrachtet, beliebige Werthe haben können. Aber es ist leicht, Eins auf das Andere zu bringen. Denn, welches auch die in dem Ausdruck von y vorkommenden Constanten seyn mögen, so kann man doch immer, wenn man daraus die Ausdrücke von $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x}$ *etc.* entwickelt und $x = o$ setzt, wodurch $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ in $oy, \frac{doy}{dx}, \frac{d^2oy}{dx^2} \ldots$ übergehen, wenn man so viele Werthe dieser Grössen nimmt, als Constanten vorhanden sind, letztere durch $oy, \frac{doy}{dx}, \frac{d^2oy}{dx^2}$ *etc.* ausdrücken und sie alsdann in den allgemeinen Ausdruck von y substituiren. [*In der That sind die Werthe der Grössen* $oy, \frac{doy}{dx}, \frac{d^2oy}{dx^2} \ldots$ *nicht weniger unbestimmt, als die Constanten selbst, weil letztere in ihren Ausdrücken vorkommen, weshalb auch die willkürlichen Constanten, wie so eben gezeigt, durch die Grössen* $oy, \frac{doy}{dx}, \frac{d^2oy}{dx^2} \ldots$ *ausgedrückt werden können.*]

Welches nun auch die Form des Ausdrucks von y, oder der Gleichung, von welcher derselbe abhängt, in Rücksicht der verschiedenen darin enthaltenen Consten seyn mag, so ist doch klar, dass wenn die Constanten auf die Werthe von $oy, \frac{doy}{dx}, \frac{d^2oy}{dx^2} \ldots$

Werthe der Constanten.

gebracht werden, die Form für die nemliche Gleichung nur die nemliche seyn kann.

144.

Es folgt also, dass wenn man zu einer Ableitungs-Gleichung irgend einer Ordnung, auf irgend eine Weise, eine ihr entsprechende Gleichung zwischen den nemlichen veränderlichen Grössen gefunden hat, die so viele willkürliche Constanten enthält, als der Ordnungs-Exponent der Ableitungs-Gleichung Einheiten; dass dann diese Gleichung die Urgleichung der gegebenen ist, und zwar in ihrer vollen Allgemeinheit, so dass sie zugleich jede andere Gleichung, die mit eben so vielen willkürlichen Constanten der nemlichen Gleichung entspricht, in sich schliessen muss.

145.

Daraus sieht man, dass die willkürlichen Constanten wesentlich zur Verbindung der Stammgleichungen mit den Ableitungs-Gleichungen dienen. Letztere sind ihrer Natur nach allgemeiner, als erstere, wegen der Constanten, welche bei der Ableitung verschwanden, oder verschwinden können. Sie entsprechen also allen Stammgleichungen zugleich, die nur um den Werth der Constanten von einander verschieden sind.

Man kann also auch allezeit von einer Stammgleichung zu einer ihrer Ableitungs-Gleichungen irgend einer Ordnung gelangen, und von dieser zu ei-

ner neuen Stammgleichung zurückkehren, in so fern nur durch die letzte Operation wieder die nöthige Zahl von Constanten eingeführt wird. Die rückwärts gefundene Gleichung muss alsdann die gegebene enthalten und in sie übergehen, wenn man die willkürlichen Constanten danach gehörig bestimmt. So wurde in der vorigen Vorlesung bei der Umformung der Winkel-Functionen verfahren.

Zahl der Stammgleichungen.

146.

Da eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, wie wir sahen, aus zwei verschiedenen Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung, die jede eine willkürliche Constante enthält, entstehen kann; eine Gleichung dritter Ordnung aus drei verschiedenen Gleichungen zweiter Ordnung u. s. w., so folgt, dass, umgekehrt, jede Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung zwei Stammgleichungen erster Ordnung hat, jede mit einer neuen willkürlichen Constante, jede Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung drei Stammgleichungen zweiter Ordnung, jede mit einer neuen willkürlichen Constante u. s. w. Dieser Satz lässt sich aber auch direct auf eine der obigen ähnliche Art beweisen.

Man betrachte nemlich die allgemeine Entwikkelungs-Formel

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots .$$

Zahl der

Man setze in dieselbe $fx = y$ und $k = -x$, so erhält

$$fx = y,\ \frac{dfx}{dx} = \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2fx}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots$$

und $f(x+k) = f(x-x)$, das heisst, gleich dem Werthe von fx, oder y, für $x = o$, welchen Werth wir oben durch oy bezeichneten. Also ist

$$oy = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} \ldots\ldots$$

Nun setze man in den allgemeinen Ausdruck $\frac{dfx}{dx}$ statt fx, so erhält man, eben so,

$$\frac{df(x+k)}{dx} = \frac{dfx}{dx} + k\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^2}{2}\frac{d^3fx}{dx^3} \ldots\ldots$$

Setzt man von Neuem $fx = y$, $\frac{dfx}{dx} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ *etc.* und $k = -x$, so erhält man zuerst $\frac{df(x+k)}{dx} = \frac{df(x-x)}{dx}$, welches der Werth von $\frac{dfx}{dx}$, oder von $\frac{dy}{dx}$ für $x = o$ ist, welchen wir oben durch $\frac{doy}{dx}$ bezeichneten; also:

$$\frac{doy}{dx} = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^4y}{dx^4} \ldots\ldots$$

Eben so findet man:

$$\frac{d^2oy}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{x^2}{2}\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^5y}{dx^5} \ldots\ldots$$

u. s. w.

Ist

Stammgleichungen.

Ist nun y durch eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung gegeben, so findet man daraus die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ wie wir oben sahen, ganz in x und y. Substituirt man sie in den Ausdruck

$$oy = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}\ldots,$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y und der willkürlichen Constante oy.

Ist y durch eine Gleichung zweiter Ordnung gegeben, so erhält man $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ in x, y und $\frac{dy}{dx}$. Substituirt man sie in die beiden Ausdrücke

$$oy = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}\ldots.$$

und

$$\frac{doy}{dx} = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{x^3}{2.3}\frac{d^4y}{dx^4}\ldots.$$

so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, jede mit einer der beiden Constanten oy und $\frac{doy}{dx}$, welche beide Stammgleichungen der ersten Ordnung von der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung sind u. s. w.

Obgleich obige Ausdrücke Reihen sind, so sind dennoch die Schlüsse, welche daraus in Betreff der

Von der

Stammgleichungen folgen, nicht weniger strenge, uud es folgt aus der Form der Gleichungen, dass sie wesentlich von einander verschieden sind und zugleich, dass deren nicht mehrere Statt finden können, als die Ordnungs-Exponenten der Gleichungen Einheiten haben.

Von der Urgleichung.

147.

Es folgt also auch, dass wenn man z. B. für eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, auf irgend eine Weise, zwei von einander verschiedene Gleichungen erster Ordnung hätte, die der gegebenen entsprechen und jede eine willkürliche Constante mehr enthalten als sie, dass diese beiden Gleichungen dann die beiden Stammgleichungen erster Ordnung von der gegebenen seyn würden und dass jede andere Gleichung der nemlichen Ordnung, die ihr, mit einer willkürlichen Constante, genugthut, nothwendig in jenen einschliesslich enthalten seyn muss.

Sobald die Stammgleichungen gefunden sind, kann man daraus die absolute Stammgleichung oder Urgleichung ohne Ableitungen finden, wenn man zwischen ihnen die Ableitungen, welche sie enthalten und welche in beiden vorkommen, wegschafft. Da die auf diese Weise entstehende Gleichung keine Ableitung mehr enthält, so ist sie die Urgleichung der gegebenen zweiter Ordnung, und weil die beiden willkürlichen Constanten der Stammgleichungen erster

Urgleichung.

Ordnung darin vorkommen, so hat sie die volle Allgemeinheit, deren sie fähig ist.

Wenn also eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung gegeben ist, so findet man ihre Urgleichung, wenn man entweder unmittelbar, eine der gegebenen entsprechende Gleichung zwischen den nemlichen veränderlichen Grössen hat, die zwei neue willkürliche Constanten enthält, oder, wenn man einzeln zwei Gleichungen erster Ordnung, jede mit einer neuen willkürlichen Constante hat, die der gegebenen genugthun.

Enthielte aber eine der beiden Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung keine neue willkürliche Constante, so würde die daraus entstehende Urgleichung, weil sie dann nur eine neue willkürliche Constante enthielte, nicht so allgemein seyn, als es möglich ist; gleichwohl würde sie allemal der Gleichung zweiter Ordnung genugthun, so wie auch zugleich den beiden Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung.

Es folgt hieraus auch noch, dass wenn man eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung hat und man findet daraus auf irgend eine Weise eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, indem man entweder eine Constante eliminirt oder nicht, und man geht ferner von dieser Gleichung [*zweiter Ordnung*] zu einer andern Stammgleichung erster Ordnung mit einer neuen willkürlichen Constante zurück; dass man dann, mittelst der Wegschaffung der Ableitung zwischen den beiden Ableitungs-Gleichungen erster Ord-

nung, eine Gleichung finden kann, welche die beiden veränderlichen Grössen und die willkürlichen Constanten enthält, und welche folglich die absolute Stammgleichung oder Urgleichung der gegebenen erster Ordnung ist. [*Es sey z. B. die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung du zwischen x, y und* $\frac{dy}{dx}$ *gegeben. Man leite daraus auf irgend eine Weise eine Gleichung zweiter Ordnung* d^2u *ab, welches allemal angeht. Zu dieser suche man rückwärts eine erste Stammgleichung du′ mit einer neuen Constante, so hat man nun zwei Gleichungen du und du′ erster Ordnung zwischen x, y und* $\frac{dy}{dx}$. *Eliminirt man zwischen denselben* $\frac{dy}{dx}$, *so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche die vollständige Stammgleichung der gegebenen ist, weil sie eine Constante mehr enthält, als diese. Hierdurch lässt sich zuweilen die Zurückleitung einer gegebenen Gleichung erleichtern, in so fern es nemlich etwa leichter ist, die Stammgleichung von* d^2u, *also von du zu finden.*]

Man kann allgemein, wenn man von einer gegebenen Gleichung erster Ordnung zu einer Ableitungs-Gleichung höherer Ordnung hinaufsteigt, und dann von dieser wieder auf irgend eine Weise zu einer Stammgleichung niedrigerer Ordnung mit einer willkürlichen Constante zurückkehrt, immer, durch allmälige Wegschaffung der Ableitungen, zu einer

Urgleichung.

Gleichung zwischen den beiden veränderlichen Grössen und den willkürlichen Constanten gelangen, welche die Stammgleichung der gegebenen ist.

Endlich lässt sich auch, was hier von den Ableitungs-Gleichungen der zweiten Ordnung gesagt, worden, auf Gleichungen höherer Ordnungen anwenden, und es lassen sich daraus ähnliche Folgerungen ziehen.

Zurückleitende

Dreizehnte Vorlesung.

(Fortsetzung der Vorigen.)

Theorie der zurückleitenden Multiplicatoren.

148.

Die nächste Art, die Urgleichung zu einer gegebenen Ableitungs-Gleichung [*zwischen zwei veränderlichen Grössen*] irgend einer Ordnung zu finden, ist, die Gleichung so zu verwandeln, dass ihr erstes Glied eine vollständige Ableitung ist; denn alsdann darf man, um die vollständige Stammgleichung einer um Eins niedrigern Ordnung zu finden, von jenem Gliede nur die Stammgrösse nehmen und eine willkürliche Constante hinzufügen. Wiederholt man das Verfahren, so kann man zu der Urgleichung zwischen den beiden veränderlichen Grössen gelangen, die so viele willkürliche neue Constanten enthält, als der Ordnungs-Exponent der gegebenen Gleichung Einheiten.

Multiplicatoren.

149.

Wir wollen nun zeigen, dass eine solche Verwandlung immer vermittelst eines **Multiplicators** möglich ist, sobald man nur die gegebene Ableitungs-Gleichung der *n*ten Ordnung auf die Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

gebracht hat.

Dass diese vorläufige Verwandlung immer, entweder wirklich möglich, oder wenigstens als möglich anzunehmen sey, von welcher Gestalt auch die gegebene Gleichung seyn mag, ist klar, weil man nur aus der gegebenen Gleichung, nach bekannten [*algebraischen*] Regeln, den Werth von $\frac{d^n y}{dx^n}$ in $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \ldots$ entwickeln darf.

Nun bemerkten wir schon oben, dass man, welches auch die Stammgleichung [*der gegebenen Ableitungs-Gleichung*] von der um Eins niedrigern Ordnung seyn mag, allemal, sobald man die willkürlichen Constanten absondert, und alsdann die Ableitungen nimmt, zu einer Ableitungs-Gleichung gelangen kann, in welcher die Ableitung der höchsten Ordnung nur in einer Abmessung vorkommt und welche der gegebenen identisch gleich seyn muss.

Stellt man sich also die [*vorausgesetzte, noch unbekannte*] Stammgleichung [*der gegebenen*] auf die Form

Zurückleitende

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = a$$

gebracht vor, wo a die willkürliche Constante ist, so erhält man [*wenn man, der Kürze wegen*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = u$$

setzt, so dass

$$u = a$$

ist, und dann die Ableitungen nimmt] folgende abgeleitete Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

welche Gleichung, wenn man denjenigen Theil davon absondert, der sich auf die Veränderung von $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ bezieht, auf die Form

$$\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)}{dx} + \frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

gebracht werden kann, woraus

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)}{dx} : \frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} = 0$$

folgt.

Da die willkürliche Constante a verschwunden

ist, so muss diese Gleichung der gegebenen [*Ableitungs - Gleichung n ter Ordnung* $\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0$] identisch gleich seyn, denn der Werth von $\frac{d^n y}{dx^n}$ ist nothwendig der nemliche in beiden Gleichungen. Also ist, identisch,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) =$$

$$\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)}{dx} : \frac{du}{d\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}}.$$

Addirt man auf beiden Seiten $\frac{d^n y}{dx^n}$, so erhält man

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) =$$

$$\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right) + \frac{d^n y}{dx^n} \cdot \frac{du}{d\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}}}{\frac{du}{d\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}}},$$

oder [*weil der Zähler im zweiten Theile dieser Gleichung die vollständige erste Ableitung von u ist*]

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}}.$$

Multiplicirt man also die gegebene Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(y, \frac{d}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

mit der Function $\frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$, so erhält man $\frac{du}{dx}$, so, dass das zweite Glied der entstehenden Gleichung eine vollständige Ableitung ist.

[*Dieses lässt sich auch, wie folgt, fassen. Die gegebene Ableitungs-Gleichung nter Ordnung, sey auf die Gestalt*

$$v = \frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

gebracht und ihre erste Stammgleichung, die noch unbekannt ist, sey $u = a$, *so dass*

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

ist, so ist, wenn man die erste Ableitung von $u = a$ *nimmt,*

$$\frac{du}{dx} = dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right) + \frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

Multiplicatoren.

Diese erste abgeleitete Gleichung muss, weil darin die Constante a nicht mehr vorkommt, genau die gegebene Gleichung $v = 0$ *enthalten, das heisst, sie muss genau denselben Werth von* $\frac{d^n y}{dx^n}$ *geben. Also muss, weil in* $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ *noch mit* $\frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$ *multiplicirt ist,*

$$\frac{du}{dx} = v . \frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$$

seyn, das heisst: man erhält eine vollständige Ableitung, wenn man die gegebene Gleichung $v = 0$ *mit* $\frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$ *multiplicirt.*]

Es existirt also immer eine Grösse von einer um Eins niedrigern Ordnung, als die gegebene Gleichung, die die gegebene Gleichung, wenn man sie damit multiplicirt, zu einer vollständigen abgeleiteten macht. [*Die Grösse* $\frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$ *nemlich ist, wie leicht zu sehen, nur von der Ordnung* $n-1$, *während die gegebene Gleichung* $v = 0$ *von der nten Ordnung ist.*]

Zurückleitende

150.

Da dieser Satz fundamental ist und bedeutende Folgerungen darauf beruhen, so wollen wir ihn aus einem, noch ein wenig umfassenderen Gesichts-Puncte betrachten.

Es sey

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, a\right) = u = 0$$

die [*noch unbekannte*] Stammgleichung der obigen Ableitungs-Gleichung

$$v = \frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

wo a die willkürliche Constante bedeutet.

Nach der allgemeinen Theorie erhält man die Ableitungs-Gleichung aus der vorausgesetzten Stammgleichung, wenn man a zwischen der Gleichung

$$u = 0$$

und ihrer ersten abgeleiteten

$$\frac{du}{dx} = 0$$

eliminirt, wobei a als constant betrachtet wird.

Hieraus folgt, wie oben, dass die Functionen

$$v = \frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

und

$$\frac{du}{dx} : \frac{du}{d\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$$

Multiplicatoren.

identisch gleich seyn müssen, wenn man statt a seinen, aus der Stammgleichung $u = 0$ genommenen Werth in $x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ substituirt. [*Wenn man sich a aus der Gleichung u = o zuvor entwickelt, vorstellt, so geht die Rechnung in die obige über.*]

Man betrachte also wirklich a als eine, durch die Stammgleichung $u = 0$ bestimmte Function, so hat man zur Bestimmung von $\frac{da}{dx}$ die Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$, welche, wenn man absondert, was sich auf a bezieht,

$$\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$$

giebt, woraus

$$-\frac{da}{dx} = \frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx} : \frac{du}{da}$$

$$= \left(\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right) \frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} : \frac{du}{da}$$

folgt [*weil* $F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ *das obige u ist,*

und daselbst $\frac{du}{dx} = \frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx} =$

Zurückleitende

$$v.\frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}=\left(\frac{d^ny}{dx^n}+f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\cdots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right)\frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$$

war], welche Gleichung zu einer identischen wird, [*in welcher sich Alles aufhebt*,] wenn man statt *a* seinen Werth in x, y *etc.* setzt.

Man sieht also, dass wenn man die Gleichung

$$v=\frac{d^ny}{dx^n}+f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\cdots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0$$

mit $\frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}:\frac{du}{da}$ multiplicirt, ihr erstes Glied zu

einer vollständigen ersten Ableitung $\left[-\frac{da}{dx}\right]$ wird, deren Stammgrösse $-a$ ist, wenn man a als aus der Gleichung

$$u=F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\cdots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},a\right)=0$$

entwickelt betrachtet.

Hierin liegt der Beweis, dass immer ein Multiplicator existirt, welcher das erste Glied einer gegebenen Gleichung zu einer vollständigen Ableitung macht.

151.

Die nemliche identische Gleichung zeigt auch, dass der obige Multiplicator nicht der einzige ist, der die angezeigte Eigenschaft hat. Sie enthält zugleich

Multiplicatoren.

das Mittel, alle die verschiedenen Multiplicatoren zu finden, welche die nemliche Eigenschaft haben. Denn es ist klar, dass, weil das erste Glied der Gleichung $-\frac{da}{dx}$ ist, auch dann eine vollständige Ableitung entsteht, wenn man solches noch mit irgend einer Function von a multiplicirt, dass aber nur dann eine vollständige Ableitung entsteht, wenn der Multiplicator nur a enthält. Das zweite Glied ist also auch dann noch eine vollständige Ableitung, wenn man es noch mit irgend einer Function von a multiplicirt.

Hieraus folgt, dass der allgemeine Ausdruck des Multiplicators [*nicht blos* $\frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} : \frac{du}{da}$, *wie oben, sondern vielmehr*]

$$\varphi a . \frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} : \frac{du}{da}$$

ist, wo φa irgend eine Function von a bedeutet, a aber durch die Gleichung

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, a\right) = 0$$

bestimmt wird, in welcher a die willkürliche Constante ist; denn multiplicirt man das erste Glied [v] der gegebenen Gleichung nter Ordnung [$v = 0$] mit

Zurückleitende

deren Ausdruck $\left[\varphi a \frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} : \frac{du}{da}\right]$, so erhält man $\Big[$*vermöge der obigen Gleichung* $\Big(v = \frac{d^n y}{dx^n}$

$$+ f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\Big) \frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} : \frac{du}{da} = -\frac{da}{dx}\Big]$$

einen Ausdruck, welcher der Grösse $-\frac{da}{dx} \cdot \varphi a$ gleich ist. Bezeichnet man nun die Stammgrösse von $-\varphi a \frac{da}{dx}$ durch Ψa, so erhält man auf der Stelle die Stammgleichung

$$\Psi a = const.$$

[*nemlich, weil* $v = 0$ *und also* $-\varphi a \frac{da}{dx}$, *welches gleich* $\varphi a . v . \frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} : \frac{du}{da}$ *war, gleich Null ist*]

woraus folgt:

$$a = const.$$

Nun ist hier a die Function von $x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, welche aus der Gleichung $u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, a\right) = 0$ gefunden wird; also ist offenbar $\Psi a = const.$ nichts anders als diese Gleichung selbst, wenn man darin a als eine willkürliche Constante betrachtet.

Sobald

Multiplicatoren.

Sobald also eine Ableitungs-Gleichung der *n* ten Ordnung auf die Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

gebracht ist, so folgen aus der dazu gehörigen Stammgleichung $n-1$ ter Ordnung, mit einer neuen willkürlichen Constante, eine unendliche Zahl von Multiplicatoren, die alle in einem und dem nemlichen Ausdrucke enthalten sind, und durch welche alle das erste Glied der gegebenen Gleichung zu einer vollständigen Ableitung gemacht werden und die nemliche Stammgleichung wieder gefunden werden kann.

152.

Ist die gegebene Gleichung nur von der ersten Ordnung, so giebt es nur eine einzige Stammgleichung und folglich nur einen Ausdruck der zurückleitenden Multiplicatoren.

Ist die gegebene Gleichung von der zweiten Ordnung, so existiren, wie wir gezeigt haben, zwei verschiedene Stammgleichungen erster Ordnung. Jede giebt einen besondern Ausdruck für die Multiplicatoren. Man kann aber auch diese zwei Ausdrücke in einen noch allgemeineren Ausdruck zusammenfassen.

Denn es sey z. B.

$$v = \frac{d^2 y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

die gegebene Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung. Ihre zwei Stammgleichungen erster Ordnung mögen

. Zurückleitende

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0 \text{ und } w = F'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, b\right) = 0$$

seyn, wo *a* und *b* die beiden willkürlichen Constanten sind.

Betrachtet man diese Grössen *a* und *b* als Functionen von x, y und $\frac{dy}{dx}$, wie sie aus den nemlichen Gleichungen folgen, so erhält man, dem Obigen zu Folge, die beiden identischen Gleichungen

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right)\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} : \frac{du}{da} = -\frac{da}{dx}$$

und

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right)\frac{dw}{d\frac{dy}{dx}} : \frac{dw}{db} = -\frac{db}{dx}.$$

Nun sey $\varphi(a, b)$ irgend eine Function von *a* und *b*, so ist ihre erste Ableitung $\frac{d\varphi(a, b)}{dx} = \frac{d\varphi(a, b)}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{d\varphi(a, b)}{db} \cdot \frac{db}{dx}$. Multiplicirt man also die beiden obigen Gleichungen, die erste mit $\frac{d\varphi(a, b)}{da}$, die andere mit $\frac{d\varphi(a, b)}{db}$ und addirt die Producte, so erhält man

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right)$$

$$\times\left(\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d\varphi(a,b)}{da} : \frac{du}{da} + \frac{dw}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d\varphi(a,b)}{db} : \frac{dw}{db}\right)$$

$$= -\frac{d\varphi(a, b)}{dx}.$$

Multiplicatoren.

Man erhält also für den zurückleitenden Multiplicator der gegebenen Ableitungs-Gleichung den allgemeinen Ausdruck

$$\frac{\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d\varphi(a, b)}{da}}{\frac{du}{da}} + \frac{\frac{dw}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d\varphi(a, b)}{db}}{\frac{dw}{db}},$$

worin a und b die nemlichen Grössen sind, welche durch die beiden Gleichungen

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0 \text{ und } w = F'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, b\right) = 0$$

bestimmt werden. Das erste Glied der gegebenen Gleichung $v = 0$ giebt dann, wenn man multiplicirt, $-\frac{d\varphi(a, b)}{dx} = 0$, so dass man auf der Stelle die Stammgleichung

$$\varphi(a, b) = Const.$$

erhält.

Nimmt man eine andere beliebige Function von a und b, z. B. $\Psi(a, b)$ an, so erhält man, auf dieselbe Weise

$$\Psi(a, b) = Const.$$

Diese beiden Gleichungen geben also für a und b Constanten, was auch die durch φ und Ψ bezeichnete Abhängigkeits-Formen seyn mögen, so dass man also zu den nemlichen Stammgleichungen zurückkommt, von welchen man ausging. Man sieht daraus, wie diese Gleichungen von den willkürlichen Functionen in den Multiplicatoren unabhängig seyn können.

Zurückleitende

Man kann diese Theorie auf Ableitungs-Gleichungen höherer Ordnung ausdehnen und dafür ähnliche Sätze aufstellen.

153.

Es lässt sich also allemal die Form der Multiplicatoren finden, wenn man die Stammgleichungen kennt. Da diese Multiplicatoren ein Mittel sind, zu den Stammgleichungen zu gelangen, so wäre es sehr wichtig, dass man sie a posteriori aus den Ableitungs-Gleichungen finden könnte. Euler und Andere nach Ihm haben sich mit dieser Aufgabe beschäftigt. Sie ist aber eine von denen, von welchen kaum eine allgemeine Auflösung zu hoffen ist. [*In diesem schönen Vortrage der Theorie der zurückleitenden Multiplicatoren zeigt sich wieder die ganze Gewandtheit der Lagrangischen Analyse und die Vortheile einer allgemeinen und umfassenden, sich frei bewegenden Behandlung.*]

154.

[*Beispiel.*] Um ein Beispiel zu geben, wollen wir die obige Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$$

nehmen. Ich bemerke zunächst, dass ihr erstes Glied, in der gegebenen Form, schon eine erste Ableitung ist; denn weil

$$\frac{d\left(x\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}$$

ist, so ist

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(x\frac{dy}{dx}\right)}{dx} - \frac{dy}{dx},$$

so dass man also die gegebene Gleichung [*wenn man* $\frac{dy}{dx}$ *abzieht*] auf die Form

$$\frac{d\left(x\frac{dy}{dx}\right)}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 0$$

bringen kann, woraus auf der Stelle

$$x\frac{dy}{dx} - 2y + A = 0$$

folgt, wo A eine willkürliche Constante ist.

Um aber weiter von dieser Gleichung die Stammgleichung zu finden, will ich einen zurückleitenden Multiplicator suchen, durch welchen das erste Glied zu einer vollständigen Ableitung gemacht werden kann. Es ist leicht, zu sehen, dass solches geschieht, wenn man die Gleichung durch x^3 dividirt, so dass also der gesuchte Multiplicator $\frac{1}{x^3}$ ist. Denn die Gleichung geht, wenn man mit $\frac{1}{x^3}$ multiplicirt, in die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} : x^2 - \frac{2y}{x^3} + \frac{A}{x^3} = 0$$

über, deren erster Theil $\frac{y}{x^2} - \frac{A}{2x^2}$ zur Stammgrösse hat, so dass also die Stammgleichung

$$\frac{y}{x^2} - \frac{A}{2x^2} + B = 0,$$

Zurückleitende

oder, wenn man mit x^2 multiplicirt,

$$y - \tfrac{1}{2}A + Bx^2 = 0$$

ist, wo B die neue Constante bedeutet.

Da diese Gleichung zwei neue willkürliche Constanten A und B enthält, so muss sie die vollständige Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung seyn. In der That kommt sie mit der Gleichung

$$x^2 - 2ay + a^2 + b = 0,$$

von welcher die gegebene abgeleitet war, überein: man darf selbige nur mit B dividiren und

$$B = -\frac{1}{2a}, \quad -\frac{A}{2B} = a^2 + b$$

setzen.

Statt aber die Stammgleichung von der Stammgleichung erster Ordnung, wie hier geschahe, zu suchen, kann man auch von der gegebenen noch eine andere Stammgleichung suchen. Zu dem Ende bemerke ich, dass die erste Ableitung der Grösse

$$x^m \left(\frac{dy}{dx}\right)^n,$$

$$= m x^{m-1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + n x^m \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= x^{m-1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} \left(m \frac{dy}{dx} + n x \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

ist. Da nun die gegebene Gleichung

$$x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$$

war, so ist leicht zu sehen, dass ihr erster Theil, wenn man oben $n = 1$ und $m = -1$ setzt, zu einer vollständigen Ableitung wird, wenn man ihn mit x^{-2}, oder mit $\frac{1}{x^2}$ multiplicirt. [*Denn wenn man oben $n = 1$ und $m = -1$ setzt, so erhält man $x^{-2}\left(x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right)$, welche Grösse die erste Ableitung von $x^m\left(\frac{dy}{dx}\right)^n = x^{-1}\frac{dy}{dx}$ war. Nun war die gegebene Gleichung $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$. Der erste Theil derselben wird also zu einer vollständigen Ableitung, wenn man ihn mit x^{-2} multiplicirt und zwar zu der ersten Ableitung der Grösse $x^{-1}\frac{dy}{dx}$.*] Man erhält also die neue Stammgleichung

$$x^{-1}\frac{dy}{dx} + B = 0.$$

Verbindet man dieselbe mit der oben gefundenen Gleichung

$$x\frac{dy}{dx} - 2y + A = 0$$

dadurch, dass man zwischen den beiden Gleichnngen $\frac{dy}{dx}$ wegschafft, so erhält man [*weil die erste Gleichung $\frac{dy}{dx} = -Bx$ giebt*] folgende Gleichung zwischen x und y:

$$-Bx^2 - 2y + A = 0,$$

Zurückleitende Multiplicatoren.

die, weil sie zwei willkürliche Constanten A und B enthält, ebenfalls die vollständige Urgleichung der gegebenen ist. Sie nimmt in der That ebenfalls die Form

$$x^2 - 2ay + a^2 + b = 0$$

an, wenn man sie durch $-B$ dividirt, und

$$\frac{1}{B} = -a \text{ und } -\frac{A}{B} = a^2 + b$$

setzt.

Vierzehnte Vorlesung.

Von den singulairen Ausdrücken zu gegebenen Ableitungs-Gleichungen, welche in ihren Stammgleichungen nicht enthalten sind. Theorie der singulairen Stammgleichungen.

155.

Der Theorie der Ableitungs-Gleichungen in der zwölften Vorlesung zu Folge sollte man glauben, dass alle Ausdrücke, die einer gegebenen Ableitungs-Gleichung genugthun, in ihrer Stammgleichung enthalten seyn müssen, sobald dieselbe durch die willkürlichen Constanten, welche darin vorkommen können, die volle Allgemeinheit erhalten hat, deren sie fähig ist. Gleichwohl giebt es Ableitungs-Gleichungen, welche Ausdrücken genugthun, die in den Stammgleichungen nicht mit inbegriffen sind. Ich will dergleichen Ausdrücke **singulaire** nennen.

Die Analysten bemerkten sie fast seit der Entdeckung der Infinitesimal-Rechnung; allein da die Theorie der willkürlichen Constanten damals noch

unvollkommen war, so hat man die Ausdrücke nicht sogleich als Ausnahmen von den allgemeinen Ausdrücken der Differential-Rechnung erkannt. Euler ist der Erste, der solches bemerkte und Regeln gab, sie von den gewöhnlichen Integralen zu unterscheiden.

Späterhin sahe man, dass sie von der allgemeinen Theorie der Differential- oder Ableitungs-Gleichungen abhängen und diese Gleichungen vervollständigen. Diesen Umstand wollen wir so ausführlich vortragen, wie es die Wichtigkeit des Gegenstandes erfordert.

156.

Man nehme irgend eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, z. B.

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

an, und setze, sie sey aus der Stammgleichung

$$u = F(x, y, a) = 0$$

entstanden, in welcher a die willkürliche Constante bedeutet.

Nach der allgemeinen Theorie ist die abgeleitete Gleichung von $u = 0$,

$$\frac{d(u)}{dx} = 0, \text{ oder } \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Die Verbindung der beiden Gleichungen [$u = 0$ *und* $\frac{d(u)}{dx} = 0$] durch Wegschaffung der Constante a giebt die Gleichung

Stammgleichungen.

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Nun ist klar, dass das Resultat der Wegschaffung von a nothwendig das nemliche bleibt, a mag eine constante oder veränderliche Grösse bedeuten, wenn nur die beiden Gleichungen

$$u = 0 \text{ und } \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

die nemlichen sind. Die Gleichung $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ kann also auch aus der Gleichung $u = F(x, y, a) = 0$ entstehen, wenn a veränderlich und eine Function von x ist, so lange nur die, von $u = 0$ abgeleitete Gleichung $\frac{d(u)}{dx} = 0$, nichts anders als

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

ist.

Betrachtet man nun a wirklich als eine Function von x, so erhält man

$$\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx}.$$

Die nothwendige Bedingung [*dass* $\frac{d(u)}{dx} = 0$ *den nemlichen Werth hat, a mag constant, oder veränderlich seyn*] wird also erfüllt, sobald

$$\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$$

ist, woraus folgt, dass der aus der Stammgleichung $u = 0$ folgende Werth von y auch dann noch der

Von den singulairen

Ableitungs-Gleichung erster Ordnung $v = o$ entspricht, wenn man für a eine Function von x setzt, die der Gleichung

$$\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = o$$

genugthut.

Diese Gleichung giebt

$$\frac{da}{dx} = o \text{ und } \frac{du}{da} = o.$$

Die Gleichung $\frac{da}{dx} = o$ giebt $a = Const.$, welches der Fall der gewöhnlichen Stammgleichungen ist, in welchem a eine beständige Grösse bedeutet.

Aber die andere Gleichung $\frac{du}{da} = o$, in welcher $\frac{du}{da}$ eine Function von x, y und a ist, giebt, wenn man sie auflöset, für a einen Ausdruck in x und y. Setzt man diesen Werth von a in die Stammgleichung $u = F(x, y, a) = o$, so erhält man eine neue Gleichung zwischen x und y, ohne willkürliche Constante, welche ebenfalls der nemlichen gegebenen Ableitungs-Gleichung $v = o$ genugthut, aber nothwendig von der gewöhnlichen Stammgleichung verschieden ist, weil in dieser a constant, in jener eine Function von x und y ist.

Ueberhaupt also erhält man, wenn man a zwischen den beiden Gleichungen

$$u = F(x, y, a) = o \text{ und } \frac{du}{da} = o$$

eliminirt, eine Gleichung für diejenigen singulairen Werthe von y, welche der Ableitungs-Gleichung

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

von welcher

$$u = F(x, y, a) = 0$$

die gewöhnliche Stammgleichung ist, genugthun können.

[*Der Fall singulairer Stammgleichungen ist also der, wenn die Constante a nicht mehr willkürlich ist, sondern einen bestimmten, aber veränderlichen, in x und y ausgedrückten Werth hat, von der Art, dass sich dadurch die Ableitung von u im Ganzen nicht verändert. Da hierdurch eine zweite Gleichung zwischen x, y und a entsteht, nemlich* $\frac{du}{da} = 0$, *so darf nur a zwischen den beiden Gleichungen* $u = 0$ *und* $\frac{du}{da} = 0$ *weggeschafft werden und es entsteht eine Gleichung zwischen x und y ohne a, welche denjenigen besondern Werth von y in x bestimmt, der dem singulairen Falle der Stammgleichung zukommt.*]

Wir wollen eine solche Gleichung singulaire Stammgleichung nennen, um sie von der gewöhnlichen Stammgleichung zu unterscheiden, die vollständige Stammgleichung heissen soll.

Von den singulairen

157.

Zu bemerken ist, dass die singulaire Stammgleichung, weil sie wesentlich die Eigenschaft hat, dass a veränderlich seyn muss, aufhört singulair seyn und blos in einen besondern Fall der gewöhnlichen Stammgleichung übergeht, sobald die Gleichung $\frac{du}{da} = 0$, welche den veränderlichen Werth von a bestimmt, für a entweder eine Constante, oder eine solche Function von x und y giebt, welche vermöge der Gleichung $u = 0$, in welche man den durch $\frac{du}{da} = 0$ bestimmten Werth von a substituiren muss, einer Constante gleich ist, oder welche bei dieser Substitution das nemliche Resultat hervorbringt, wie ein constanter Werth von a.

158.

[*Beispiel.*] Wir fanden in der zwölften Vorlesung, dass die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} \sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y \frac{dy}{dx} - x = 0$$

die Stammgleichung

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$$

hat, wo a eine willkürliche Constante ist. Setzt man also hier

$$u = F(x, y, a) = x^2 - 2ay - a^2 - b$$

und nimmt die Ableitungen aller Glieder nach a allein, so erhält man

Stammgleichungen.

$$\frac{du}{da} = -2y - 2a;$$

also giebt die Gleichung $\frac{du}{da} = 0$ hier

$$a = -y,$$

und dieser Werth von y in die Stammgleichung substituirt, giebt

$$x^2 + y^2 - b = 0,$$

welche Gleichung ebenfalls der gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung genugthut. Denn sie giebt

$$y^2 = b - x^2 \text{ und}$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x.$$

Setzt man Dieses in die gegebene Ableitungs-Gleichung $\frac{dy}{dx}\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y\frac{dy}{dx} - x = 0$, so wird derselben ebenfalls vollständig genuggethan. [*Denn da, vermöge der singulairen Gleichung,* $x^2 + y^2 - b = 0$ *ist, so bleibt von der gegebenen Ableitungs-Gleichung nur* $-y\frac{dy}{dx} - x = 0$ *übrig, welchem der Werth* $-y\frac{dy}{dx}$ *von* x *entspricht.*]

159.

Da bekanntlich, nach der Theorie der algebraischen Gleichungen, die Gleichung

$$\frac{du}{da} = 0,$$

die Bedingung der G l e i c h h e i t z w e i e r W u r z e l n

der Gleichung $u = 0$ ausdrückt, wenn man diese Gleichung nach a geordnet sich vorstellt, so folgt, dass der singulaire Werth von y für die Gleichung $u = 0$ die Eigenschaft hat, der Gleichung, nach a genommen, zwei gleiche Wurzeln zu geben.

Die Gleichung $a^2 + 2ay - x^2 + b = 0$ z. B. hat offenbar zwei gleiche Wurzeln, wenn man [*den aus der Gleichung für den singulairen Fall* $\frac{du}{da} = 0$ *folgenden obigen Werth von* y] $y^2 = b - x^2$ setzt; [*denn man erhält alsdann* $a^2 + 2ay + y^2 = 0$, *welches für* y *die beiden gleichen Werthe* $-a$ *giebt*].

160.

[*Beispiel.*] Wäre die Stammgleichung folgende:

$$(x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2ay) + (x^2 - b)a^2 = 0,$$

wo a eine willkürliche Constante bedeutet, so gäbe die Ableitung nach a:

$$-y(x^2 + y^2 - b) + (x^2 - b)a = 0,$$

woraus

$$a = \frac{y(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b}$$

folgt. Dieser Werth von a in die gegebene Gleichung $[(x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2ay) + (x^2 - b)a^2 = 0$, *oder* $\frac{y(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b}(y - 2a) + a^2 = 0]$ substituirt, giebt [$a(y - 2a) + a^2 = 0$, *oder* $y - 2a + a = 0$, *oder* $y - a = 0$, *oder* $y - \frac{y(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b} = 0$, *oder*

$y(x^2 -$

Stammgleichungen.

$$\frac{y(x^2-y-x^2-y^2+b)}{x^2-b}=0, \textit{ oder } -\frac{y^3}{x^2-b}=0.$$

Lagrange findet]

$$\frac{y^4(x^2+y^2-b)}{x^2-b}=0$$

und folglich für die singulaire Stammgleichung,

$$x^2+y^2-b=0.$$

Aber dieser Ausdruck giebt für a selbst Null, [*in der That giebt auch* $\frac{-y^3}{x^2-b}=0$, $y=0$ *und folglich, vermöge* $a=\frac{y(x^2+y^2-b)}{x^2-b}$, $a=0$] woraus folgt, dass derselbe nur ein besonderer Fall der Stammgleichung ist. Der Ausdruck folgt auch wirklich aus derselben, wenn man $a=0$ setzt [*denn die Stammgleichung* $(x^2+y^2-b)(y^2-2ay)+(x^2-b)a^2=0$ *giebt alsdann* $(x^2+y^2-b)y^2=0$, *oder* $x^2+y^2-b=0$.]

161.

Man kann auch diese, auf Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung sich beziehende Theorie, auf Ableitungs-Gleichungen höherer Ordnungen anwenden.

Es sey

$$u=F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, a\right)=0$$

die Stammgleichung der Ableitungs-Gleichung nter Ordnung

$$v=f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0,$$

Von den singulairen

wo a die willkürliche Constante bedeutet, so muss $v = o$ durch Wegschaffung der Grösse a zwischen der Stammgleichung $u = o$ und ihrer abgeleiteten $\frac{d(u)}{dx} = o$ gefunden werden können; und es ist klar, dass das Resultat dieser Elimination das nemliche seyn muss, die Grösse a mag constant oder veränderlich seyn, in so fern nur die beiden Gleichungen [$u = o$ *und* $\frac{d(u)}{dx} = o$] die nemlichen sind.

Die Stammgleichung $u = o$ ist immer in beiden Fällen die nemliche; ihre abgeleitete aber ist, wenn a eine Constante bedeutet,

$$\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx} = o,$$

und im Fall a irgend eine Function von x ist,

$$\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = o$$

Beide Gleichungen [*die Stammgleichung und die abgeleitete*] bleiben also die nemlichen, wenn man a so bestimmt, dass das Glied $\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx}$ verschwindet. Man setze also

$$\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = o,$$

so erhält man

$$\frac{da}{dx} = o$$

und folglich a gleich einer Constante, welches der gewöhnliche Fall ist. Sodann aber auch

$$\frac{du}{da} = 0,$$

welches einen Werth von a in x und y giebt, der, in die Stammgleichung

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, a\right) = 0$$

substituirt, eine Gleichung mit Ableitungen von der nemlichen Form giebt, die der Gleichung

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

ebenfalls genugthut, und also die singulaire Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung, ohne willkürliche Constante ist.

162.

[*Beispiel.*] Die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} : x + 1 = 0\,,$$

hat zur Stammgleichung erster Ordnung:

$$x^2 - 2a\frac{dy}{dx} + a^2 = 0,$$

wie man sich überzeugen kann, wenn man zwischen ihr und ihrer ersten abgeleiteten Gleichung $x - a\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, a wegschafft. [*Denn die abge-*

leitete Gleichung giebt $\frac{x}{a} = \frac{d^2y}{dx^2}$, *die Stammgleichung giebt* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2}{a}.\frac{dy}{dx} + 1 = 0$; *also ist* $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{db}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} : x + 1 = 0$, *wie oben.*]

Nimmt man von der Stammgleichung die Ableitung nach a, so erhält man

$$-\frac{dy}{dx} + a = 0,$$

woraus

$$a = \frac{dy}{dx}$$

folgt, welcher Werth von a, in die Stammgleichung substituirt,

$$x^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \pm x$$

giebt. Dieser Werth von $\frac{dy}{dx}$ thut auch der gegebenen Ableitungs-Gleichung $\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} : x + 1 = 0\right]$ genug [*denn er giebt* $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm 1$ *und folglich* $1 - 2 + 1 = 0$, *wie gehörig.*] Aber er ist ein singulairer Werth, weil ihn die Stammgleichung nicht mit in sich begreift.

Sucht man ferner die Stammgleichung der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$x^2 - 2a\frac{dy}{dx} + a^2 = 0,$$

so findet man

Stammgleichungen.

$$\tfrac{1}{3}x^3 - 2a + a^2x + b = 0,$$

wo b die neue willkürliche Constante ist.

Schafft man nun a zwischen diesen beiden letzten Gleichungen weg, so erhält man [*nach der nöthigen Rechnung*]

$$4x^2\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4(b - \tfrac{2}{3}x^3)\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+ (b - \tfrac{2}{3}x^3)^2 = 0,$$

welche Gleichung folglich die andere Stammgleichung erster Ordnung zu der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung $\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}:x + 1 = 0\right]$ ist.

Man kann nun auch zu dieser zweiten Stammgleichung eine singulaire Gleichung suchen, wenn man ihre Ableitung nach b nimmt, welches

$$-4\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + 2(b - \tfrac{2}{3}x^3) = 0$$

giebt, woraus

$$b = \tfrac{2}{3}x^3 + 2\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}$$

folgt. Substituirt man diesen Werth von b in die vorige Gleichung, so erhält man

$$4\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2\left(x^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = 0.$$

Diese Gleichung giebt folgende beide:

$$y - x\frac{dy}{dx} = 0 \text{ und } x^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Die erste entspricht der gegebenen nicht, denn sie giebt $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ und daraus $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} : x - \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2} - \frac{y}{x^2} = 0$. [*Es folgt daraus umgekehrt, wenn man die Stammgrössen nimmt,* $\frac{d}{dx} = Const. = a$, *welches das Nemliche ist, was man erhält, wenn man von der Stammgleichung* $x^2 - 2a\frac{dy}{dx} + a^2 = 0$ *die abgeleitete nach* a *nimmt; denn dieses giebt* $-\frac{dy}{dx} + a = 0$, *oder* $\frac{dy}{dx} = a$.]

Die zweite giebt

$$\frac{dy}{dx} = \pm x,$$

welches das Nemliche ist, was wir oben fanden.

Die beiden Stammgleichungen erster Ordnung geben also nur eine einzige singulaire Stammgleichung.

Es scheint, dass verschiedene Stammgleichungen auch verschiedene singulaire Werthe haben müssten. Wir wollen indessen a priori zeigen, dass man immer die nemliche singulaire Gleichung erhält, von welcher Stammgleichung man auch ausgehen mag; was bis jetzt nicht bekannt war.

Es giebt nur eine singulaire Urgleichung.

163.

Man nehme die Gleichung zweiter Ordnung

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

singulaire Urgleichung.

Ihre Urgleichung mit zwei willkürlichen Constanten a und b sey

$$u = F(x, y, a, b) = 0.$$

Nach der allgemeinen Regel erhält man die beiden Stammgleichungen erster Ordnung von $v = 0$, wenn man a oder b zwischen $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$ wegschafft, wobei a und b als unveränderliche Grössen betrachtet werden.

Da $\frac{dy}{dx}$ ausser a und b auch $\frac{dy}{dx}$ enthält, so wollen wir solches durch

$$\frac{du}{dx} = w = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a, b\right) = 0$$

bezeichnen.

Man erhält also die beiden Stummgleichungen erster Ordnung, wenn man nach einander die Werthe von b und von a, vermittelst der Gleichung $u = 0$ in x und y ausgedrückt, in $w = 0$ substituirt.

Hierauf erhält man die beiden singulairen Stammgleichungen, wenn man aus der ersten der beiden Stammgleichungen, a, vermittelst ihrer nach a genommenen Abgeleiteten und aus der zweiten b, vermittelst der nach b genommenen abgeleiteten Gleichung, wegschafft.

Man betrachte zuerst in der Gleichung $w = \frac{du}{dx} = 0$ die Grösse b als eine Function von x, y und a, wie sie durch die Gleichung $u = F(x, y, a, b) = 0$

bestimmt wird, so ist die Ableitung von w nach a folgende:

$$\frac{dw}{da} + \frac{dw}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0.$$

Da nun b eine durch die Gleichung $u = F(x, y, a, b) = 0$ bestimmte Function von a ist, so erhält man den Werth von $\frac{db}{da}$, wenn man $u = 0$ nach a ableitet, welches

$$\frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0$$

giebt. Schafft man zwischen dieser Gleichung und der vorigen $\frac{db}{da}$ weg, so erhält man

$$\frac{dw}{da} \cdot \frac{du}{db} - \frac{dw}{db} \cdot \frac{du}{da} = 0.$$

Diese Gleichung mit den beiden

$$u = 0 \text{ und } w = 0$$

durch Wegschaffung von a und b verbunden, giebt die, durch Ableitung der einen Stammgleichung nach a entstehende singulaire Gleichung.

Betrachtet man dagegen in der Gleichung $w = 0$, a als Function von b, so erhält man durch diese Ableitung nach b,

$$\frac{dw}{da} \cdot \frac{da}{db} + \frac{dw}{db} = 0,$$

wo der Werth von $\frac{da}{db}$ durch die nach b abgeleitete Gleichung $u = 0$, also durch

singulaire Urgleichung.

$$\frac{du}{da}\cdot\frac{da}{db}+\frac{du}{db}=0$$

bestimmt wird. Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen $\frac{da}{db}$, so erhält man

$$\frac{dw}{da}\cdot\frac{du}{db}-\frac{dw}{db}\cdot\frac{du}{da}=0,$$

welches das Nemliche ist, wie oben. Die singulaire Stammgleichung, welche durch die Ableitung nach b gefunden wird, ist also ebenfalls das Resultat der Elimination von a und b zwischen der letzten Gleichung und $u=0$ und $w=0$.

Also ist das Resultat [*nemlich die Form der singulairen Stammgleichung*] in beiden Fällen das nemliche, weil die Gleichungen, aus welchen es entsteht, die nemlichen sind.

164.

Hieraus folgt, dass man auch die singulaire Stammgleichung zu einer Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung direct, vermittelst ihrer vollständigen Urgleichung finden kann, ohne die beiden Stammgleichungen erster Ordnung einzeln zu kennen.

Denn es sey

$$u=F(x,y,a,a)=0$$

die Urgleichung, in welcher a und b willkürliche Constanten sind, so kommt es nur darauf an, a, b und $\frac{db}{da}$ zwischen den 4 Gleichungen

Es giebt nur eine

$$u = 0 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx\,da} + \frac{d^2u}{dx\,db} \cdot \frac{db}{da} = 0$$

zu eliminiren.

165.

Eben so kann man bei Gleichungen höherer Ordnungen verfahren und daraus ähnliche Resultate finden.

Es sey z. B.

$$u = F(x, y, a, b, c) = 0$$

die zu einer Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung gehörige Urgleichung zwischen x und y und den drei Constanten a, b, c, so haben die drei Stammgleichungen zweiter Ordnung eine und dieselbe singulaire Stammgleichung zweiter Ordnung. Dieselbe ist das Resultat der Elimination von b, c, $\frac{db}{da}$ und $\frac{dc}{da}$ zwischen den sechs Gleichungen

$$u = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{da} + \frac{du}{dc} \cdot \frac{dc}{da} = 0$$

$$\frac{d^2u}{dx\,da} + \frac{d^2u}{dx\,db}\frac{db}{da} + \frac{d^2u}{dx\,dc}\frac{dc}{da} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d^3u}{dx^2da} + \frac{d^3u}{dx^2db}\frac{db}{da} + \frac{d^3u}{dx^2dc}\frac{dc}{da} = 0$$

singulaire Urgleichung.

u. s. w. [*Die Uebersetzung ist hier wegen der Zeichen etwas verändert.*]

166.

[*Beispiel.*] So erhält man von der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung

$$\left(\frac{d^2y}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}:x + 1 = 0,$$

deren Stammgleichung zwischen x und y, wie wir oben sahen,

$$\tfrac{1}{3}x^3 - 2ay + a^2x + b = 0$$

ist, wo a und b willkürliche Constanten bedeuten, auf der Stelle die singulaire Stammgleichung erster Ordnung, wenn man diese gewöhnliche Stammgleichung mit ihrer gewöhnlichen abgeleiteten und den von den beiden Gleichungen nach a abgeleiteten, durch Wegschaffung von a, b und $\frac{db}{da}$ verbindet. Bei der Ableitung nach a wird b als Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$ und a betrachtet.

Um dieses Beispiel dadurch allgemeiner zu machen, dass man die Constante b in der abgeleiteten Gleichung beibehält, will ich der Stammgleichung zunächst die Form

$$x^2 + 3a^2 + \frac{3b - 6ay}{x} = 0$$

geben. Hiervon ist die abgeleitete

$$2x - \frac{6a}{x}.\frac{dy}{dx} - \frac{3b - 6ay}{x^2} = 0.$$

Es giebt nur eine

Nimmt man nun von diesen beiden Gleichungen die abgeleiteten nach a, so erhält man

$$6a - \frac{6y}{x} + 3\frac{db}{da} : x = 0 \text{ und}$$

$$\frac{6y}{x^2} - 6\frac{dy}{dx} : x - 3\frac{db}{da} : x^2 = 0,$$

wo b als Function von a betrachtet ist.

Schafft man nun zuerst $\frac{db}{da}$ weg, so erhält man

$$\left[x\left(6a - \frac{6y}{x}\right) + x^2\left(\frac{6y}{x^2} - \frac{6}{x}\frac{dy}{dx}\right) = 0, \textit{ oder}\right.$$

$$\left. ax - y + y - x\frac{dy}{dx} = 0, \textit{ oder } a - \frac{dy}{dx} = 0, \textit{ also}\right]$$

$$a = \frac{dy}{dx}.$$

Ferner geben die beiden ersten Gleichungen [*die Stammgleichung und die abgeleitete:* $x + \frac{3a^2}{x} + \frac{3b - 6ay}{x^2} = 0$ *und* $2x - \frac{6a}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{3b - 6ay}{x^2} = 0$; *also*] wenn man [*durch Zusammenrechnen*] b eliminirt,

$$3x + \frac{3a^2 - 6a\frac{dy}{dx}}{x} = 0.$$

Setzt man hierin den gefundenen Werth von a $\left[= \frac{dy}{dx}\right]$, so erhält man

$$3x - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x = 0, \text{ oder}$$

singulaire Urgleichung.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0,$$

wie oben.

167.

[*Beispiel.*] Es sey noch die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung

$$y - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

gegeben, deren Stammgleichung zwischen x und y,

$$y - \tfrac{1}{2}ax^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$$

ist. [*Da die Zwischenrechnungen bei diesem Beispiele keine Schwierigkeiten haben, so kann der dazu nöthige Raum füglich erspart werden.*]

Schafft man erstlich a und dann b zwischen dieser Gleichung und ihrer ersten abgeleiteten

$$\frac{dy}{dx} - ax - b = 0$$

weg, so erhält man folgende zwei:

$$y + (\tfrac{1}{2}a - a^2)x^2 - (1 - 2a)x\frac{dy}{dx} - a^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

und

$$y - \tfrac{1}{2}\left(b + \frac{dy}{dx}\right)x - \left(b - \frac{dy}{dx}\right)^2 : x^2 - b^2 = 0.$$

Nimmt man die Ableitung von der ersten nach a, so erhält man

$$(\tfrac{1}{2} - 2a)x^2 + 2x\frac{dy}{dx} - 2a = 0,$$

woraus

$$a = \frac{x^2 + 4x\frac{dy}{dx}}{4(1+x^2)}$$

Es giebt nur eine singulaire Urgleichung.

folgt, welches, in die nemliche Gleichung zurück substituirt,

$$1.\ y - x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\left(4x\frac{dy}{dx} + x^2\right)^2}{16(1+x^2)} = 0$$

giebt.

Die von der zweiten nach b abgeleitete Gleichung ist

$$\tfrac{1}{2}x + \frac{2\left(b - \frac{dy}{dx}\right)}{x^2} + 2b = 0,$$

woraus

$$b = \frac{4\frac{dy}{dx} - x^2}{4(1+x^2)},$$

und, wenn man diesen Werth von b zurück substituirt,

$$2.\ y - \tfrac{1}{2}x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 : x^2 + \frac{\left(4\frac{dy}{dx} - x^3\right)^2}{16x^2(1+x^2)} = 0$$

folgt.

Diese beiden Gleichungen [*Nr.* 1 *und* 2.] sind Eins und dasselbe, denn sie reduciren sich beide auf

$$(1+x^2)y - (x + \tfrac{1}{2}x^3)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \tfrac{1}{16}x^4 = 0,$$

welche Gleichung folglich die singulaire Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung ist.

Das Nemliche erhält man, wenn man unmittelbar a, b und $\frac{db}{da}$ zwischen der Stammgleichung $y - \frac{1}{2}ax^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$, ihrer ersten ab-

Für den singulairen Fall u. s. w.

geleiteten $\frac{dy}{dx} - ax - b = 0$ und den nach a abgeleiteten von diesen beiden, $\frac{1}{2}x^2 - 2a + (x - 2b)\frac{db}{da} = 0$ und $x + \frac{db}{da} = 0$, eliminirt. Die beiden letzten geben, wenn man zwischen ihnen $\frac{db}{da}$ wegschafft, $\frac{1}{2}x^2 - 2a - (x - 2b)x = 0$. Verbindet man dieses Resultat mit der zweiten Gleichung, so findet man

$a = \frac{x^2 + 4x\frac{dy}{dx}}{4(1 + x^2)}$ und $b = \frac{4\frac{dy}{dx} - x^3}{4(1 + x^2)}$ und diese Ausdrücke in die erste Gleichung gesetzt, geben

$$y(1 + x^2) + \tfrac{1}{16}x^4 - (\tfrac{1}{2}x^3 + x)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

wie oben.

Für den singulairen Fall sind $\frac{da}{dx}$, $\frac{da}{dy}$ etc. unendlich gross.

168.

Wenn man aus der Stammgleichung

$$u = F\left(x, b, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, a\right) = 0$$

den Werth von a in $x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ entwikkelt und durch

$$a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Für den singulairen Fall sind

bezeichnet, so ist klar, dass sich die Gleichung, wenn man diesen Werth von a in sie zurück substituirt, nothwendig identisch aufheben muss. Ihre nach x, y, $\frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ genommene Ableitungen werden also ebenfalls Statt finden. [*Denn wenn die Gleichung identisch ist, so findet sie für jeden beliebigen Werth von* x, y, $\frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ *Statt, also auch, wenn man diesen Grössen beliebige Veränderungen beilegt und das Ganze* (u) *nach Potenzen der Veränderungen entwickelt. Also sind auch dann die Coefficienten zu den einzelnen Potenzen dieser Veränderungen, das heisst, die Ableitungen von* u, *nach den Grössen* x, y, $\frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, *genommen, einzeln gleich Null; oder, was dasselbe sagen will: auch die abgeleiteten Gleichungen von* u, *nach* x, y, $\frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, *finden in jeder Ordnung Statt.*]

Man erhält also [*wenn man unter* $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ $\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} \ldots \frac{du}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$ *die Ableitungen von* u *nach* x, y, $\frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ *für den Fall versteht, dass*

a noch

$$\frac{da}{dx}, \frac{da}{dy} \text{ etc. unendlich gross.}$$

a noch unveränderlich ist]

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dy} = 0$$

$$\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} = 0$$

etc.

[*weil a von den sämmtlichen Grössen* $x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dy^{n-1}}$, *vermöge der Gleichung* $u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, a\right) = 0$, *abhängt.*]

Hieraus folgt:

$$\frac{da}{dx} = -\frac{du}{dx} : \frac{du}{da}$$

$$\frac{da}{dy} = -\frac{du}{dy} : \frac{du}{da}$$

$$\frac{da}{d\frac{dy}{dx}} = -\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} : \frac{du}{da}$$

etc.

Da nun die Grösse $\frac{du}{da}$ für den Fall der singulairen Stammgleichung allemal Null ist [156 *und* 161.], so folgt, dass in diesem Falle die sämmtlichen Grössen

$$\frac{da}{dx}, \frac{da}{dy}, \frac{da}{d\frac{dy}{dx}}, \ldots \frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$$

unendlich gross sind.

Für den singulairen Fall sind

169.

Dieser Umstand giebt ein allgemeines Mittel an die Hand, die singulaire Stammgleichung zu finden, welches besonders dann nützlich ist, wenn die Stammgleichung die Form

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = a$$

hat, auf welche die allgemeine Regel nicht zu passen scheint, weil in diesem Falle

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

$$= \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) - a,$$

und folglich

$$\frac{du}{da} = -1$$

seyn würde, woraus sich Nichts für die singulaire Stammgleichung schliessen lässt [*weil diese Gleichung a gar nicht mehr enthält und folglich a nicht giebt.*]

170.

Es ist indessen zu bemerken, dass man, obgleich für die singulaire Stammgleichung die Grössen $\frac{da}{dx}$, $\frac{da}{dy}$, $\frac{da}{d\frac{dy}{dx}}$.... unendlich gross sind, daraus nicht schliessen darf, dass umgekehrt jede Gleichung, für welche

$\frac{da}{dx}$, $\frac{da}{dy}$ *etc. unendlich gross.*

diese Grössen unendlich gross sind, allemal eine singulaire Stammgleichung sey. Für eine solche Gleichung muss auch noch die Function $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = a$ keine Constante seyn; denn sonst würde nur ein einzelner Fall der allgemeinen Stammgleichung Statt finden.

Wäre zum Beispiel

$$a = \varphi(x, y) = (y - x)^m,$$

so wäre

$$\frac{da}{dx} = -m(y-x)^{m-1} \text{ und } \frac{da}{dy} = m(y-x)^{m-1}.$$

Diese beiden Grössen sind für $m < 1$ unendlich gross, wenn man $y = x$ setzt.

Aber die Gleichung

$$y - x = 0$$

macht den Werth von $a = \varphi(x, y)$ gleich Null, oder unendlich gross, je nachdem m positiv oder negativ ist [*so dass also a nicht mehr eine veränderliche Grösse ist*]. Also kann die Gleichung $y - x = 0$ keine singulaire Stammgleichung seyn.

171.

[*Erstes Beispiel.*] Man nehme die Gleichung des obigen ersten Beispiels:

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0.$$

Sie giebt

$$a = -y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b)},$$

Für den singulairen Fall sind

also

$$a = \varphi(x, y) = - \ + y \sqrt{(x^2 + y^2 - b)},$$

woraus

$$\frac{da}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}} \text{ und}$$

$$\frac{da}{dy} = -1 + \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}$$

folgt. Wie man sieht, sind diese beiden Ausdrücke für

$$x^2 + y^2 - b = 0$$

unendlich gross [*welches der Fall der singulairen Stammgleichung war*].

172.

[*Zweites Beispiel.*] Wir fanden oben [*in* 167.] dass die singulaire Stammgleichung der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung

$$y - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0,$$

$$y(1 + x^2) + \tfrac{1}{16}x^4 - (\tfrac{1}{2}x^3 + x)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

ist. Sondert man daraus $\frac{dy}{dx}$ ab, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{4}(2x + x^3) - \tfrac{1}{4}\sqrt{(1 + x^2)}\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)} = 0,$$

und, wenn man mit $\frac{1}{8}\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}$ dividirt,

$$\frac{8\frac{dy}{dx} + 4x + 2x^3}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}} = 2\sqrt{(1 + x^2)}.$$

Von dieser Gleichung sind beide Glieder vollständige

$$\frac{da}{dx}, \frac{da}{dy} \text{ etc. unendlich gross.}$$

Ableitungen. Nimmt man die Stammgrössen davon und fügt die Constante k hinzu, so erhält man die Stammgleichung

$$\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)} =$$
$$x\sqrt{(1 + x^2)} - \overset{e}{log}(\sqrt{(1 + x^2)} - x) + k,$$

wie leicht zu sehen, wenn man von dieser Gleichung wieder die ersten Ableitungen nimmt.

Diese Gleichung ist, wie man sieht, von der vollständigen Stammgleichung [*der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung*]

$$y - \tfrac{1}{2}ax^2 - bx - a^2 - b^2 = 0 \; [167.]$$

sehr verschieden, aber sie thut eben so wohl der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung genug, weil sie überhaupt der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung entspricht, welche als singulaire Stammgleichung zu der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung gehört.

Aber diese Ableitungs-Gleichung erster Ordnung [*nemlich die singulaire Stammgleichung von der gegebenen Gleichung zweiter Ordnung*] kann ebenfalls wieder eine singulaire Stammgleichung haben, die zu untersuchen ist.

Da die Constante k von x und y schon abgesondert ist, so erhält man unmittelbar

$$k = \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)} - x\sqrt{(1 + x^2)}$$
$$- \overset{e}{log}(\sqrt{(1 + x^2)} - x),$$

folglich, wenn man diese Grösse durch $\varphi(x, y)$ bezeichnet, und die Ableitungen davon nach x und y nimmt,

Für den singulairen Fall u. s. w.

$$\frac{dk}{dy} = \frac{8}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}}.$$

Setzt man nun diese Grösse unendlich gross, so erhält man die Gleichung

$$16y + 4x^2 + x^4 = 0,$$

welche die singulaire Stammgleichung derjenigen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist, die selbst schon eine singulaire Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung war.

Sie entspricht in der That, wie man sich leicht überzeugen kann, der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, aber nicht mehr der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung [*wie gehörig*].

Man hätte sie auch unmittelbar aus der Urgleichung zwischen x und y

$$y - \tfrac{1}{2}ax^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$$

finden können, wenn man a und b aus den beiden, von derselben nach a und b abgeleiteten Gleichungen bestimmte. Dieselben sind

$$\tfrac{1}{2}x^2 + 2a = 0 \text{ und } x + 2b = 0,$$

woraus

$$a = -\tfrac{1}{4}x^2 \text{ und } b = -\tfrac{1}{2}x$$

folgt.

Setzt man diese Werthe von a und b in die obige Gleichung [*die Urgleichung* $y - \frac{1}{2}ax^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$], so erhält man

$$y + \tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{1}{4}x^2 = 0.$$

Wiederholte singulaire Stammgleichungen.

173.

Es ist vermittelst der allgemeinen Theorie der singulairen Stammgleichungen leicht zu zeigen, dass dergleichen **wiederholte singulaire Stammgleichungen** aus der Urgleichung

$$u = F(x, y, a, b) = 0$$

gefunden werden, wenn man die beiden Constanten zwischen der Urgleichung $u = 0$ und ihren beiden nach a und b abgeleiteten Gleichungen $\frac{du}{da} = 0$ und $\frac{du}{db} = 0$ wegschafft, woraus weiter die Ursache folgt, warum sie im Allgemeinen der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, die zu der vollständigen Urgleichung mit den beiden willkürlichen Constanten $u = F(x, y, a, b)$ gehört, nicht entsprechen.

Denn die gegebene Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung sey

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

so entsteht dieselbe, wie wir sahen, durch Wegschaffung der als Constanten betrachteten Grössen a und b zwischen den drei Gleichungen

$$u = 0, \frac{du}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

Betrachtet man nun a und b als veränderlich und als Functionen von x und y, so ist die Ableitung

Wiederholte singulaire

von $u = 0$ nicht mehr blos $\frac{du}{dx} = 0$, sondern

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} = 0,$$

welches sich jedoch auf $\frac{du}{dx} = 0$ reducirt, wenn a und b diejenigen Werthe haben, welche den beiden Bedingungen

$$\frac{du}{da} = 0 \text{ und } \frac{du}{db} = 0$$

entsprechen. Diese beiden Bedingungen sind eben diejenigen der **wiederholten singulairen Stammgleichung.**

Da die Ableitung $\frac{du}{dx}$, wenn sie entwickelt wird, die veränderlichen Grössen x, y und $\frac{dy}{dx}$ und die beiden Constanten a und b enthält, so kann man sie durch $\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a, b\right)$ bezeichnen und es ist klar, dass die dritte Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

im Fall a und b constant sind, folgende ist:

$$\frac{d\,\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0.$$

Sind hingegen a und b veränderliche Grössen, so ist die dritte Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{da\,dx} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{d^2u}{db\,dx} \cdot \frac{db}{dx} = 0,$$

Stammgleichungen.

welche sich nicht mehr auf

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

reducirt, weil die beiden Grössen $\frac{d^2u}{da\,dx}$ und $\frac{d^2u}{db\,dx}$ nicht nothwendig Null sind.

Also ist es unmöglich, dass die Gleichung

$$u = F(x, y, a, b),$$

wenn darin die Grössen a und b den Bedingungen

$$\frac{du}{da} = 0 \text{ und } \frac{du}{db} = 0$$

entsprechen sollen, allgemein der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung genugthue, welche man durch Wegschaffung von a und b zwischen der Gleichung $u = 0$ und ihren ersten und zweiten, für constante a und b genommenen Ableitungen erhält. [*Man sehe wegen des Inhalts dieses Paragraphs die Anmerkung am Ende dieser Vorlesung.*]

174.

Man kann diese Sätze auch auf Stammgleichungen höherer Ordnungen ausdehnen.

Es sey z. B. die Urgleichung

$$u = F(x, y, a, b, c) = 0$$

mit den drei willkürlichen Constanten a, b, c, gegeben, so erhält man, wenn man diese drei Grössen aus den drei Gleichungen

$$\frac{du}{da} = 0, \ \frac{du}{db} = 0 \text{ und } \frac{du}{dc} = 0$$

Der zurückleitende Multiplicator ist

bestimmt, eine dreifache singulaire Stammgleichung, welche die singulaire Stammgleichung einer Gleichung erster Ordnung ist, die selbst die singulaire Stammgleichung einer Gleichung zweiter Ordnung ausdrückt, welche wiederum die singulaire Stammgleichung der Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung ist, zu welcher die gegebene Gleichung $u = 0$ mit den drei willkürlichen Constanten a, b, c, als vollständige Urgleichung gehört. Diese dreifache singulaire Stammgleichung thut aber weder der zu $u = 0$ gehörigen Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung, noch dieser ihrer singulairen Stammgleichung zweiter Ordnung genug.

Der zurückleitende Multiplicator ist für den singulairen Fall ∞ gross.

175.

Wir zeigten weiter oben, dass die Grössen $\frac{da}{dx}$, $\frac{da}{dy}$, $\frac{da}{d\frac{dy}{dx}} \cdots \frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$, für den Fall der singulairen Stammgleichung einer abgeleiteten, deren vollständige Stammgleichung

$$a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

ist, sämmtlich unendlich gross sind. [168.]

Hieraus folgt unmittelbar, dass jeder Multiplica-

für den singulairen Fall ∞ gross.

tor, welcher eine Ableitungs-Gleichung nter Ordnung, wie

$$v = \frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

zur vollständigen Ableitung einer Ableitungs-Gleichung $n-1$ter Ordnung macht, für die singulaire Stammgleichung der nemlichen Gleichung nothwendig unendlich gross seyn muss.

Denn der Multiplicator sey M, so ist nach der Voraussetzung

$$Mv = M\left[\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)\right]$$

$$= \frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)}{dx} = \frac{da}{dx}.$$

[*Nemlich weil nach der Veraussetzung Mv eine vollständige Ableitung seyn soll.*] Hiervon ist die Stammgleichung:

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = a.$$

Es ist aber

$$\frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n} \cdot \frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)}{d\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}}$$

$$+ \frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)}{dx}.$$

Der zurückleitende Multiplicator ist

Also ist

$$M = \frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} = \frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}.$$

[*Nemlich man setze, die Stammgleichung zu der obigen Gleichung*

$$v = \frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

sey:

$$a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

so ist

$$\frac{da}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n} \cdot \frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} + \frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)}{dx} = 0.$$

Multiplicirt man v mit $\frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$, *so erhält man*

$$\frac{d^n y}{dx^n} \cdot \frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} = 0.$$

Vergleicht man Dieses mit $\frac{da}{dx} = 0$, *so sieht man, dass*

für den singulairen Fall ∞ gross.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \cdot \frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$$

$$= \frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)}{dx}$$

ist, zugleich aber, dass, wenn man v *mit* $\frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$ *multiplicirt, das Product die vollständige Ableitung* $\frac{da}{dx}$ *giebt. Also ist der Multiplicator, welcher* $v = 0$ *zur vollständigen Ableitung macht, gleich* $\frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$, *wie oben.*] Die Grösse M ist also nothwendig unendlich gross, wenn man den mit der singulairen Stammgleichung correspondirenden Werth von $\frac{d^n y}{dx^n}$ setzt. [*Denn in der That sind, für den Fall der singulairen Stammgleichung, alle die Grössen* $\frac{da}{dx}, \frac{da}{dy}, \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} \dots \frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$ *unendlich gross.* (168.)]

176.

Das Nemliche folgt auch direct aus der in der dreizehnten Vorlesung gefundenen Form der Multitiplicatoren.

Der zurückleitende Multiplicator ist

Wenn z. B. die Gleichung von der ersten Ordnung ist, wie

$$\frac{dy}{dx} + fx, y = 0,$$

so hat sie nur eine Stammgleichung von der Form

$$u = F(x, y, a) = 0,$$

und alle Multiplicatoren dieser Gleichung sind nothwendig in dem Ausdrucke

$$\frac{\varphi a \cdot \frac{du}{dy}}{\frac{du}{da}}$$

enthalten [150.], wo φa irgend eine Function von a bedeutet, wenn vorausgesetzt wird, dass man statt a den aus der nemlichen Gleichung $u = 0$ folgenden Werth dieser Grösse setzt. Da nun, für den Fall der singulairen Stammgleichung, die Grösse $\frac{du}{da} = 0$ ist [156.]. so sind, wie man sieht, alle Multiplicatoren unendlich gross.

177.

Wenn die gegebene Ableitungs-Gleichung von der zweiten Ordnung ist, wie

$$v = \frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

so kann sie zwei verschiedene Stammgleichungen erster Ordnung haben, wie

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0 \text{ und } w = F'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, b\right) = 0,$$

für den singulairen Fall ∞ gross.

und der allgemeine Ausdruck der Multiplicatoren ist

$$\frac{\frac{d\varphi(a,b)}{da}\cdot\frac{du}{d\frac{dy}{dx}}}{\frac{du}{da}}+\frac{\frac{d\varphi(a,b)}{db}\cdot\frac{dw}{d\frac{dy}{dx}}}{\frac{dw}{db}}\quad[152.]$$

wo $\varphi(a,b)$ eine beliebige Function von a und b, und zwar von den durch die Gleichungen $u=0$ und $w=0$ bestimmten Werthen dieser Grössen bedeutet.

Nun aber sind für die singulaire Stammgleichung die beiden Grössen $\frac{du}{da}$ und $\frac{dw}{db}$ gleich Null [173.] also sind alle Multiplicatoren, für den Fall der singulairen Stammgleichung, unendlich gross.

178.

[*Beispiel.*] Die obige Gleichung

$$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-y)}-y}=0$$

z. B. hat die Grösse

$$\frac{\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}}$$

zu einem ihrer Multiplicatoren. Setzt man diesen Multiplicator unendlich gross, so erhält man für die singulaire Stammgleichung

$$x^2+y^2-b=0;$$

was mit dem oben Gefundenen übereinstimmt.

Der zurückleitende Multiplicator ist

Man erhält hierdurch ein neues Mittel, die singulaire Stammgleichung zu finden.

179.

Obgleich indessen bewiesen ist, dass jeder Multiplicator für die singulaire Stammgleichung unendlich gross ist, darf man nicht umgekehrt schliessen, dass jede Gleichung, welche einen Multiplicator unendlich gross macht, eine singulaire Stammgleichung seyn müsse. Denn da der allgemeine Ausdruck für die erste Ableitungs-Ordnung

$$\frac{\varphi a \cdot \frac{du}{dy}}{\frac{du}{da}}$$

ist [150.], so ist klar, dass der Werth dieser Grösse auch unendlich gross seyn kann, ohne dass

$$\frac{du}{da} = 0$$

ist; denn es darf nur eine der beiden Grössen φa, oder $\frac{du}{dy}$ unendlich gross seyn.

180.

Uebrigens zeigt sich aus diesem einfachen Raisonnement leicht, dass die singulaire Stammgleichung jeden Multiplicator einer Gleichung beliebiger nter Ordnung, von der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

unendlich gross macht.

Denn

für den singulairen Fall ∞ *gross.*

Denn wenn der Multiplicator M ist, so ist

$$M\left(\frac{d^ny}{dx^n}+f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right)=\frac{da}{dx}$$

$$=\frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx} \text{ [175.]}$$

und die Gleichung geht in

$$\frac{da}{dx}=0$$

über, wovon die Stammgleichung

$$a=\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

ist, wo a eine willkürliche Constante bedeutet.

Nun soll die singulaire Stammgleichung der gegebenen Gleichung

$$\frac{d^ny}{dx^n}+f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0$$

entsprechen und in ihrer vollständigen Stammgleichung

$$a=\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

nicht enthalten seyn. Also soll der Werth von $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, wenn man ihn aus der singulairen Gleichung entwickelt und in die Grösse $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$

substituirt, dieselbe **nicht** einer Constante gleich, folglich auch ihre Ableitung $\frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx}$ nicht gleich Null machen. Dieser Werth von $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ soll also die Grösse

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

gleich Null machen, nicht aber die Grösse

$$M\left(\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right)$$

[*welche letztere der Ableitung* $\frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx}$ *gleich war*], welches nicht anders angeht, als wenn *M* unendlich gross ist.

Ungefähr so hat zuerst **Laplace** diesen wichtigen Satz bewiesen, welchen andere Analysten zwar bemerkt, aber nicht strenge begründet hatten. Man sehe sein Mémoire über die singulairen Auflösungen, unter denen der Academie der Wissenschaften [*zu Paris*] vom Jahre 1772.

Uebersicht der vierzehnten Vorlesung.

[*In dem Obigen scheint Einiges dunkel zu seyn, besonders der Inhalt des* 173*ten Paragraphs. Um Dieses näher nachzuweisen, erlaube man den*

vierzehnten Vorlesung.

Inhalt der ganzen Vorlesung, herzusetzen, welches zugleich zur Uebersicht dieser Vorlesung dienen wird und wobei sich dann einige Erläuterungen besser einschalten lassen werden.

§. 158. Hier wird gezeigt, dass jede Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, wie $v = 0 = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ *eine singulaire Stammgleichung, die kein besonderer Fall der vollständigen Stammgleichung von* $v = 0$ *ist, haben kann, und dass man die singulaire Stammgleichung aus der vollständigen Stammgleichung einer gegebenen Ableitungs-Gleichung* $v = 0$, *welche* $u = F(x, y, a)$ *seyn mag, findet, wenn man in derselben der Grösse* a *denjenigen veränderlichen Werth giebt, der der Gleichung* $\frac{du}{da} = 0$ *entspricht; nemlich deshalb, weil für diesen Werth von* a, *die erste, von* $u = 0$ *abgeleitete Gleichung,* $\frac{du}{dx} = 0$ *und die durch Verbindung derselben mit* $u = a$, *vermittelst Wegschaffung der Grösse* a, *entstehende Ableitungs-Gleichung* $v = 0$, *die nemliche bleibt,* a *mag constant seyn, oder veränderlich.*

§. 157. wird gezeigt, dass, im Fall die Gleichung $\frac{du}{da} = 0$, *welche* a *bestimmen soll, einen constanten Werth von* a *giebt, die Stammgleichung* $u = 0$, *mit diesem Werthe von* a, *keine singulaire Gleichung, sondern nur ein besonderer*

Fall der vollständigen Stammgleichung ist, weil a für eine singulaire Gleichung nothwendig veränderlich seyn muss.

§. 158. *Beispiel zu* (156.)

§. 159. *Da die Gleichung* $\frac{du}{da} = 0$, *welche a für den singulairen Fall giebt, dem Falle entspricht, in welchem die Gleichung* $u = 0$, *als algebraische Gleichung mit der Grösse a betrachtet, für a zwei gleiche Werthe giebt, so giebt der singulaire Werth von y in der Stammgleichung* $u = 0$ *immer zwei gleiche Werthe für a.*

§. 160. *Beispiel eines Falles, in welchem das aus* $\frac{du}{da} = 0$ *gefundene a keiner singulairen Stammgleichung, sondern nur einem besondern Falle der vollständigen Stammgleichung entspricht.*

§. 161. *Anwendung von* §. 156. *auf den Fall, wenn* $u = 0$ *nicht blos x und y, sondern schon Ableitungen von y nach x enthält, oder von der Form* $u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, a\right)$, *die gegebene Ableitungs-Gleichung* $v = 0$ *aber von einer um Eins höheren Ordnung, also von der Form* $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ *ist. Das Resultat ist das Nemliche. Die Gleichung* $\frac{du}{da} = 0$ *bestimmt denjenigen Werth von*

a, der, in $u = 0$ gesetzt, zu der singulairen Stammgleichung erster Ordnung von $v = 0$ gehört.

§. 162. *Beispiel dazu an der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung* $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} : x + 1 = 0$. *An diesem Beispiele wird zugleich gezeigt, dass zu der zweiten vollständigen Stammgleichung erster Ordnung, welche dieser Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung entspricht, nicht etwa eine andere, sondern nur die nemliche singulaire Stammgleichung gehört.*

§. 163. *Allgemeiner Beweis dieses Satzes. Es sey nemlich* $u = F(x, y, a, b) = 0$ *eine beliebige Gleichung zwischen* x, y *und den beiden Grössen* a *und* b, *so hat diese Gleichung bekanntlich zwei, von einander verschiedene Ableitungs-Gleichungen, die sich auf die Weise, wie in* (136.), *bildlich durch* $\frac{u \times du}{a}$ *und* $\frac{u \times du}{b}$ *bezeichnen lassen, aber nur eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung* $v = \frac{u \times du \times d^2u}{ab}$. *Diese Ableitungs-Gleichung* $v = 0$, *zweiter Ordnung, hat also umgekehrt zwei verschiedene Stammgleichungen erster Ordnung* $\frac{u \times du}{a}$ *und* $\frac{u \times du}{b}$, *aber nur eine einzelne Urgleichung* $u = 0$. *Nun gehört zu jeder der beiden vollständigen Stammgleichungen erster Ordnung* $\frac{u \times du}{a}$ *und* $\frac{u \times du}{b}$ *von* $v = 0$, *nicht etwa*

eine verschiedene singulaire Stammgleichung von $v = 0$, *sondern die beiden zu* $\frac{u \times du}{a}$ *und* $\frac{u \times du}{b}$ *gehörigen singulairen Stammgleichungen sind identisch die nemlichen. Dieses ist der Satz. Derselbe wird aber im Text nicht dadurch bewiesen, dass man etwa, wie gewöhnlich, nach* (156.) *von den Stammgleichungen* $\frac{u \times du}{a}$ *und* $\frac{u \times du}{b}$ *die Ableitungen nach b und a nimmt, die daraus folgenden Werthe von b und a in die Gleichungen* $\frac{u \times du}{a}$ *und* $\frac{u \times du}{b}$ *substituirt und dann nachweiset, dass das Resultat Eins und Dasselbe ist; sondern der Beweis geht blos von der Gleichung* $u = 0$ *und ihrer Abgeleiteten* $\frac{du}{dx} = 0$, *die noch beide Constanten a und b enthält, nicht von* $u = 0$ *und einer der beiden Ableitungs-Gleichungen* $\frac{u \times du}{a}$ *und* $\frac{u \times du}{b}$, *die nur noch eine Constante enthalten, aus. Denn, anstatt aus der abgeleiteten Gleichung* $\frac{du}{x} = 0$ *wirklich erst die eine Ableitungs-Gleichung z. B.* $\frac{u \times du}{b}$, *durch Wegschaffung der Grösse b zwischen* $\frac{du}{x} = 0$ *und* $u = 0$, *oder dadurch zu entwickeln, dass b aus* $u = 0$ *genommen und in* $\frac{du}{dx} = 0$ *gesetzt wird, welches* $\frac{u \times du}{b}$ *geben würde, wird b blos*

vierzehnten Vorlesung.

als durch $u = 0$ *bestimmt betrachtet, welches auch das Nemliche ist.* $\frac{du}{dx} = 0$ *ist also in diesem Sinne gleichsam schon die Ableitungs-Gleichung* $\frac{u \times du}{b}$, *blos mit dem Unterschiede, dass der der Grösse b zukommende, durch* $u = 0$ *bestimmte Werth, noch nicht wirklich entwickelt und substituirt ist, sondern dass die Entwickelung und Substitution noch erst bevorsteht. Nimmt man also, um die der Ableitungs-Gleichung* $\frac{u \times du}{b}$ *correspondirende singulaire Stammgleichung von* $v = 0$ *zu finden, statt von ihr, von* $\frac{du}{dx} = 0$ *die Ableitung nach a, um den dadurch bestimmten veränderlichen Werth von a in* $\frac{du}{dx} = 0$ *zu substituiren, so muss auch noch auf die Abhängigkeit der zweiten Grösse b von a, wie die Gleichung* $u = 0$ *sie bestimmt, Rücksicht genommen werden. Dieses geschieht. Von* $\frac{du}{dx} = 0$ *wird die Ableitung nach a genommen, indem man b als von a abhängend betrachtet. Die auf diese Weise entstehende Grösse* $\frac{db}{da}$ *aber wird vermittelst der, ebenfalls nach a abgeleiteten Gleichung* $u = 0$ *bestimmt. So entsteht eine dritte Gleichung, die noch beide Grössen a und b enthält. Zwischen ihr und den beiden Gleichungen*

$u = 0$ *und* $\frac{du}{dx} = 0$ *werden a und b weggeschafft und es entsteht also eine Gleichung ohne a und b, die nothwendig die nemliche seyn muss, welche man erhalten würde, wenn man blos a zwischen der Ableitungs-Gleichung* $\frac{u \times du}{b}$ *und ihrer Abgeleiteten nach a wegschaffte. Das Resultat der Rechnung ist also wirklich die der Ableitungs-Gleichung* $\frac{u \times du}{a}$ *entsprechende singulaire Stammgleichung zu* $v = 0$.

Nun wird auf diesem Wege ferner gezeigt, dass man das Nemliche erhält, man mag die Operation mit a oder mit b anfangen. Es wird also bewiesen, dass die den beiden Ableitungs-Gleichungen $\frac{u \times du}{b}$ *und* $\frac{u \times du}{a}$ *entsprechenden singulairen Stammgleichungen völlig dieselben sind.*

§. 164. *Es folgt aus dem Gange des Beweises in* § 163. *unmittelbar, dass man die zu einer gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung gehörige singulaire Stammgleichung erster Ordnung, dergleichen es, wie nun bewiesen, immer nur eine giebt, unmittelbar aus der Urgleichung* $u = 0$ *findet, wenn man a, b und* $\frac{db}{da}$ *zwischen den vier Gleichungen* $u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ *und* $\frac{d^2u}{da\,dx} = 0$ *eliminirt. Denn von der abgeleiteten*

vierzehnten Vorlesung.

Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$ (*nicht der Ableitungs-Gleichung* $\frac{u \times du}{b}$) *wurde die erste Ableitung nach* a, $\frac{d^2u}{da\,dx} = 0$ *genommen, der darin vorkommende Werth von* $\frac{db}{da}$ *wurde aus* $\frac{du}{da} = 0$ *gefunden und das Resultat war eine dritte Gleichung zu den beiden* $u = 0$ *und* $\frac{du}{dx} = 0$, *die aber, wie diese beiden, noch* a *und* b *enthält. Zwischen diesen drei Gleichungen wurden* a *und* b *eliminirt, welches das Nemliche ist, als wenn* a, b *und* $\frac{db}{da}$ *zwischen den vier Gleichungen* $u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$ $\frac{du}{da} = 0$ *und* $\frac{d^2u}{da\,dx} = 0$ *weggeschafft würden.*

§. 165. *Ausdehnung dieser Sätze auf Ableitungen dritter Ordnung.*

§. 166. *Erstes Beispiel zu* (163. 164.) *in welchem* a, b *und* $\frac{db}{da}$ *zwischen den vier Gleichungen* $u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ *und* $\frac{d^2u}{da\,dx} =$ *eliminirt werden.*

§. 167. *Zweites Beispiel zu* (163. 164.) *bei welchem beide Verfahren angewendet werden, nemlich das eben vorhin beschriebene und das gewöhnliche, dass man zu den Ableitungs-Gleichungen* $\frac{u \times du}{b}$ *und* $\frac{u \times du}{a}$ *die correspondirenden*

singulairen Gleichungen dadurch sucht, dass man sie nach a und b ableitet und aus den entstehenden Gleichungen die entsprechenden Werthe von a und b nimmt und in die Ableitungs-Gleichungen zurück substituirt. Die Uebereinstimmung der Resultate beider Operationen, und dass man die nemlichen singulairen Stammgleichungen erhält, zeigt sich der obigen Theorie gemäss.

§. 168. *Es wird gezeigt, dass wenn z. B.*

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, a\right) = 0$$ *ist, dass*

dann, für den singulairen Fall, alle die Grössen

$$\frac{da}{dx}, \frac{da}{dy}, \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} \dots \frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$$ *nothwendig unendlich gross seyn müssen.*

§. 169. *Diese Bemerkung ist bei Entwickelung der singulairen Stammgleichung dann nützlich, wenn in $u = 0$, a abgesondert von den übrigen Grössen vorkommt.*

§. 170. *Obgleich für jede singulaire Stammgleichung die Grössen $\frac{da}{dx}, \frac{da}{dy} \dots$ nothwendig unendlich gross sind, so findet doch nicht umgekehrt, wenn solches der Fall ist, allemal eine singulaire Stammgleichung Statt.*

§. 171. *Beispiel zu* §. 168.

§. 172. *Hier wird die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung*

vierzehnten Vorlesung.

$$v = y - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

aus einem der obigen Beispiele genommen. Es wird von der, dieser Gleichung zukommenden, oben schon gefundenen singulairen Stammgleichung erster Ordnung, die vollständige Stammgleichung, die keine Ableitung mehr, sondern blos x und y und eine Constante enthält, gesucht. Wie jeder vollständigen Stammgleichung, correspondirt auch dieser eine singulaire Stammgleichung, die also die singulaire Stammgleichung von der singulairen Stammgleichung der angenommenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung $v = 0$, und folglich eine wiederholte singulaire Stammgleichung, oder, wenn man will, eine singulaire Stammgleichung zweiten Ranges ist. Sie wird dem angenommenen Beispiele gemäss entwickelt und ist

$$16y^2 + 4x^2 + x^4 = 0.$$

Nun wird zuerst bemerkt, dass diese Gleichung, wie das Beispiel zeigt, zwar der Gleichung erster Ordnung, nicht aber der gegebenen Gleichung zweiter Ordnung genugthun könne.

Ferner werden zwischen der, der gegebenen Gleichung zweiter Ordnung zukommenden vollständigen Urgleichung, welche

$$u = y - \tfrac{1}{2}ax^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$$

ist, und den beiden, davon, nach a und b abgeleiteten Gleichungen $\frac{du}{da} = 0$ und $\frac{du}{db} = 0$, die bei-

den Grössen a und b eliminirt und es findet sich, an dem Beispiele, ein Resultat, welches der obigen wiederholten *singulairen Stammgleichung* $16y + 4x^2 + x^4 = 0$ *gleich ist.*

§. 173. Dieser Umstand, dass man auf diese Weise, auch unmittelbar durch die Elimination der Grössen a und b zwischen $u = 0$, $\frac{du}{a} = 0$ *und* $\frac{du}{db} = 0$, *die wiederholte singulaire Stammgleichung finden kann, welche der zu* $u = 0$ *gehörigen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung* $v = 0$ *entspricht, wird hier allgemein bewiesen, und gezeigt, dass die wiederholte singulaire Stammgleichung zwar allemal der singulairen Stammgleichung erster Ordnung, nicht aber nothwendig der zu* $u = 0$ *gehörigen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung entspricht.*

Das Letzte hat keine Schwierigkeit und geht aus §. 173 ganz deutlich hervor, sobald nur erst das Erste feststeht, dass die durch die Elimination von a und b zwischen $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ *und* $\frac{du}{db}$ *entstehenden Gleichung, wirklich die zu* $v = 0$ *oder* $u = 0$ *gehörige wiederholte singulaire Gleichung ist. Allein der Beweis dieses Satzes scheint in §. 173. etwas dunkel. Es heisst dort blos: die Ableitung von* $u = 0$ *sey, im Fall a und b ver-*

vierzehnten Vorlesung.

änderlich angenommen werden, $\frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} = 0$. *Diese Gleichung reducire sich für* $\frac{du}{da} = 0$ *und* $\frac{du}{db} = 0$, *auf* $\frac{du}{dx} = 0$, *oder auf die nemliche Gleichung, die, nebst* $u = 0$ *und* $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, *diene, durch Wegschaffung von a und b, im Fall diese Grössen constant sind, die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung* $v = 0$ *zu finden; die Bedingungen* $\frac{du}{da} = 0$ *und* $\frac{du}{db} = 0$ *wären aber grade diejenigen der wiederholten singulairen Stammgleichung und hieraus folge der Satz. Auf welche Weise aber daraus der Satz folge und wie überhaupt folge, dass man nun deshalb wirklich die wiederholte singulaire Stammgleichung durch Elimination von a und b zwischen* $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ *und* $\frac{du}{db} = 0$ *finden müsse, scheint sich in jenem Vortrage nicht klar zu zeigen.*

Man könnte statt dessen den Satz vielleicht, wie folgt, beweisen.

Eliminirt man nemlich eine der beiden Grössen, z. B. a, zwischen den beiden Gleichungen $u = 0$ *und* $\frac{du}{dx} = 0$, *so ist das Resultat unstreitig das nemliche, a und b mögen constant oder veränderlich seyn, sobald nur* $\frac{du}{da} = 0$ *und*

Uebersicht der

$\frac{du}{db} = 0$ sind; denn in beiden Fällen ist dann die erste Ableitung von $u = 0$ die zur Elimination vou a dient, dieselbe, nemlich blos $\frac{du}{dx}$, wie vorhin bemerkt. Das Resultat der Elimination von a zwischen $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$ ist also in beiden Fällen die eine der beiden vollständigen Stammgleichungen erster Ordnung zu $v = 0$, nemlich diejenige $\frac{u \times du}{a}$ mit der Constante b; denn sie ist solches bekanntlich, wenn a und b constant sind, folglich ist sie es auch jetzt, wenn a und b veränderlich sind, weil, wie bewiesen, das Resultat der Elimination identisch das Nemliche ist. Giebt man nun in dieser Stammgleichung erster Ordnung $\frac{u \times du}{a}$, der in ihr allein noch übrigen Constante b den veränderlichen Werth, welchen die Gleichungen $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ und $\frac{du}{db} = 0$ bestimmen, so muss diese Gleichung dadurch nothwendig zu der zu $v = 0$ gehörigen singulairen Stammgleichung erster Ordnung werden, weil sie jetzt gar keine Constante mehr enthält und dennoch der Gleichung $v = 0$ als Stammgleichung entsprechen soll. Sie muss in diesem Falle nothwendig deshalb mit der singulairen Stammgleichung übereinstimmen, weil es nur eine

vierzehnten Vorlesung.

Stammgleichung ohne *Constante, und folglich keine andere solche Gleichung mehr giebt, die der Gleichung* $v = 0$ *als Stammgleichung entspräche. Man muss auch, wie im Vorbeigehen zu bemerken, das Nemliche finden, wenn man etwa von der andern Constante anfinge, nemlich zuerst die Gleichung* $\frac{u \times du}{a}$ *aufstellte und dann erst der einen, darin allein noch übrigen Grösse* a *den Werth beilegte, welcher den Gleichungen* $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ *und* $\frac{du}{db} = 0$ *entspricht, eben aus dem Grunde, weil es, wie oben bewiesen, nur eine einzige singulaire Stammgleichung erster Ordnung giebt.*

Setzt man nun, im obigen ersten Falle, wo man mit der Elimination der Grösse a *anfing, den nemlichen, den Gleichungen* $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ *und* $\frac{du}{db} = 0$ *entsprechenden veränderlichen Werth der Grösse* b, *auch in die Gleichung* $u = 0$, *so würde solche offenbar die gewöhnliche* vollständige *Stammgleichung zu der gefundenen* singulairen *Stammgleichung erster Ordnung seyn. Denn an und für sich ist die Gleichung* $u = 0$ *die vollständige Stammgleichung zu der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung* $\frac{u \times du}{a}$, *die kein* a *enthält. Giebt man also, in beiden, noch der auf ihr Verhältniss zu einander weiter keinen*

Einfluss habenden Grösse b denjenigen Werth, welcher den Gleichungen $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ und $\frac{du}{db} = 0$ entspricht, so ist nunmehr $u = 0$, weil solches immer die vollständige Ableitung zu $\frac{u \times du}{a}$ bleibt, jetzt aber $\frac{u \times du}{a}$ in die singulaire Stammgleichung erster Ordnung übergegangen ist, mit dem veränderlichen Werthe von b, die vollständige Stammgleichung zu der singulairen Stammgleichung erster Ordnung, die der Gleichung $u = 0$ oder $v = 0$ entspricht.

Nach der allgemeinen Theorie der singulairen Gleichungen geht aber nur dann eine vollständige Stammgleichung in eine singulaire über, wenn man einer der darin befindlichen Constanten denjenigen Werth giebt, welcher der nach ihr genommenen Ableitung der Stammgleichung entspricht. Man würde also, wenn man aus der vollständigen Stammgleichung, welche $u = 0$, mit dem veränderlichen Werthe von b, zu der der Aufgabe entsprechenden singulairen Gleichung erster Ordnung wirklich ist, die correspondirende singulaire Stammgleichung finden wollte, den dazu gehörigen Werth der in ihr noch übrigen Constante a aus der Gleichung $\frac{du}{da} = 0$ bestimmen müssen. Genau diese Gleichung aber ist es, welche von Anfang an zu den dreien:

vierzehnten Vorlesung.

$u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ und $\frac{du}{db} = 0$ gehörte, aus welchen schon der veränderliche Werth von b genommen wurde; also wird $u = 0$ wirklich zur singulairen Stammgleichung von der der Aufgabe entsprechenden singulairen Stammgleichung erster Ordnung, oder zur wiederholten singulairen Stammgleichung, wenn man den darin befindlichen Grössen a und b diejenigen veränderlichen Werthe beilegt, welche den drei Gleichungen $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ und $\frac{du}{db} = 0$ entsprechen, welches zu beweisen war.

Die zweite Bemerkung, dass die wiederholte singulaire Stammgleichung zwar der singulairen Stammgleichung erster Ordnung, nicht aber der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung genugthut, ist, wie gesagt, in §. 173. klar nachgewiesen.

§. 174. Ausdehnung der Theorie auf dreifach wiederholte singulaire Stammgleichungen. Man kann bei dem Beweise auf eine ähnliche Art verfahren, wie bei den zweifach wiederholten singulairen Gleichungen.

§. 175. Der Multiplicator, welcher eine gegebene Ableitungs-Gleichung zur vollständigen Abgeleiteten macht, ist für den Fall der singulairen Stammgseichung allemal unendlich gross. Dieses wird aus dem Umstande bewiesen, dass, wenn man die Constante a aus der gegebenen Gleichung

Uebersicht der vierzehnten Vorlesung.

absondert, alle die Grössen $\frac{da}{dx}$, $\frac{da}{dy}$, $\frac{da}{d\frac{dy}{dx}}$

$\frac{da}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$ *unendlich gross sind.* (168.)

§. 176 *und* 177. *Das Nemliche wird für Ableitungs-Gleichungen der ersten und zweiten Ordnung aus dem allgemeinen Ausdrucke der Multiplicatoren* (150 *und* 152) *gezeigt.*

§. 178. *Beispiel an einer der obigen Gleichungen.*

§. 179. *Obgleich jeder Multiplicator für den singulairen Fall der Stammgleichung unendlich gross ist, so ist doch nicht umgekehrt jede Gleichung, welche einen Multiplicator unendlich gross macht, eine singulaire. Dieses wird aus dem allgemeinen Ausdrucke der Multiplicatoren für die erste Ordnung gezeigt.*

§. 180. *Enthält den Laplacischen Beweis, dass die singulaire Stammgleichung jeden Multiplicator einer Gleichung beliebiger n ter Ordnung unendlich gross macht.*

Dieses ist von dieser Vorlesung der Inhalt, welcher, nächst der Erläuterung, die bei dem §. 173 *nöthig zu seyn schien, die Uebersicht desselben erleichtern wird.*]

Funfzehnte Vorlesung.

Wie die singulaire Stammgleichung aus der Ableitungs-Gleichung gefunden wird.

181.

Dem Obigen zu Folge, kann man allemal die singulaire Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung finden, wenn man die vollständige Stammgleichung derselben, von einer um Eins niedrigern Ordnung, entweder schon kennt, oder solche mit Hülfe eines Multiplicators zu finden im Stande ist.

Wir wollen nun weiter sehen, wie sich die singulaire Stammgleichung unmittelbar aus der gegebenen Ableitungs-Gleichung finden lasse.

Zu dem Ende müssen wir untersuchen, was aus der Ableitungs-Gleichung für den singulairen Fall ihrer Stammgleichung wird.

Wir wollen von dem Fundamental-Princip der singulairen Stammgleichung ausgehen.

Die singulaire Stammgleichung aus der

182.

Wenn

$$u = F(x, y, a) = 0$$

die Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist, so entsteht diese Ableitungs-Gleichung aus der Stammgleichung, wenn man die Constante a zwischen $u = 0$ und der von $u = 0$ nach x und y abgeleiteten Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 0$$

wegschafft.

Die singulaire Stammgleichung hingegen entsteht durch Wegschaffung der Grösse a zwischen der Stammgleichung $u = 0$ und der von ihr nach a abgeleiteten Gleichung

$$\frac{du}{da} = 0.$$

Man setze, es werde der Werth von a, vermittelst der Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 0$$

in $x, y, \frac{dy}{dx}$ ausgedrückt, und durch

$$a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

bezeichnet. Substituirt man ihn statt a in die Stammgleichung $u = 0$, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, welche die Ableitungs-Gleichung von $u = 0$ selbst ist.

Ableitungs-Gleichung zu finden.

Bezeichnet man die Function $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, der Kürze wegen, blos durch φ [*so dass also* φ *den veränderlichen Werth von a bedeutet, wie er durch die Gleichung* $\frac{du}{dx} = 0$ *bestimmt wird*], so ist

$$F(x, y, \varphi) = 0$$

die Ableitungs-Gleichung [*von* $u = F(x, y, a)$. *Denn man erhält diese Ableitungs-Gleichung, wenn man a zwischen* $u = 0$ *und* $\frac{du}{dx} = 0$ *eliminirt, oder den Werth von a aus der einen Gleichung, z. B. aus* $\frac{du}{dx} = 0$ *nimmt und in die andere setzt, was hier geschahe. Die Gleichung* $F(x, y, \varphi) = 0$, *obgleich das Zeichen F der noch unbekannten, zu der gegebenen Ableitungs-Gleichung gehörigen Stammgleichung* $u = 0$ *enthaltend, ist also* g e g e b e n; *denn sie ist die gegebene Ableitungs-Gleichung selbst. Man kann sie durch*

$$v = 0$$

bezeichnen. Das Zeichen F ist aber beizubehalten nöthig, um die Entstehung der Gleichung anzuzeigen. Man könnte selbst die Gleichung durch $u = 0$ *bezeichnen, in so fern man sich vorstellen wollte, dass in u, der Grösse a, ihr, der abgeleiteten Gleichung* $\frac{du}{dx} = 0$ *entsprechender, veränänderlicher Werth in x, y und* $\frac{dy}{dx}$ *gegeben worden; denn so entsteht v aus u.*]

Die singulaire Stammgleichung aus der

Wir wollen nun von dieser Gleichung [$F(x, y, \varphi) = 0$] die abgeleitete nehmen. Da φ von x, y und $\frac{dy}{dx}$ abhängt, so erhält man

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

wo $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$ das Nemliche ist, wie oben; nemlich die Ableitung $\frac{du}{dx}$ von u in der Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$, [*nemlich in der ersten abgeleiteten Gleichung von* $u = 0$, *für ein constantes* a. *Denn Alles was von* a, *oder von* φ *herkommt, ist in dem Gliede* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx}$ *enthalten*] nur mit dem Unterschiede, dass jetzt für a, sein, aus der nemlichen Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$ genommener Werth, φ gesetzt worden. Hieraus folgt, dass der Ausdruck $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$ nothwendig identisch Null seyn muss, weil er das Resultat der Substitution des Werthes von a ist, wodurch er verschwindet.

[*Denn das Glied* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$ *des Ausdrucks* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = 0$ *ist nichts anders als das Nemliche* $\frac{du}{dx}$, *welches, gleich Null gesetzt, zur Bestimmung von* a *oder* φ *selbst diente, weil es denjenigen Theil der Ableitung*

Ableitungs-Gleichung zu finden.

von $F(x, y, \varphi)$ (oder u mit veränderlichem a) ausmacht, bei welchem auf die Veränderlichkeit von a noch nicht Rücksicht genommen ist, die vielmehr erst bei dem folgenden Gliede $\frac{dF(x,y,\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$ in Betracht kommt und von demselben allein ausgedrückt wird. Es ist also wesentlich die Ableitung von u selbst, mit einem constanten a. Nun stelle man sich vor, dass der aus $\frac{du}{dx} = 0$ gefundene Werth φ von a in $u = 0$ zurück substituirt worden sey, und also eben so in der Ableitung von u oder $F(x, y, \varphi)$ erscheine so muss dasjenige Glied $\frac{dF(x,y,\varphi)}{dx}$ der Ableitung von $F(x, y, \varphi)$, bei welchem auf die Veränderlichkeit von a noch nicht Rücksicht genommen ist, nothwendig identisch Null seyn, weil, wenn man eine Grösse aus einer Gleichung nimmt, und sie in die nemliche Gleichung zurück substituirt, alle Glieder der Gleichung unter einander sich aufheben müssen.]

Die Ableitung der [*gegebenen*] Gleichung erster Ordnung

$$[v =] \; F(x, y, \varphi) = 0$$

reducirt sich also blos auf [*das zweite Glied*]

$$\frac{dF(x,y,\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

welches, wie man sieht, weiter, in die beiden Gleichungen

Die singulaire Stammgleichung aus der

$$\frac{d\varphi}{dx} = o \text{ und } \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = o$$

zerfällt.

Die erste

$$\frac{d\varphi}{dx} = o, \text{ oder } \frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = o$$

ist eine Gleichung mit Ableitungen zweiter Ordnung, welche den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ in x, y und $\frac{dy}{dx}$ giebt.

Diese Gleichung hat zur Stammgleichung offenbar $\varphi = Const.$ Also sind

$$\varphi = a \text{ und } F(x, y, \varphi) = o \; [\textit{oder } v = o]$$

zwei Stammgleichungen erster Ordnung von der Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx}$$

[*denn die erste* $\varphi = o$ *ist die Stammgleichung zu* $\frac{d\varphi}{dx} = o$, *die andere* $F(x, y, \varphi) = o$ *ist die Gleichung selbst, aus welcher man* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = o$ *durch die Ableitungs-Operation fand. Sie ist folglich nothwendig ebenfalls eine Stammgleichung zu* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = o$].

Eliminirt man also, nach der zwölften Vorlesung,
[137.] $\frac{dy}{dx}$ zwischen diesen beiden Stammgleichungen, so erhält man die Stammgleichung von

$$F(x, y, \varphi) = o \; [\textit{oder } v = o],$$

Ableitungs-Gleichung zu finden.

in welcher a die willkürliche Constante ist. [*Nemlich, zu der Ableitungs-Gleichung* $F(x, y, \varphi)$, *von welcher man ausging, ist jetzt eine zweite Ableitungs-Gleichung erster Ordnung* $\varphi = a$ *gefunden. Man findet also ihre gemeinschaftliche Stammgleichung, folglich die Stammgleichung zu* $F(x, y, \varphi) = 0$, *oder* $v = 0$, *wenn man* $\frac{dy}{dx}$ *zwischen beiden eliminirt; nach* 137.]

Da aber $\frac{dy}{dx}$ nur allein in φ enthalten ist, so ist das Resultat der Elimination [*von* $\frac{dy}{dx}$ *zwischen* $F(x, y, \varphi) = 0$ *und* $\varphi = a$] das nemliche, welches man erhält, wenn man φ selbst wegschafft. Folglich ist dieses Resultat blos

$$F(x, y, a) = 0,$$

welches also die [*Ur*-] Gleichung wieder giebt, von welcher man ausging.

Man betrachte ferner die zweite Gleichung

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = 0.$$

Sie thut ebenfalls, wie man sieht, der Gleichung zweiter Ordnung [*nemlich der Ableitung von* $F(x, y, \varphi) = 0$] genug. Da sie indessen nur y und $\frac{dy}{dx}$ enthält, so kann sie nur als eine erste Stammgleichung ohne Constante zu der Gleichung zweiter Ordnung [*der Ableitung von* $F(x, y, \varphi) = 0$] betrachtet werden [*denn die einzige Constante a ist in ihr nicht vorhanden*]. Eliminirt man also

Die singulaire Stammgleichung aus der

$\frac{dy}{dx}$ zwischen ihr und der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, \varphi) = 0 \ [oder\ v = 0],$$

so erhält man von dieser letzten Gleichung eine neue Stammgleichung, die nothwendig von der Stammgleichung

$$F(x, y, a) = 0$$

verschieden seyn muss.

Da aber $\frac{dy}{dx}$ nur allein in φ vorkommt, so muss die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ zwischen den beiden Gleichungen

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = 0 \text{ und } F(x, y, \varphi) = 0$$

nothwendig das Nemliche geben, was man erhält, wenn man φ selbst wegschafft, wie wir schon oben bemerkten. Dieses Resultat ist nun aber nichts anders als dasjenige der Elimination der Grösse a zwischen den beiden Gleichungen

$$\frac{du}{da} = 0 \text{ und } F(x, y, a) = 0;$$

[*denn* φ *ist blos der in* x, y *und* $\frac{dy}{dx}$ *ausgedrückte veränderliche Werth von* a, *und für* $\frac{du}{d\varphi} = 0$ *und* $F(x, y, \varphi) = 0$ *ist es gleichgültig, ob* a *constant oder veränderlich ist.*] Also giebt dieses Resultat, vermöge dessen, was in der vorigen Vorlesung gezeigt worden, die singulaire Stammgleichung

Ableitungs-Gleichung zu finden.

derjenigen Ableitungs-Gleichung, deren gewöhnliche vollständige Stammgleichung

$$F(x, y, a) = 0$$

ist, [*also die Gleichung* $v = 0$] wenn a die willkürliche Constante bedeutet. [*Denn man findet diese singulaire Stammgleichung durch die Elimination von a zwischen den beiden Gleichungen*

$u = F(x, y, a) = 0$ *und* $\frac{du}{da} = 0$ (156.)]

Es folgt also, dass die Gleichung

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi},$$

durch die Elimination von $\frac{dy}{dx}$, die nemliche singulaire Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$F(x, y, \varphi) = 0 \ [\textit{oder } v = 0]$$

giebt, welche man aus ihrer Stammgleichung

$$F(x, y, a) = 0,$$

nach dem Verfahren der vorigen Vorlesung finden würde.

Daraus folgt, dass eine Ableitungs-Gleichung immer so verwandelt werden kann, dass ihre Ableitung unmittelbar die singulaire Stammgleichung giebt, wenn eine solche vorhanden ist. Diese Bemerkung wurde bis jetzt noch nicht gemacht.

[*Folgendes ist eine etwas kürzere Uebersicht des gegenwärtigen Paragraphs.*

Die singulaire Stammgleichung aus der

I. *Es sey eine* Ableitungs-*Gleichung erster Ordnung von der Form*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

gegeben. Diese Gleichung ist ihrer Natur nach das Resultat der Elimination der Constante a zwischen der unbekannten vollständigen Stammgleichung von v, die

$$u = F(x, y, a)$$

seyn mag, und der ersten, von derselben abgeleiteten Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 0.$$

II. *Stellt man sich daher die Constante a aus der Gleichung* $\frac{du}{dx} = 0$ *entwickelt und in die Gleichung* $u = F(x, y, a)$ *substituirt, vor, welches nichts anders als die Elimination der Grösse a ist, so lässt sich die gegebene Ableitungs-Gleichung* $v = 0$, *wenn man den aus* $\frac{du}{dx} = 0$ *gefundenen veränderlichen Werth von a durch φ bezeichnet, durch*

$$v = F(x, y, \varphi) = 0$$

ausdrücken, wo F das zu $u = 0$ *gehörige Abhängigkeits-Zeichen ist.*

III. *Nun nehme man die erste Ableitung von* $v = 0$, *welches allemal angeht, weil v gegeben ist. Sie ist*

Ableitungs-Gleichung zu finden.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

IV. Das erste Glied dieser Gleichung $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$ *ist identisch Null, weil es die Ableitung von* $F(x, y, \varphi)$, *ohne Rücksicht auf die Veränderlichkeit von a ist, auf welche sich erst das zweite Glied bezieht, folglich nichts anders als* $\frac{du}{dx}$, *oder nichts anders als die erste Ableitung von u selbst, mit einem constanten a, die, wegen* $u = 0$, *Null ist.*

V. Es bleibt also von $\frac{dv}{dx}$ *nur das zweite Glied* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx}$ *übrig; folglich ist die Gleichung* $\frac{dv}{dx} = 0$ *blos folgende:*

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

welche in die beiden

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = 0 \text{ und } \frac{d\varphi}{dx} = 0$$

zerfällt.

VI. Die zweite Gleichung $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ *ist von der zweiten Ordnung. Die Stammgleichung davon ist* $\varphi = a$. *Diese Stammgleichung ist von der ersten Ordnung und folglich von der nemlichen Ordnung, wie die gegebene Gleichung* $F(x, y, \varphi) = v = 0$ *selbst. Da sie nun von dieser ausgeht, indem sie daraus durch*

Die singulaire Stammgleichung aus der

Ableitung, und dann wieder durch Zurückleitung gefunden wird, so gehört sie mit ihr zusammen, oder hat mit ihr eine gemeinschaftliche Abgeleitete zweiter Ordnung. Eliminirt man also $\frac{dy}{dx}$ *zwischen diesen beiden zusammengehörigen Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung* $F(x, y, \varphi) = v = 0$ *und* $\varphi = a$, *so erhält man ihre gemeinschaftliche Stammgleichung. Da* $\frac{dy}{dx}$ *nur in* φ *allein vorkommt, so ist es, wenn man* $\frac{dy}{dx}$ *wegschafft, eben so viel, als wenn man* φ *selbst wegschafft, folglich enthält die durch die Elimination entstehende Stammgleichung kein* φ, *sondern nur* x, y *und* a. *Mithin ist sie die vollständige Urgleichung*

$$u = F(x, y, a)$$

selbst; denn nur dieser entspricht die Gleichung $v = F(x, y, \varphi) = 0$, *von welcher man ausging, nebst Allem, was daraus abgeleitet wurde.*

VII. Die erste *der beiden obigen Gleichungen,* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}$ *ist nur von der ersten Ordnung, weil sie nur* x, y *und* $\frac{dy}{dx}$ *enthält. Sie kann also nur eine Stammgleichung zu* $\frac{dv}{dx} = 0$ *seyn, und zwar ohne Constante, dergleichen sie nicht enthält. Eliminirt man also zwischen ihr und der gegebenen Gleichung* $v = 0$, *die ebenfalls von der ersten Ord-*

nung ist, $\frac{dy}{dx}$, *so erhält man eine Urgleichung zwischen* x *und* y *allein, ohne Constante, die folglich von der vollständigen Urgleichung* $F(x, y, a)$ *wesentlich verschieden ist. Nun aber ist wieder die Elimination von* $\frac{dy}{dx}$ *zwischen den beiden Gleichungen* $v = 0$, *oder* $F(x, y, \varphi) = 0$ *und* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}$ *nichts anders, als wenn man zwischen denselben* φ *selbst wegschafft, weil nur* φ *allein die Grösse* $\frac{dy}{dx}$ *enthält. Also ist die entstehende Urgleichung zwischen* x *und* y, *ohne Constante, nichts anders als das Resultat der Elimination von* φ *zwischen den beiden Gleichungen*

$$F(x, y, \varphi) = 0 \text{ und } \frac{aF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = 0.$$

VIII. Bei dieser Elimination aber ist es gleichgültig, ob φ *veränderlich ist, oder constant, weil die Ableitung von* φ *selbst nicht vorkommt. Also ist das Resultat derselben demjenigen der Elimination des constanten Werths* a *von* φ *zwischen den beiden Gleichungen*

$$F(x, y, a) = 0 \text{ und } \frac{dF(x, y, a)}{da} = 0$$

gleich. Diese beiden Gleicnungen aber sind nichts anders als

$$u = 0 \text{ und } \frac{du}{da} = 0.$$

Die singulaire Stammgleichung aus der

Das Resultat der Elimination von a zwischen den Gleichungen $u = 0$ *und* $\frac{du}{da} = 0$ *aber ist die zu der vollständigen Stammgleichung* $u = 0$ *von* $v = 0$, *gehörige singulaire Stammgleichung* (156.)

IX. Also findet man diese singulaire Stammgleichung blos aus der gegebenen Ableitungs-Gleichung

$$v = 0,$$

ohne ihre vollständige Stammgleichung $u = 0$ *zu kennen, wenn man die erste Ableitung von* $v = 0$ *nimmt, welche* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} + \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$, *oder vielmehr, weil das Glied* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$ *identisch verschwindet, blos* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$ *ist, selbige in die beiden Factoren* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}$ *und* $\frac{d\varphi}{dx}$ *zerlegt, deren einer nur* x, y *und* $\frac{dy}{dx}$, *der andere* x, y, $\frac{dy}{dx}$ *und* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *enthält, mit letzterem dividirt, und zwischen dem entstehenden Quotienten* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$ *und der gegebenen Gleichung* $v = 0$ *selbst,* $\frac{dy}{dx}$ *eliminirt.*]

183.

[*Beispiel.*] Wir wollen als Beispiel wieder die Gleichung aus der vorigen Vorlesung [158.]

[$u =$]

Ableitungs-Gleichung zu finden.

$$[u =]\ x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$$

nehmen, die wir als eine vollständige Stammgleichung mit der willkürlichen Constante a betrachten. Um ihre erste Ableitungs-Gleichung zu finden, die die nöthige Eigenschaft hat, muss man darin, statt a, seinen aus der abgeleiteten Gleichung

$$x - a\frac{dy}{dx} = 0$$

genommenen Werth $a = x : \frac{dy}{dx}$ substituiren.

Dieses giebt für die verlangte Ableitungs-Gleichung Folgendes:

$$[v =]\ x^2 - 2yx : \frac{dy}{dx} - x^2 : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b = 0$$

[*welche Gleichung also die gegebene ist*].

Nimmt man nun von dieser Gleichung die erste Ableitung, so erhält man

$$x - y : \frac{dy}{dx} - x + xy\frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+ x^2\frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

welche Gleichung sich, wie wir schon in der zwölften Vorlesung sahen, in

$$\left(y : \frac{dy}{dx} + x : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(x\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{dy}{dx} - 1\right) = 0$$

verwandeln lässt [*wie leicht zu sehen, wenn man die beiden Factoren in einander multiplicirt*].

Bringt man sie auf die Form

$$\left(1 : \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(y + x : \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

Die singulaire Stammgleichung aus der

[*welches geschieht, wenn man dem zweiten Factor das entgegengesetzte Zeichen giebt und denselben mit* $\frac{dy}{dx}$ *dividirt, dagegen aber den ersten Factor mit* $\frac{dy}{dx}$ *multiplicirt, welches Alles im Ganzen Nichts ändert*], so sieht man, dass sie mit

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = 0$$

übereinkommt, wenn man

$$F(x, y, a) = x^2 - 2ay - a^2 - b$$

und für φ den für a aus der ersten abgeleiteten Gleichung

$$x - a\frac{dy}{dx} = 0$$

folgenden Werth setzt. [*Denn es ist* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}$ $= \frac{dF(x, y, a)}{da} = -2y - 2a$, *und weil* $\varphi = a$ $= x : \frac{dy}{dx}$ *ist,* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = -2y - 2x : \frac{dy}{dx}$.

Ferner ist $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\left(x : \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 1 : \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}$ $: \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. *Also ist* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = \Big(-2y$ $-2x : \frac{dy}{dx}\Big)\left(1 : \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = 0$, *oder*

$$\left(1 : \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(y + x : \frac{dy}{dx}\right) = 0;$$

welches mit dem, was vorhin durch die Ableitung

Ableitungs-Gleichung zu finden.

von $v = 0$ gefunden wurde, vollkommen übereinstimmt.]

Der Factor mit Ableitungen erster Ordnung $\left[\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = 0\right]$ giebt

$$y + x : \frac{dy}{dx} = 0, \text{ woraus } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

folgt, welcher Werth von $\frac{dy}{dx}$ in die [*gegebene*] Ableitungs-Gleichung $\left[v = x^2 - 2yx : \frac{dy}{dx} - x^2 : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b = 0\right]$ gesetzt [*um zwischen derselben und* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = 0$, $\frac{dy}{dx}$ *zu eliminiren*, $x^2 + 2yx . \frac{y}{x} - x^2 . \frac{y^2}{x^2} - b = 0$, *oder*]

$$x^2 + y^2 - b = 0$$

giebt, welches die weiter oben gefundene singulaire Stammgleichung ist. Denn die gegenwärtige Ableitungs-Gleichung ist einerlei mit der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} \sqrt{(x^2 + y^2 - y)} - y \frac{dy}{dx} - x = 0 \quad [158.]$$

im ersten Beispiel der vorigen Vorlesung. Nur würde in dieser Gestalt ihre Ableitung nicht in Factoren zerlegbar seyn. [*Obwohl sich nothwendig eine auf die andere muss bringen lassen.*]

Der Factor mit Ableitungen zweiter Ordnung $\left[\frac{d\varphi}{dx} = \right] 1 : \frac{dy}{dx} - x \frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, gleich Null gesetzt, giebt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} : x.$$

Aus diesem Factor könnte man auch leicht die Stammgleichung finden. Denn da derselbe die vollständige Ableitung von $x : \frac{dy}{dx}$ ist, so giebt er sogleich die Stammgleichung erster Ordnung:

$$x : \frac{dy}{dx} = a.$$

[*Nemlich* $1 : \frac{dy}{dx} - x \frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ *ist gleich* $\frac{d\left(x : \frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, *folglich ist* $\frac{\left(x : \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0$, *welches* $x : \frac{dy}{dx} = a$ *giebt.*] Multiplicirt man diese Gleichung mit $2\frac{dy}{dx}$ [*welches* $2x = 2a\frac{dy}{dx}$ *giebt*] und nimmt von Neuem die Stammgleichung, so erhält man

$$x^2 = 2ay + c,$$

wo a und c willkürliche Constanten sind. Da aber die gegebene Gleichung nur von der ersten Ordnung ist, und folglich nur eine willkürliche Constante haben kann, so muss zwischen den beiden Constanten irgend ein Verhältniss Statt finden. Um es zu finden, darf man nur die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ aus den beiden gefundenen Gleichungen [$x^2 = 2ay + c$ *und* $x : \frac{dy}{dx} = a$] nehmen und sie in die gegebene Ableitungs-Gleichung [$v = x^2 - 2xy : \frac{dy}{dx} - x^2 : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b = 0$] setzen. Diese Werthe sind $y = \frac{x^2 - c}{2a}$

Ableitungs-Gleichung zu finden.

und $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}$. Man erhält also $[x^2 - 2x \cdot \frac{x^2-c}{2a} \cdot \frac{a}{x} - x^2 \frac{a^2}{x^2} - b =]\ x^2 - x^2 + c - a^2 - b = 0$, woraus

$$c = a^2 + b$$

folgt, so dass die Stammgleichung $[x^2 = 2ay + c]$

$$x^2 = 2ay + a^2 + b$$

ist, wie oben.

Es ist nicht nöthig, zweimal die Stammgleichung zu nehmen. Man darf nur, nachdem man $x : \frac{dy}{dx} = a$ gefunden hat, sogleich den daraus folgenden Werth $\frac{x}{a}$ von $\frac{dy}{dx}$ in die gegebene Ableitungs-Gleichung $[v = x^2 - 2xy : \frac{dy}{dx} - x^2 : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b = 0]$ setzen, welches ebenfalls $[x^2 - 2xy \cdot \frac{a}{x} - x^2 \frac{a^2}{x^2} - b =]$

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$$

giebt.

184.

Wir gehen zu den Gleichungen zweiter Ordnung über.

Es sey

$$w = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0$$

die Stammgleichung erster Ordnung einer Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung.

Eliminirt man zwischen ihr und ihrer nach x abgeleiteten,

Die singulaire Stammgleichung aus der

$$\frac{w}{x} = 0,$$

die Grösse a, so erhält man die erwähnte Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung.

Eliminirt man zwischen ihr und ihrer nach a abgeleiteten

$$\frac{dw}{da} = 0$$

die Grösse a, so erhält man die zugehörige singulaire Stammgleichung.

Es sey

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

oder kürzer, φ, der aus der Gleichung $\frac{dw}{da} = 0$ folgende Werth von a in x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Setzt man diesen Werth von a in die Stammgleichung $\left[w = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0\right]$, so erhält man eine Ableitungs-Gleichung [*erster Ordnung*] von der Form

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi\right) = 0.$$

Nimmt man von dieser die erste Ableitung, so ist klar, dass der Theil $\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, welcher sich blos auf die Veränderung von x, y und $\frac{dy}{dx}$ bezieht, identisch Null ist, weil die Grösse φ, welche da-

Ableitungs-Gleichung zu finden.

bei als constant betrachtet wird, aus der Gleichung $\frac{dw}{dx} = 0$ bestimmt werden musste [*wie oben bei den Gleichungen erster Ordnung*]. Es bleibt daher nur die Gleichung

$$\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi\right)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = 0$$

übrig, welche in

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi\right)}{d\varphi} = 0$$

zerfällt.

Die Gleichung $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ ist von der dritten Ordnung und giebt den Werth von $\frac{d^3y}{dx^3}$. Ihre Stammgleichung ist offenbar

$$\varphi = a,$$

wenn a eine beliebige Constante bedeutet. Eliminirt man das in φ enthaltene $\frac{d^2y}{dx^2}$ vermittelst der [*gegebenen*] Ableitungs-Gleichung $\frac{dw}{da} = 0$, so erhält man das Nemliche, als wenn man φ selbst wegschafft [*weil nur φ, $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthält*] und zwar:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0,$$

welches die Stammgleichung ist.

Die andere Gleichung

Die singulaire Stammgleichung aus der

$$\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi\right)}{d\varphi} = 0,$$

giebt ebenfalls, wenn man $\frac{d^2y}{dx^2}$ eliminirt, das Nemliche, als wenn man φ wegschafft; folglich auch eben das, was man erhält, wenn man a zwischen den Gleichungen

$$\frac{dw}{da} = 0 \text{ und } w = 0$$

wegschafft; denn diese Gleichungen sind, wenn man a statt φ setzt, die vorigen. [*Alles wie oben, bei den Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung.*]

Dieses Resultat ist also die singulaire Stammgleichung derjenigen Gleichung zweiter Ordnung, deren Stammgleichung erster Ordnung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = w = 0$$

ist.

185.

[*Beispiel.*] Die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} : x + 1 = 0,$$

in den vorigen Vorlesungen, giebt, wenn man die Ableitung davon nimmt,

$$2\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} : x\right)\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 : x + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} : x^2 = 0,$$

welches sich auf die Form

Ableitungs-Gleichung zu finden.

$$2\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}:x\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}:x\right)=0$$

bringen lässt.

Da der Factor $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}:x$ mit der gegebenen Gleichung nur von derselben Ordnung ist, so giebt derselbe, wenn man $\frac{d^2y}{dx^2}$ eliminirt, eine singulaire Stammgleichung zu der gegebenen. Denn $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}:x=0$ giebt $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}:x$, welches, in die gegebene Gleichung gesetzt,

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2:x^2+1=0, \text{ oder } x^2-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

giebt, wie wir in der vorigen Vorlesung sahen.

Der andere Factor giebt die Gleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}:x=0,$$

welche Gleichung, wenn man sie mit x dividirt, die Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}:x=\frac{1}{a},$$

zur Stammgleichung hat, wo a eine willkürliche Constante ist. Daraus folgt

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{a},$$

welches, in die gegebene Gleichung gesetzt,

$\frac{x^2}{a^2}-2\frac{dy}{dx}+1=0$, oder

$$x^2-2a\frac{dy}{dx}+a^2=0$$

Die singulaire Stammgleichung aus der

für die Stammgleichung giebt, wie wir es in der erwähnten Vorlesung sahen.

186.

Das nemliche Verfahren lässt sich auf Gleichungen beliebiger Ordnungen ausdehnen [*auch kann die Anwendung auf eine beliebige Ordnung sogleich geschehen, ohne von der ersten Ordnung anzufangen*] und es folgt allgemein, dass jede Ableitungs-Gleichung auf eine Form gebracht werden kann, in welcher ihre Ableitung zwei Factoren hat, von welchen einer der gewöhnlichen vollständigen Stammgleichung entspricht, der andere unmittelbar die singulaire Stammgleichung giebt, wenn eine solche existirt; welches ein neues Licht auf die Eigenschaften der singulairen Stammgleichungen wirft; denn es ist klar, dass die beiden Factoren in der Ableitung der gegebenen Gleichung, weil sie unabhängig von einander sind, jeder einzeln dieser Gleichung und folglich auch der gegebenen Ableitungs-Gleichung genugthun müssen, die davon die Stammgleichung ist.

187.

Zugleich sieht man, dass der Factor, welcher die singulaire Stammgleichung giebt und mit der gegebenen von einerlei Ordnung ist, den Gleichungen höherer Ordnungen nicht genugthun kann, weil er derjenigen, die aus dem andern Factor folgt, nicht entspricht, die allein Ableitungen von höherer Ordnung enthält, als die gegebene Gleichung.

Ableitungs-Gleichung zu finden.

188.

Nun erwäge man, dass jede Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, wie

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

nur das Resultat der Elimination der Constante a zwischen der Stammgleichung

$$u = F(x, y, a) = 0$$

und ihrer ersten abgeleiteten

$$\frac{du}{dx} = \frac{dF(x, y, a)}{dx} = 0$$

seyn kann, wie solches in der zwölften Vorlesung gezeigt wurde; desgleichen dass die Gleichung

$$\frac{F(x, y, \varphi)}{dx} = 0,$$

wie oben bemerkt, schon das Resultat dieser Elimination ist [182.]; so folgt aus der bekannten Theorie der Elimination, dass die beiden Gleichungen

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ und } F(x, y, \varphi) = 0,$$

wenn sie nicht identisch sind, nur um einen Factor verschieden seyn können, welchen die eine mehr hat, und welcher nur eine Function von x, y und $\frac{dy}{dx}$ seyn kann.

Man setze, ein solcher Factor sey M, so dass

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = M.F(x, y, \varphi)$$

Die singulaire Stammgleichung aus der

ist, so erhält man, wenn man die erste Ableitung nimmt,

$$df\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \frac{dM}{dx} \cdot F(x, y, \varphi) + M \cdot \frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}.$$

Wie wir oben [182.] sahen, reducirt sich aber die Ableitung $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$ von $F(x, y, \varphi)$ auf $\frac{dF(x, \varphi y,)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$. Substituirt man daher $\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$ statt $\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, und statt $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ seinen Werth $\frac{f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{M}$, so erhält man

$$\frac{df\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx} =$$

$$M \cdot \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dM}{dx} \cdot f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) : M.$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck der ersten Ableitung des ersten Theils [v] der gegebenen Ableitungs-Gleichung $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$.

Man sieht hieraus, dass man, wenn die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

gegeben ist, ihrer abgeleiteten

Ableitungs-Gleichung zu finden.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{df\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0,$$

unabhängig von dem Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$, vermittelst der Gleichung

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi},$$

verbunden mit der gegebenen, genugthun kann [*denn, wenn ausser der gegebenen Ableitungs-Gleichung* $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ *noch die Gleichung* $\frac{dF(x,y,\varphi)}{d\varphi}$ *Statt findet, so wird dadurch die obige Gleichung*

$$\frac{df\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx} =$$

$$M \cdot \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dM}{dx} \cdot f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) : M$$

vollständig erfüllt. Der Theil rechterhand nemlich ist alsdann zugleich Null, eben wie es der Theil linkerhand, welcher $\frac{dv}{dx}$ *ausmacht, ist. Und zwar geschieht Alles dieses unabhängig von* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *welche Grösse, weder in* $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ *noch in* $\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx}$ *vorkommt*]. Diese beiden Gleichungen $\left[f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right.$ *und* $\left.\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}\right]$ können also, als Stammgleichungen erster Ordnung zu der abge-

Die singulaire Stammgleichung aus der

leiteten Gleichung zweiter Ordnung von der gegebenen

$$\frac{df\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

angesehen werden. Mithin darf man nur zwischen denselben $\frac{dy}{dx}$ eliminiren, um eine Stammgleichung der gegebenen zu finden, welche nichts anders als die singulaire ist, wie oben bewiesen wurde.

189.

Nun sondere man in der Ableitung von $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ den Theil ab, in welchem $\frac{d^2y}{dx^2}$ vorkommt, so erhält man $\frac{d(v)}{dx} = \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx}$ [*wo* $\frac{dv}{dx}$ *die Ableitung von* v *nach* x, *überall wo* x *ausserhalb* $\frac{dy}{dx}$ *vorkommt, bedeutet*]. Die abgeleitete von der gegebenen Gleichung $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ ist also

$$\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = \frac{d(v)}{dx} = 0.$$

Es ist aber klar, dass diese Gleichung, unabhängig von $\frac{d^2y}{dx^2}$, nicht anders erfüllt werden kann, als wenn

Ableitungs-Gleichung zu finden.

man einzeln die Grössen $\frac{dv}{dx}$ und $\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}$ gleich Null setzt. In der That ist, wenn man den gegenwärtigen Ausdruck von $\frac{d(v)}{dx}$ oder $\frac{df\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ mit dem obigen [180.] vergleicht, leicht zu sehen, dass die beiden Gleichungen

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi} = 0 \text{ und } f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

die beiden Gleichungen

$$\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = 0 \text{ und } \frac{dv}{dx} = 0$$

erfordern, und umgekehrt [*denn die beiden Paare von Gleichungen erfüllen die Gleichung*

$$\frac{df\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0, \textit{ unabhängig von } \frac{d^2y}{dx^2}.]$$

Man erhält also die singulaire Stammgleichung der gegebenen

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

wenn man in die davon abgeleitete

$$\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = 0$$

einzeln

$$\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = 0 \text{ und } \frac{dv}{dx} = 0$$

Die singulaire Stammgleichung aus der

setzt und $\frac{dy}{dx}$ zwischen diesen Gleichungen [*die beide nur von ersten Ordnung sind*] und der gegebenen Gleichung $v = 0$ wegschafft.

Geben die beiden Resultate, welche man [*aus diesen drei Gleichungen*] findet, die nemliche Gleichung zwischen x und y, so ist solche die singulaire; geben sie nicht die nemliche Gleichung, so ist es ein Zeichen, dass die gegebene Gleichung keine singulaire Stammgleichung hat.

Haben die beiden Grössen $\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}$ und $\frac{dv}{dx}$ einen gemeinschaftlichen Factor, der $\frac{dy}{dx}$ enthält, so erfüllt dieser Factor, gleich Null gesetzt, beide Bedingungen [*nemlich, dass die beiden Grössen Null sind*] und giebt, wenn man zwischen ihm und der gegebenen Ableitungs-Gleichung $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, die singulaire Stammgleichung. Dieses ist der Fall, wenn die gegebene Gleichung von der Form

$$F(x, y, \varphi) = 0$$

ist, wie wir im Anfange dieser Vorlesung sahen.

Uebrigens giebt es noch allgemeinere Formen, in welchen die abgeleitete Gleichung immer in zwei Factoren zerlegbar ist, von welchen einer die singulaire Stammgleichung giebt. Wir werden davon weiter unten reden.

190.

Ableitungs-Gleichung zu finden.

190.

[*Beispiel.*] Die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$[v=]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(x^2-b)-2xy\frac{dy}{dx}-x^2=0,$$

welche die nemliche ist, die im Anfange dieser Vorlesung vorkam, nur mit $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ multiplicirt, hat folgende erste Abgeleitete:

$$\left[\frac{d(v)}{dx}=\right]2\left(\frac{dy}{dx}(x^2-b)-xy\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2\left(y\frac{dy}{dx}+x\right)=0.$$

Wie man sieht, haben hier die beiden Grössen

$$\left[\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}=\right]2\left(\frac{dy}{dx}(x^2-b)-xy\right) \text{ und}$$

$$\left[\frac{dv}{dx}=\right]-2\left(y\frac{dy}{dx}+x\right)$$

keinen gemeinschaftlichen Factor. Setzt man sie indessen einzeln gleich Null, so geben sie folgende zwei Werthe von $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{xy}{x^2-b} \text{ und } -\frac{x}{y},$$

welche, in die gegebene Gleichung $[v=0]$ gesetzt,

$$\frac{x^2y^2}{x^2-b}+x^2=0 \text{ und } \frac{x^2(x^2-b)}{y^2}+x^2=0$$

geben, welches Beides so viel ist, als

$$x^2(x^2+y^2-b)=0,$$

welche Gleichung also, wie wir schon oben fanden die singulaire Stammgleichung der gegebenen ist.

Die singulaire Stammgleichung aus der

191.

Ich bemerke nun, dass die Gleichung erster Ordnung

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

weil ihre Abgeleitete

$$\frac{dv}{d\frac{dy}{dy}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = 0$$

ist, allgemein

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dv}{dx} : \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}$$

giebt.

Nun ist aber, wie wir so eben sahen, für den Fall der singulairen Stammgleichung, einzeln, $\frac{dv}{dx} = 0$ und $\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = 0$. In diesem Falle ist also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0},$$

welches folgende sehr einfache Methode giebt, die singulaire Stammgleichung jeder Gleichung zu finden, wenn es eine giebt.

Man suche nemlich durch Ableitung der gegebenen Gleichung den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ und setze ihn gleich Null, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, welche, wenn man sie mit der gegebe-

nen, durch Wegschaffung von $\frac{dy}{dx}$ verbindet, zwei Gleichungen zwischen x und y geben. Haben diese einen gemeinschaftlichen Factor, so ist solcher die singulaire Stammgleichung der gegebenen.

192.

[*Beispiele.*] Es ist leicht, dieses Verfahren auf das obige Beispiel anzuwenden.

Es sey ausserdem noch die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\left(x\frac{dy}{dx}-2y\right)+x^3=0$$

gegeben, so ist die Abgeleitete davon:

$$x\left(2x\frac{dy}{dx}-3y\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{dy}{dx}+3x^2=0,$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}-3x^2}{x\left(2x\frac{dy}{dx}-3y\right)}.$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null dividirt durch Null, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}-3x^2=0 \text{ und } 2x\frac{dy}{dx}-3y=0,$$

zwischen welchen $\frac{dy}{dx}$ vermittelst der gegebenen Gleichung eliminirt werden muss. Die zweite Gleichung giebt

Die singulaire Stammgleichung aus der

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{2x}.$$

Setzt man diesen Werth zuerst in die erste Gleichung, so erhält man

$$\frac{3y^2}{4x} - 3x^2 = 0.$$

Setzt man ihn in die gegebene, so erhält man

$$-\frac{y^2}{4} + x^3 = 0,$$

welche Gleichungen sich, wie man sieht, beide auf die Gleichung

$$y^2 - 4x^3 = 0$$

reduciren, die also die singulaire Stammgleichung der gegebenen ist.

Man kann sich davon durch die Stammgleichung überzeugen, welche

$$y - ax - \frac{x^2}{a} = 0$$

ist, mit der willkürlichen Constante a. Ihre Ableitung nach a ist

$$-x + \frac{x^2}{a^2} = 0,$$

welche

$$a^2 = x \text{ und } a = \sqrt{x}$$

giebt. Substituirt man diesen Werth von a in die Stammgleichung zurück, so erhält man

$$y - 2x\sqrt{x} = 0, \text{ oder } y^2 - 4x^3 = 0,$$

welches das Nemliche ist, was wir oben fanden.

Ableitungs-Gleichung zu finden.

193.

Es ist aus dem allgemeinen Ausdrucke von $\frac{d^2y}{dx^2}$ leicht zu sehen, dass für die singulaire Stammgleichung nicht allein diese Grösse gleich Null dividirt durch Null ist, sondern dass auch die Ausdrücke der höhern Ableitungen $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ ebenfalls sämmtlich Null dividirt durch Null sind, wenn man sie auf einfache Functionen von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ *etc.* aus der gegebenen Gleichung reducirt und hernach den Werth von y in x substituirt, wie ihn die singulaire Stammgleichung giebt. [*Da Zähler und Nenner in dem Bruche, der* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *ausdrückt, Null sind, so ist nothwendig auch* $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{0}{0}$. *Denn es sey z. B.* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{q}$, *so ist* $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{q\,dp - p\,dq}{q^2}$, *welches ebenfalls Null durch Null ist, weil sowohl p und q als dp und dq Null sind u. s. w.*]

194.

Man kann diese Eigenschaft der singulairen Stammgleichungen als ihr unterscheidendes Kennzeichen ansehen und sich auch noch auf andere Weise überzeugen, dass die Existenz der Gleichungen in der That davon abhängt, dass die Werthe der Grössen $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ *etc.* in allen Ableitungen höher Ord-

Die singulaire Stammgleichung aus der

nungen unbestimmt bleiben. Denn wären sie es für die singulaire Gleichung nicht, so könnte man auch auf ihren Fall den allgemeinen Ausdruck der zwölften Vorlesung

$$y = oy + x\frac{doy}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2oy}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3oy}{dx^3}\ldots$$

anwenden, in welchem oy, $\frac{doy}{dx}$ *etc.* die Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$ *etc.* für $x = o$ sind. Die Grösse oy, welche die willkürliche Constante ist, würde dann einen besondern, von dieser Gleichung abhängenden, Werth bekommen, so dass der Werth von y in x, statt ein singulairer zu seyn, gegen die Voraussetzung, vielmehr nur ein besonderer seyn würde [*weil alsdann eine Constante vorkommt*].

195.

Hier ist also ein Fall, wo geschieht, was mit allgemeinen Formeln, dann, wenn sie nicht ausdrücken können, was sie allgemein bezeichnen, geschehen muss. Sie geben alsdann Null dividirt durch Null. Dieses ist das Mittel, durch welches die Rechnung Widersprüche vermeidet. Die imaginairen Wurzeln sind im Grunde keine Widersprüche, sondern unmögliche Fälle. [*Eine wichtige und eben so wahre als interessante Bemerkung.*]

196.

Die obige Theorie lässt sich auch auf Ableitungs-Gleichungen höherer Ordnungen anwenden, und es finden sich für dieselben ähnliche Sätze.

Ableitungs-Gleichung zu finden.

Es sey

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0$$

die Stammgleichung erster Ordnung einer Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, so lässt sich letztere, wie wir oben sahen, auf

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi\right) = 0$$

reduciren [184.] und ihre abgeleitete ist alsdann

$$\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi\right)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Welche Form aber auch eine gegebene Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung haben mag: immer kann sie, weil sie das Resultat der nemlichen Elimination ist, die die Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi\right) = 0$$

giebt, nichts anders als diese Gleichung selbst, multiplicirt mit irgend einer Function mit Ableitungen, von der nemlichen oder von niedrigern Ordnungen, seyn.

Wäre also

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

die gegebene Gleichung, so wäre nothwendig

$$v = M.F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi\right),$$

wo M irgend eine Function von $x, y, \frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$

bedeutet. Nimmt man hiervon die erste Ableitung und setzt $\frac{dF\left(x,y,\frac{dy}{dx},\varphi\right)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$ statt $\frac{dF\left(x,y,\frac{dy}{dx}\varphi\right)}{dx}$ [*weil der zweite Theil* $\frac{dv}{dx}$ *dieser letzten Grösse an und für sich Null ist* (184.)], so erhält man, wie oben, die Gleichung

$$\frac{d(v)}{dx} =$$

$$M.\frac{dF\left(x,y,\frac{dy}{dx},\varphi\right)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+dM.f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad [188.]$$

woraus leicht zu sehen, dass der Ableitung der gegebenen Gleichung $\frac{d(v)}{dx}$, unabhängig von der dritten Ableitung $\frac{d^3y}{dx^3}$, vermittelst der beiden Gleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{dF\left(x,y,\frac{dy}{dx},\varphi\right)}{d\varphi} = 0 \text{ und}$$

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

von welchen die zweite die gegebene ist, genügt werden kann [*wie oben*] und dass man also die singulaire Stammgleichung von dieser findet, wenn man zwischen diesen beiden Gleichungen $\frac{d^2y}{dx^2}$ eliminirt.

Nun ist die Ableitung der gegebenen Gleichung von der Form

Ableitungs-Gleichung zu finden.

$$\frac{d(v)}{dx} = \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dv}{dx} = 0,$$

[*wo* $\frac{dv}{dx}$ *denjenigen Theil von* $\frac{d(v)}{dx}$ *bezeichnet, der sich auf die Ableitung nach* x *in allen den Grössen, die* v *enthält, ausser* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *bezieht. Diesen letzten Theil von* $\frac{d(v)}{dx}$ *bezeichnet* $\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}$, *ähnlicherweise, wie in* (189.)]. Dieser Gleichung kann man unabhängig von $\frac{d^3y}{dx^3}$ nicht anders genug thun, als durch die beiden einzelnen Gleichungen

$$\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} = 0 \text{ und } \frac{dv}{dx} = 0.$$

Man muss also $\frac{d^2y}{dx^2}$ zwischen diesen beiden Gleichungen und der gegebenen $v = 0$ wegschaffen. Geben die beiden Resultate die nemliche Gleichung, so ist solche die singulaire Stammgleichung der gegebenen.

Man sieht zugleich, dass, weil allgemein

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dv}{dx} : \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}$$

ist, die beiden Gleichungen diesen Werth von $\frac{d^3y}{dx^3}$

Die singulaire Stammgleichung aus der

zu Null durch Null machen, so dass man die Bedingung $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{0}{0}$ als diejenige betrachten kann, welche die singulaire Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung bestimmt.

197.

Verfährt man auf gleiche Weise bei einer beliebigen nten Ordnung der Ableitungen, so erhält man den Satz, dass man, um von einer gegebenen Ableitungs-Gleichung nter Ordnung, die singulaire Stammgleichung wenn es eine dergleichen giebt, zu finden, aus der ersten abgeleiteten der gegebenen Gleichung den Werth der Ableitung $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ der folgenden Ordnung entwickeln, denselben gleich $\frac{0}{0}$ setzen und zwischen den beiden Gleichungen, welche die Voraussetzung giebt, dass Zähler und Nenner gleich Null sind, die Grösse $\frac{d^ny}{dx^n}$, vermittelst der gegebenen Gleichung wegschaffen muss.

Geben diese beide Eliminationen das nemliche Resultat, so ist solches die gesuchte singulaire Stammgleichung.

[*Da das Verfahren und das ganze Raisonnement völlig dasselbe ist, die gegebene Gleichung mag von der ersten, oder zweiten, oder einer hö-*

Ableitungs-Gleichung zu finden.

hern Ordnung seyn, so entsteht daraus, dass man von den Gleichungen niedrigerer Ordnungen ausgeht und dann allmählig zu den Gleichungen höherer Ordnungen fortschreitet, keine Erleichterung. Man kann also auch, ohne dass die Beweise im geringsten erschwert würden, sogleich von den Gleichungen einer beliebigen Ordnung reden, ohne erst von den niedrigern Ordnungen anzufangen. Diese allgemeinen Resultate fassen dann die besondere Fälle niedriger Ordnungen schon in sich.]

198.

[*Erstes Beispiel.*] Wir sahen weiter oben [*in* 185.], dass von der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} : x + 1 = 0$$

die Abgeleitete in zwei Factoren zerlegbar ist, deren einer, welcher nur von der zweiten Ordnung ist, auf der Stelle durch Wegschaffung von $\frac{d^2y}{dx^2}$, die singulaire Stammgleichung giebt. Wäre hingegen die nemliche Gleichung unter der Form

$$x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + x = 0$$

gegeben, so wäre ihre Abgeleitete

$$2\left(x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right)\frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

nicht mehr in Factoren zerlegbar.

Sie giebt aber

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 1}{2\left(x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\right)}.$$

Setzt man Zähler und Nenner dieses Bruchs gleich Null, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 1 = 0 \text{ und } x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

Die erste giebt $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm 1$, welches, in die gegebene Gleichung gesetzt,

$$2\left(x \pm \frac{dy}{dx}\right) = 0, \text{ oder } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0$$

giebt.

Die zweite giebt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} : x,$$

woraus. wenn man solches in die gegebene Gleichung substituirt,

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 : x + x = 0, \text{ oder } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0$$

folgt. [*Also das Nemliche.*]

199.

[*Zweites Beispiel.*] Wir wollen noch die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung

$$y - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

nehmen.

Ableitungs-Gleichung zu finden.

Man nehme die erste Ableitung davon, um $\frac{d^3y}{dx^3}$ zu finden, so erhält man

$$\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{d^2y}{dx^2}+\tfrac{1}{2}x^2\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+2\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)x\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}=0,$$

oder

$$\left(\tfrac{1}{2}x^2+2\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)x-2\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3}=0,$$

wo man, wie man sieht, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{0}{0}$ erhält, wenn man den Factor, welchen $\frac{d^3y}{dx^3}$ multiplicirt, gleich Null setzt [*so dass also* $\frac{d^3y}{dx^3}$, *oder allgemein*, $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ (197.) *nicht nothwendig die Bruchform haben darf.*]

Man erhält also nur die einzelne Bedingung

$$\tfrac{1}{2}x^2+2\left(\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right)x-2\frac{dy}{dx}=0,$$

woraus

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4x\frac{dy}{dx}+x^2}{4(1+x^2)}$$

folgt. Substituirt man diesen Werth in die gegebene Gleichung, so erhält man die singulaire Stammgleichung

Die singulaire Stammgleichung aus der

$$y - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2\,\frac{4x\frac{dy}{dx} + x^2}{4(1+x^2)}$$

$$- \frac{\left(4\frac{dy}{dx} - x^3\right)^2 + \left(4x\frac{dy}{dx} + x^2\right)^2}{16(1+x^2)} = 0,$$

welche sich auf

$$y - \frac{2x + x^3}{2(1+x^3)}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{x^4 - 16\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{16(1+x^2)} = 0$$

reduciren lässt.

Die Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung

$$\left(\tfrac{1}{2}x^2 + 2\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)x - 2\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

welche wir oben für die Ableitung der gegebenen Gleichung zweiter Ordnung fanden, giebt auch

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

woraus, der Reihe nach, wenn man wiederholt die Stammgrösse nimmt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a,\ \frac{dy}{dx} = ax + b \text{ und}$$

$$y = \tfrac{1}{2}ax^2 + bx + c$$

folgt, wo a, b, c willkürliche Constanten sind, wie sie der Gleichung $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ entsprechen. Da indessen die gegebene Gleichung nur von der zweiten Ordnung ist, so hat sie eine Constante weniger. Substituirt man darin die obigen Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$,

Ableitungs-Gleichung zu finden.

und $\frac{d^2y}{dx^2}$, so erhält man

$$c - b^2 - a^2 = o,$$

welches

$$c = a^2 + b^2$$

giebt, so dass die Stammgleichung zwischen x und y,

$$y = \tfrac{1}{2} ax^2 + bx + a^2 + b^2$$

ist, wie wir weiter oben sahen. [172.]

In diesem Falle also geben die beiden Factoren der Abgeleiteten von der gegebenen Ableitungs-Gleichung gradezu, der eine, die singulaire Stammgleichung erster Ordnung, der andere, die Urgleichung in x und y, wie wir Solches schon oben bei einem andern Beispiele sahen [183.]

200.

Wir sahen im Anfange dieser Vorlesung [*in* 182.], dass die Ableitungs-Gleichung einer gegebenen Gleichung

$$u = F(x, y, a) = o$$

durch

$$v = F(x, y, \varphi) = o$$

ausgedrückt werden kann, wo φ denjenigen Ausdruck $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ bedeutet, welchen man erhält, wenn man den Werth von a aus der von $u = o$ abgeleiteten Gleichung $\frac{du}{dx} = o$ nimmt. Auch sa-

Die singulaire Stammgleichung aus der

hen wir, dass für die singulaire Stammgleichung von $v = 0$ die Grösse $\frac{du}{da}$ gleich Null ist. [182.]

Man setze nun, die gegebene Ableitungs-Gleichung sey auf die Form

$$\frac{dy}{dx} + f(x, y) = 0$$

gebracht worden, was immer angeht, so muss die Gleichung $u = F(x, y, \varphi) = 0$ nothwendig in eine identische [*in welcher sich Alles von selbst aufhebt*] übergehen, wenn man statt $\frac{dy}{dx}$ [*aus der Gleichung* $\frac{dy}{dx} + f(x, y) = 0$] seinen Werth $-f(x, y)$ setzt [*welcher, der Kürze wegen, durch p bezeichnet werden mag, so dass*

$$\frac{dy}{dx} = -f(x, y) = -p].$$

Die Ableitungen dieser Gleichungen nach x und y müssen also einzeln Null seyn. [*Denn, weil die Gleichung identisch ist, so folgt daraus keine Abhängigkeit zwischen x und y. Also finden die nach x und y abgeleiteten Gleichungen, einzeln, von einander unabhängig, Statt.*]

Da nun $\frac{dy}{dx}$ nur allein in φ vorkommt, [*denn ausserdem enthält u kein* $\frac{dy}{dx}$,] so sind die beiden nach x und nach y abgeleiteten Gleichungen von $u = 0$,

$\frac{du}{dx}$

Ableitungs-Gleichung zu finden.

$$\frac{du}{dx} - \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{du}{dy} - \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dy} = 0$$

[So steht, wenn man die dortigen Zeichen in die gegenwärtigen übersetzt, im Text. Man darf aber mit dèn Zeichen $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ nicht die sonst gewöhnliche Vorstellungen verbinden, weil sonst die Ausdrücke nicht richtig sind. Lässt man nemlich $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ die ersten Ableitungen von u nach allen x und y bedeuten, die in u vorkommen, sey es entwickelt oder unentwickelt, so drükken $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ schon die vollständigen Ableitungen von u nach x und y aus und es findet weiter kein zweites Glied Statt. Diese Bedeutung von $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ ist auch sonst durch $\frac{d(u)}{dx}$ und $\frac{d(u)}{dy}$ angezeigt worden. Lässt man dagegen $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ blos die Ableitungen nach denjenigen x und y bedeuten, die in u, ausserhalb φ vorkommen, so sind die vollständigen, von u, nach x und y abgeleiteten Gleichungen,

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dy} = 0;$$

denn ausser $\frac{dy}{dx}$ *oder* $-p$ *kommt auch noch* x *und* y *in* φ *vor, worauf sich also ebenfalls die Ableitungs-Operation beziehen muss. Man muss also in den obigen beiden Ausdrücken unter* $\frac{du}{dx}$ *und* $\frac{du}{dy}$, *hier* $\frac{du}{dx}+\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}$ *und* $\frac{du}{dy}+\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dy}$ *verstehen.*]

Dieses giebt

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dp}} \text{ und } \frac{dp}{dy}=\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dp}}.$$

Nun aber ist für die singulaire Stammgleichung die Grösse $\frac{du}{d\varphi}$ gleich Null [182.], also sind für diese Gleichungen die beiden Grössen $\frac{dp}{dx}$ und $\frac{dp}{dy}$ unendlich gross.

Dieser Umstand giebt ein einfaches Mittel an die Hand, zu erkennen, ob ein Ausdruck ohne willkürliche Constante, welcher einer gegebenen Ableitungs-Gleichung genug thut, eine singulaire Stammgleichung, oder blos ein einzelner Fall der allgemeinen Stammgleichung ist. Auch kann diese Eigenschaft dienen, die singulairen Werthe, deren eine Ableitungs-Gleichung fähig ist, zu finden; denn wenn eine Gleichung, für welche $\frac{dp}{dx}$ und $\frac{dp}{dy}$ unendlich gross sind, zugleich der gegebenen Gleichung

Ableitungs-Gleichung zu finden.

$$\frac{dy}{dx}+f(x,y)=0$$

genug thut, so ist sie die singulaire Stammgleichung.

201.

[*Beispiel.*] Die oben [*in* 158. *und* 183.] zum Beispiel genommene Gleichung

$$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y}=0$$

giebt

$$\left[\frac{dy}{dx}=p=\right]f(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y},$$

woraus

$$\frac{dp}{dy}=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y}+\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}(\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y)^2}$$

und

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}(\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y)^2}$$

folgt.

Diese beide Grössen sind unendlich gross, wenn man

$$\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y=0 \text{ und}$$

$$\sqrt{(x^2+y^2-b)}=0$$

setzt. Das erste giebt

$$x^2-b=0,$$

welches der gegebenen Gleichung nur dann entsprechen kann, wenn

$$b=0$$

ist.

Die singulaire Stammgleichung aus der

[*Der Grund hiervon ist nicht ganz deutlich. Wahrscheinlich ist es folgender. Nemlich,* $x^2 - b = 0$ *in die gegebene Gleichung* $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y}$ *gesetzt, würde* $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y-y} = 0$, *also* $\frac{dy}{dx} = \infty$ *geben, während, das Nemliche in die Stammgleichung der gegebenen Gleichung* $x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$ (183.) *gesetzt,* $-2ay - a^2 = 0$, *also* $y = a$ *und folglich* $\frac{dy}{dx} = 0$ *giebt. Dieser Widerspruch hört auf, wenn* $b = 0$ *gesetzt wird. Denn dieses giebt* $x^2 = 0$, *also* $x = 0$ *und* $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, *welches Null seyn kann.*]

Das zweite giebt

$$x^2 + y^2 - b = 0,$$

welche Gleichung der gegebenen genug thut [*denn sie giebt, auf die gegebene angewandt,* $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{-y} = 0$, *oder* $y\frac{dy}{dx} = -x$ *und, zurückgeleitet,* $y^2 = -x^2 + b$, *oder* $x^2 + y^2 - b = 0$]. Diese Gleichung also ist, wie wir schon oben sahen, die singulaire Stammgleichung.

202.

Wir wollen diese Theorie auch auf Ableitungs-Gleichungen zweiter Ordnung anwenden.

Wie wir oben sahen [184*] kann eine solche Gleichung auf

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi\right) = 0$$

gebracht werden, wenn man ihre erste Stammgleichung:

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0$$

setzt, wo φ oder $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ der aus der ersten Abgeleiteten $\frac{du}{dx} = \frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0$ folgende Werth von a ist.

Wir sahen ferner, dass die singulaire Stammgleichung alsdann durch die Gleichung

$$\frac{du}{d\varphi} = 0$$

bestimmt wird. [184.]

Man setze nun, die gegebene Gleichung sey auf die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

gebracht worden. Substituirt man in die Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$ den hieraus folgenden Werth $-f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ von $\frac{d^2y}{dx^2}$ [*der* $-p$ *seyn mag, so dass* $\frac{d^2y}{dx^2} = -f\left(x, y, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = -p$ *ist*], so erhält man eine identische Gleichung, von welcher also die nach x, y, $\frac{dy}{dx}$ abgeleiteten, einzeln und unabhängig von ein-

Die singulaire Stammgleichung aus der

ander, Statt finden [*auf eine ähnliche Weise wie in* 200].

Da nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ nur allein in φ vorkommt, so erhält man die drei Gleichungen

$$\frac{du}{dx} - \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = 0,$$

$$\frac{du}{dy} - \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dp}{dy} = 0,$$

$$\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} - \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{d\varphi}{d\frac{dy}{dx}} = 0,$$

[*wegen der Bedeutung von* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ *und* $\frac{du}{d\frac{dy}{dx}}$ *ist das Nemliche zu bemerken, wie in* (200.)], woraus folgt:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{d\varphi} : \frac{d\varphi}{dp}},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp}},$$

$$\frac{dp}{d\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{du}{d\frac{dy}{dx}}}{\frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp}}.$$

Da nun die singulaire Stammgleichung durch

$$\frac{du}{da} = 0$$

Ableitungs-Gleichung zu finden.

bestimmt wird, so folgt, dass für dieselbe die drei Grössen $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$ und $\frac{dp}{d\frac{dy}{dx}}$ unendlich gross seyn müssen.

203.

Auf die nemliche Art kann man zeigen, dass, wenn man eine Ableitungs-Gleichung nter Ordnung auf die Gestalt

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

bringt, für ihre singulaire Stammgleichung, wenn man der Kürze wegen, die Grösse $f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$ durch p bezeichnet, alle die Ableitungen $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{d\frac{dy}{dx}} \dots \frac{dp}{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}$ unendlich gross sind.

204.

Um diesen Umstand a posteriori zu bestätigen, nehme man eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, wie

$$\frac{dy}{dx} + f(x, y) = 0$$

an, welcher ein singulairer Werth von y genug thun soll, den wir durch X bezeichnen wollen, welches X irgend eine Function von x bedeutet.

Die singulaire Stammgleichung aus der

Der Voraussetzung zu Folge, ist also

$$\frac{dX}{dx} + f(x, X) = 0.$$

Damit nun der Werth X von y nicht unter den verschiedenen möglichen Werthen von y, welche die Stammgleichung giebt, mit befindlich sey, muss, wenn man allgemein

$$y = X + z$$

setzt, wo z eine neue veränderliche Grösse bedeutet, [*die von x abhängt*] der Werth von z, welchen die gewöhnliche Stammgleichung giebt, nie Null seyn können [*denn sonst würde $y = X + z$ in $y = X$ übergehen und also der Werth von X irgend einem Werthe von y gleich seyn, welches gegen die Voraussetzung ist.*]

Man setze also in die gegebene Gleichung $X + z$ statt y, so erhält man

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dz}{dx} + f(x, X + z) = 0.$$

Man entwickele die Function $f(x, X + z)$ nach den Potenzen von z, so erhält man

$$f(x, X + z) =$$
$$f(x, X) + z\frac{df(x, X + z)}{dX} + \frac{z^2}{2}\frac{d^2 f(x, X + z)}{dX^2} \ldots.$$

Substituirt man Dieses in die obige Gleichung $\left[\frac{dX}{dx} + \frac{dz}{dx} + f(x, X + z) = 0\right]$, so erhält man

$$\left[\frac{dX}{dx} + \frac{dz}{dx} + f(x, X) + z\frac{df(x, X + z)}{dX} \ldots = 0,\right.$$

oder] weil $\frac{dX}{dx} + f(x, X) = 0$ ist,

Ableitungs-Gleichung zu finden.

$$\frac{dz}{dx} + z\frac{df(x, X+z)}{dX} + \frac{z^2}{2}\frac{d^2f(x, X+z)}{dX^2} \ldots = 0;$$

welche Gleichung dient, z in x zu bestimmen.

Könnte nun z gleich Null seyn, so könnte es auch sehr klein seyn [*in so fern die Veränderung von z nur stetig erfolgen kann*]. Man setze den Werth von z sehr klein und suche seinen Werth näherungsweise.

Man kann in diesem Falle sogleich die Glieder welche z^2, z^3 *etc.* enthalten, gegen das Glied mit z weglassen, weil sie viel kleiner sind. Man erhält auf diese Weise, für den ersten sich nähernden Werth, die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + z\frac{df(x, X+z)}{dX} = 0,$$

welche, mit z dividirt, die Stammgleichung

$$\overset{e}{log}\, z + \overset{1}{X} = k$$

hat, wenn $\overset{1}{X}$ die erste Stammgrösse von $\frac{df(x, X+z)}{dX}$, nach x genommen, von welcher X eine gegebene Function ist, k aber eine willkürliche Constante bedeutet.

Daraus folgt

$$z = e^{k-\overset{1}{X}} = e^k . e^{-\overset{1}{X}} = ae^{-\overset{1}{X}},$$

wenn man $e^k = a$ setzt.

Diesen ersten, sich nähernden Werth von z kann man in die weggelassenen Glieder setzen und daraus einen mehr sich nähernden Werth finden u. s. w.

Die singulaire Stammgleichung aus der

Wie man aber sieht, enthält z die Constante a und ist Null für $a = 0$; folglich ist X, gegen die Voraussetzung, kein singulairer Werth.

Daraus folgt, dass die Entwickelung von $f(x, X + z)$ andere Potenzen von z, als mit ganzen und positiven Exponenten enthalten muss, wenn X ein singulairer, nicht in dem allgemeinen Ausdrucke enthaltener Werth seyn soll.

Man setze also, die Entwickelung von $f(x, X + z)$ gebe

$$f(x, X + z) = f(x, X) + Pz^m + Qz^n \ldots,$$

wo m und n beliebige steigende Zahlen, und P, Q etc. Functionen von x sind, so erhält man [*auf die Weise wie oben*] für z, die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + Pz^m + Qz^n \ldots = 0.$$

Man erhält also, für die erste Näherung,

$$\frac{dz}{dx} + Pz^m = 0,$$

welches, mit z dividirt,

$$\frac{z^{1-m}}{1-m} + V = k$$

zur Stammgleichung hat, wenn man die Stammgrösse zu P durch V bezeichnet, und k eine willkürliche Constante ist.

Damit nun X ein singulairer Werth von y sey, muss der ihm entsprechende Werth $z = 0$, wenn man k einen beliebigen constanten Werth giebt, nicht in der obigen Gleichung enthalten seyn können.

Ableitungs-Gleichung zu finden.

Der Exponent $1-m$ von z muss also eine positive Zahl seyn; denn wäre er negativ, so würde z^{1-m}, für $z=0$, unendlich gross seyn, und folglich der Voraussetzung $k=\infty$ entsprechen.

Wäre er Null, so hätte man den vorigen Fall, wo $m=0$ war, und z dem Werthe $k=\infty$ entsprach.

Ist hingegen $1-m$ positiv, so giebt $z=0$ auch

$$z^{1-m}=0,$$

und die Gleichung giebt

$$V=k,$$

welches nicht möglich ist, weil der Werth von k veränderlich seyn würde.

Damit also X ein singulairer Werth von y seyn könne, muss die Entwickelung von $f(x, X+z)$ eine Potenz z^m enthalten, in welcher $m<1$ ist.

Man nehme die Grösse $f(x,y)$. Die Entwikkelung derselben giebt, wenn man $y+z$ statt y setzt,

$$f(x,y)+z\frac{df(x,y)}{dy}\dots.$$

Nach der Theorie der achten Vorlesung muss, im Fall die Entwickelung für $y=x$ eine Potenz von z giebt, deren Exponent kleiner als 1 ist, der Werth von $\frac{df(x,y)}{dx}$, das heisst von $\frac{dx}{dy}$, unendlich gross seyn.

Nun folgt aus der gegebenen Gleichung,

Die singulaire Stammgleichung aus der

$$\frac{dy}{dx} = -f(x,y) = -p.$$

Nimmt man hiervon die Ableitungen, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = -\frac{dp}{dx} + p.\frac{dp}{dy},$$

nebst

$$\frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy} - \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Man erhält also, für $y = X$,

$$\frac{dp}{dy} = \infty \text{ und } \frac{dp}{dx} = \infty,$$

wie wir oben aus der Natur der Ableitungs-Gleichungen selbst fanden.

205.

[*Beispiel.*] In dem obigen Beispiele, wo

$$f(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y}$$

war, ist der singulaire Werth von y gleich $\sqrt{(b-x^2)}$, also

$$X = \sqrt{(b-x^2)}.$$

Setzt man $\sqrt{(b-x^2)}+z$ statt y, so geht die obige Function in

$$-\frac{x}{\sqrt{(2z(b-x^2)+z^2)}-\sqrt{(b-x^2)}-z}$$

über, welche, nach z entwickelt,

$$\frac{x}{\sqrt{(b-x^2)}} + \frac{\sqrt{2z}}{(b-x^2)^{\frac{3}{4}}} - \dots.$$

Ableitungs-Gleichung zu finden.

giebt, wo, wie man sieht, der zweite Theil der Entwickelung die Potenz $\sqrt{z}$ enthält, deren Exponent $\frac{1}{2}$, kleiner als 1 ist.

Oben sahen wir schon, dass die Werthe von $\frac{dp}{dy}$ und $\frac{dp}{dx}$, für

$$y^2 + x^2 - b = 0,$$

unendlich gross sind.

206.

Die Rechnung, durch welche wir zeigten, dass wenn man y einen singulairen Werth beilegt, die Entwickelung von $f(x, y + z)$ eine Potenz von z enthalten müsse, deren Exponent kleiner als 1 ist, rührt von Euler her, welcher auf diese Weise zuerst ein allgemeines Kennzeichen [*critaire. Dieses Wort für criterium ist sonst im Französichen nicht gewöhnlich*] angab, an welchem sich erkennen lässt, ob ein Werth, welcher einer Ableitungs-Gleichung genug thut, ein singulairer, in ihrem Integral enthaltener Werth sey, oder nicht. Man sehe die 72te Aufgabe im ersten Bande der Integral-Rechnung.

Es war noch übrig, daraus den Satz zu beweisen, dass in diesem Falle der Werth von $\frac{dp}{dy}$ nothwendig unendlich gross seyn muss. Dieses hat seitdem Laplace in dem oben erwähnten Mémoire über die particulairen Differential-Gleichungen ge-

than, welches man in der Sammlung der Academie der Wissenschaften für 1772 findet.

[*Es ist erfreulich, zu sehen, wie sorgfältig der grosse* L a g r a n g e *bei allen Gelegenheiten Jedem sein Eigenthum verwahrt. Warlich ein beherzigens- und nachahmenswerthes Verfahren!*]

Sechszehnte Vorlesung

Ableitungs-Gleichungen gegebener singulairer Stammgleichungen. Untersuchung einer Gattung von Gleichungen aller Ordnungen, welche nothwendig singulaire Stammgleichungen haben.

207.

Obgleich die singulairen Stammgleichungen, weil sie keine willkürlichen Constanten haben, weniger allgemein sind, als die eigentlichen Stammgleichungen, so sind sie doch auf der andern Seite auch wieder allgemeiner, indem eine und dieselbe singulaire Stammgleichung einer unendlichen Menge von Ableitungs-Gleichungen genug thun kann. Die zu einer gegebenen singulairen Stammgleichung gehörige Ableitungs-Gleichung zu finden, ist eine unbestimmte Aufgabe. Da dieselbe interessant und die Auflösung zuweilen nützlich ist, so wollen wir eine solche Auflö-

sung, als Ergänzung unserer Theorie der singulairen Stammgleichungen, mittheilen.

Die Ableitungs-Gleichung einer singulairen Stammgleichung zu finden.

I. Wenn die gegebene Stammgleichung keine Ableitungen enthält.

208.

Es sey

$$u = F(x, y, a, b) = 0$$

eine Stammgleichung zwischen x, y und den beiden Constanten a und b, von welchen Constanten die eine irgend eine Function der andern ist, so dass a und b z. B. durch die Gleichnng

$$\Phi(a, b) = 0$$

von einander abhängen, so erhält man die Ableitungs-Gleichung zu $u = 0$, wenn man die beiden Constanten zwischen den drei Gleichungen

$$u = 0, \frac{du}{dx} = 0 \text{ und } \varphi(a, b) = 0$$

eliminirt.

Nimmt man also die Werthe von a and b in $x, y, \frac{dy}{dx}$ aus den beiden Gleichungen $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$, bezeichnet sie durch

$$[a =] \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \text{ und } [b =] \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

und

gegebenen *Stammgl. zu finden.*

und substituirt sie statt a und b in die Bedingungs-Gleichung

$$\Phi(a, b) = 0,$$

so erhält man die Ableitungs-Gleichung.

Schreibt man [*der Kürze wegen*] blos φ und Ψ statt $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ und $\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, so ist die Ableitungs-Gleichung:

$$\Phi(\varphi, \Psi) = 0.$$

Umgekehrt also hat jede Ableitungs-Gleichung von dieser Gestalt, eine Gleichung, wie

$$u = F(x, y, a, b) = 0$$

zur Stammgleichung, in welcher die beiden Constanten a und b durch die Gleichung

$$\Phi(a, b) = 0$$

mit einander verbunden sind, während auch noch die beiden Gleichungen

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = a \text{ und } \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = b$$

Statt finden.

Jeder Werth von y in x, welcher der Gleichung

$$\Phi(\varphi, \Psi) = 0$$

genugthut, während φ und Ψ nicht constante Grössen sind, ist also in der gewöhnlichen vollständigen Stammgleichung nicht enthalten und folglich ein singulairer Werth [*weil die singulaire Stammgleichung diejenige ist, für welche a und b veränderliche Werthe haben.*]

Die Ableitungs-Gleichung einer

Ein solcher singulairer Werth von y sey

$$y = \Sigma x.$$

Man setze in φ und Ψ, Σx und $\frac{d\,\Sigma x}{dx}$ statt y und $\frac{dy}{dx}$, so gehen diese Grössen, weil Σx eine gegebene Function von x ist, blos in Functionen von x über. Eliminirt man zwischen denselben x, so erhält man eine Gleichung zwischen φ und Ψ, für welche man die Gleichung

$$\Phi(\varphi, \Psi) = 0$$

annehmen kann. Die Gleichung

$$y = \Sigma x$$

thut also der Gleichung

$$\Phi(\varphi, \Psi) = 0$$

genug. Da aber für selbige die Functionen φ und Ψ nicht constant sind, so ist sie in der allgemeinen Stammgleichung nicht enthalten und folglich nur eine singulaire Stammgleichung.

209.

Die Auflösung ist daher nunmehr folgende.

Es sey

$$y = \Sigma x$$

ein gegebener singulairer Werth von y in x. Nimmt man irgend eine Gleichung

$$u = F(x, y, a, b) = 0$$

zwischen x, y und den beiden Constanten a und b an, so erhält man aus dieser Gleichung und ihrer

singulairen Stammgleichung zu finden.

Abgeleiteten $\frac{du}{dx} = 0$ die Werthe von a und b. Substituirt man in diese Ausdrücke von a und b, Σx und $\frac{d\Sigma x}{dx}$ statt y und $\frac{dy}{dx}$, so erhält man zwei Gleichungen, welche, wenn man x eliminirt, eine Gleichung zwischen a und b geben, die ich durch

$$\Phi(a, b) = 0$$

bezeichnen will.

Setzt man nun in diese Gleichung statt a und b ihre ersten Werthe in Functionen von x, y und $\frac{dy}{dx}$, so erhält man eine Ableitung-Gleichung, von welcher

$$y = \Sigma x$$

die singulaire Stammgleichung und

$$u = F(x, y, a, b) = 0$$

die vollständige Stammgleichung ist. Die Constanten a und b sind von einander Functionen, die durch die Gleichung

$$\Phi(a, b) = 0$$

bestimmt werden.

210.

[*Beispiel.*] Wir wollen die Gleichung

$$y^2 - ax^2 - b = 0$$

zum Beispiel nehmen. Ihre abgeleite ist

$$\frac{dy}{dx} - ax = 0.$$

Diese beiden Gleichungen geben

Die Ableitungs-Gleichung einer

$$a = y\frac{dy}{dx} : x \text{ und } b = [y^2 - ax^2 =] \, y^2 - xy\frac{dy}{dx}.$$

Nun nehme man, als singulaire Stammgleichung, die Gleichung

$$y - Ax - B = 0$$

an. Dieselbe giebt

$$y = Ax + B,$$

oder

$$y^2 = A^2 x^2 + 2ABx + B^2,$$

und [*wenn man davon die Ableitungen nimmt*]

$$y\frac{dy}{dx} = A^2 x + AB.$$

Substituirt man Dieses [*nemlich die Werthe von* y *und* $\frac{dy}{dx}$] in die obigen Ausdrücke von a und b, so erhält man

$$a = A^2 + \frac{AB}{x} \text{ und}$$

$$[b = A^2 x^2 + 2ABx + B^2 - x(A^2 x + AB), \text{ oder}]$$

$$b = ABx + B^2.$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen x, so erhält man [*weil die zweite*, $x = \frac{b - B^2}{AB}$ *giebt, vermöge der ersten*, $a = A^2 + \frac{A^2 B^2}{b - B^2}$, *also*] folgende Gleichung zwischen a und b:

$$(a - A^2)(b - B^2) = A^2 B^2, \text{ oder}$$

$$[ab - aB^2 - A^2 b + A^2 B^2 = A^2 B^2, \text{ oder}]$$

$$ab - B^2 a - A^2 b = 0.$$

Substituirt man hierin die obigen Werthe von a und

singulairen Stammgleichung zu finden.

b in x, y und $\frac{dy}{dx}$ [*nemlich* $a = y\frac{dy}{dx} : x$ *und* $b =$ $y^2 - xy.\frac{dy}{dx}$], so erhält man folgende Ableitungs-Gleichung erster Ordnung:

$$\frac{y\frac{dy}{dx}}{x}\left(y^2 - xy\frac{dy}{dx}\right) - B^2\frac{y\frac{dy}{dx}}{x} - A^2\left(y^2 - xy\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

von welcher [*die vorausgesetzte Gleichung*]

$$y - Ax - B = 0$$

die singulaire Stammgleichung ist.

Die gewöhnliche vollständige Stammgleichung davon ist, unter Voraussetzung der obigen Bedingungs-Gleichung

$$ab - B^2 a - A^2 b = 0,$$

vermöge welcher $b = \frac{B^2 a}{a - A^2}$ ist:

$$y^2 - ax^2 - b = 0,$$

also eigentlich

$$y^2 - ax^2 - \frac{B^2 a}{a - A^2} = 0,$$

wenn a die willkürliche Constante bedeutet.

In der That erhält man, wenn man, dieser Gleichung gemäss, die singulaire Stammgleichung such und deshalb die Ableitung nach a nimmt [*um* a, *nach der obigen Theorie, für den singulairen Fall zu finden,* $-x^2 - \frac{B^2}{a - A^2} + \frac{B^2 a}{(a - A^2)^2} = 0$, *oder*

$$-x^2 - \frac{aB^2 - A^2 B^2 + B^2 a}{(a - A^2)^2} = 0, \textit{ oder}]$$

Die Ableitungs-Gleichung einer

$$-x^2+\frac{B^2A^2}{(a-A^2)^2}=0,$$

woraus $[x^2=\frac{B^2A^2}{(a-A^2)^2}$, *oder* $x=\pm\frac{BA}{a-A^2}$, *oder* $(a-A^2)x=\pm BA$, *oder*]

$$a=A^2\pm\frac{BA}{x}$$

folgt. Setzt man diesen Werth in die Gleichung $\left[y^2-ax^2-\frac{B^2a}{a-A^2}=0\right]$ zurück, so erhält man

$$\left[y^2-A^2x^2\pm ABx-\frac{A^2B^2\pm\frac{B^3A}{x}}{\pm\frac{BA}{x}}=0, \text{ oder}\right.$$

$$\left.y^2-A^2x^2\mp ABx-ABx-B^2=0, \text{ oder}\right]$$

$$y^2-A^2x^2\mp 2ABx-B^2=0,$$

woraus, mit willkürlichem Zeichen, folgt:

$$y=\pm(Ax\pm B)$$

[*welches wirklich die vorausgesetzte singulaire Stammgleichung ist.*

Eine singulaire Stammgleichung zu einer gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist irgend ein Werth oder Ausdruck von y in x, welcher in der vollständigen Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung mit einer willkürlichen Constante, für keinen Werth der Constante enthalten ist, sondern nur dann entsteht, wenn man der Constante, in der vollständigen Stammgleichung, einen veränderlichen Werth giebt. Daraus folgt zunächst, dass zu ei-

ner gegebenen singulairen Stammgleichung unzählige verschiedene vollständige Stammgleichungen möglich sind, oder dass die Form der zugehörigen vollständigen Stammgleichung willkürlich ist. Die singulaire und die vollständige Stammgleichung haben keine andere Verbindung mit einander, als denjenigen veränderlichen Ausdruck der Constante in der vollständigen Stammgleichung, vermöge welcher dieselbe in die singulaire Stammgleichung übergeht, welcher Ausdruck dadurch bestimmt wird, dass beide, die vollständige und die singulaire Stammgleichung, einerlei Ableitungs-Gleichung haben sollen.

Nähme man nun zu einer gegebenen singulairen Stammgleichung willkürlich eine vollständige Stammgleichung mit einer Constante an, so würde die Ableitungs-Gleichung der letzten, weil sie keine Constante mehr enthält, völlig bestimmt seyn und folglich nicht mehr nothwendig zu der gegebenen singulairen Stammgleichung passen. Obgleich also die Form der zu einer gegebenen singulairen Stammgleichung gehörigen vollständigen Stammgleichung, wie oben gesagt, willkürlich ist, so muss sie doch von der Art seyn, dass ihre Ableitungs-Gleichung noch Constanten enthält, damit man den veränderlichen Werth dieser Constanten, der gegebenen singulairen Stammgleichung gemäss, bestimmen könne; denn ohne das würde die angenommene vollständige Stammgleichung, mit der ge-

Die Ableitungs-Gleichung einer

gegebenen singulairen Stammgleichung gar keinen Zusammenhang mehr haben. Dieses ist der Grund, warum man in der angenommenen Stammgleichung wenigstens zwei Constanten voraussetzen muss, die sich dann, durch eine Bedingungs-Gleichung, auf eine reduciren lassen. Die Bedingungs-Gleichung ist es, welche die gegebene singulaire Stammgleichung bestimmt und auf diese Weise wird der Zusammenhang der vorausgesetzten vollständigen Stammgleichung mit der gegebenen singulairen Stammglnichung analytisch ausgedrückt und zwar, dem voraus bestimmten Umstande gemäss, dass beide Gleichungen einer und derselben Ableitungs-Gleichung entsprechen sollen.

Von dieser Betrachtung geht die obige Auflösung aus.

Ist nemlich eine singulaire Stammgleichung, das heisst irgend eine Gleichung zwischen x und y, die durch

$$y = \Sigma x$$

bezeichnet werden mag, gegeben, so nehme man von den unzähligen vollständigen Stammgleichungen, die dazu gehören, das heisst, mit ihr einerlei Ableitungs-Gleichungen haben, irgend eine von bestimmter Form, z. B.

$$u = F(x, y, a, b) = 0,$$

aber mit zwei Constanten an, damit durch das Verhältniss zwischen diesen beiden Constanten der gehörige Zusammenhang zwischen den bei-

singulairen Stammgleichung zu finden.

den Gleichungen $y = \Sigma x$ und $u = 0$, der darin besteht, dass sie beide eine und dieselbe Ableitungs-Gleichung haben sollen, bestimmt werden könne.

Man setze, dieses noch unbekannte Verhältniss zwischen den beiden Constanten sey

$$\Phi(a, b) = 0,$$

so erhält man die Ableitungs-Gleichung der vorausgesetzten vollständigen Stammgleichung $u = 0$, wenn man die Werthe der Constanten a und b aus den beiden Gleichungen $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$ nimmt und in die Gleichung $\Phi(a, b) = 0$ substituirt. Es entsteht dadurch eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, ohne a und b, die der gegebenen Gleichung $u = 0$ entspricht, und die folglich, in jedem Falle, welches auch das durch $\Phi(a, b) = 0$ ausgedrückte, jetzt noch willkürliche Verhältniss zwischen a und b seyn mag, ihre Ableitungs-Gleichung ist.

Die aus $u = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ folgenden Werthe von a und b mögen durch

$$a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \text{ und } b = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

oder kürzer durch φ und Ψ bezeichnet werden, so ist das unbekannte Verhältniss zwischen a und b:

$$\Phi(\varphi, \Psi) = 0.$$

Nun setze man, die gegebene singulaire Stammgleichung, das heisst, der gegebene Werth

Die Ableitungs-Gleichung einer

von y in x, welcher ebenfalls der vollständigen Stammgleichung $u=0$, aber nicht für constante, sondern für veränderliche Werthe von a und b entsprechen soll, nemlich

$$y=\Sigma x,$$

thue der Gleichung $\Phi(\varphi, \Psi)$ genug, während er, vermöge der Ausdrücke $a=\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ und $b=\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, die von gegebener Form sind, für a und b nicht constante, sondern veränderliche Werthe giebt, welches Letztere, während das Erste vorausgesetzt wird, allemal angeht, indem die durch Φ bezeichnete Form noch unbekannt ist; so thut alsdann $y=\Sigma x$ der Ableitungs-Gleichung von $u=0$, weil dieselbe nichts anders als $\Phi(a, b)=0$ oder $\Phi(\varphi, \Psi)=0$ selbst ist, genug, aber mit veränderlichen Werthen von a und b. Die Gleichung $y=\Sigma x$ ist also dann in diesem Falle wirklich grade was sie seyn soll: die singulaire Stammgleichung zu der Ableitungs-Gleichung der vorausgesetzten vollständigen Stammgleichung $u=0$, und es kommt nur darauf an, die Form Φ zu finden, für welche die Voraussetzung, dass $y=\Sigma x$ der Gleichung $\Phi(\varphi, \Psi)$ $=0$ genugthun soll, ohne für $a=\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ und $b=\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ constante Werthe zu geben, Statt findet. Dieses geschieht leicht, wenn man $y=\Sigma x$, und was daraus folgt, $\frac{dy}{dx}=\frac{d\Sigma x}{dx}$

singulairen Stammgleichung zu finden.

statt y *und* $\frac{dy}{dx}$ *in* $a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ *und* $b = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ *substituirt. Denn man erhält alsdann* a *und* b *blos in* x *ausgedrückt, und folglich, wenn man zwischen diesen beiden Ausdrücken* x *eliminirt, eine Gleichung zwischen* a *und* b, *die keine andere als diejenige* $\Phi(a, b) = 0$, *oder* $\Phi(\varphi, \Psi) = 0$ *ist, welcher* $y = \Sigma x$ *genugthut, ohne für* a *und* b *constante Werthe zu geben.*

Die auf diese Weise gefundene Gleichung

$$\Phi(a, b) = 0$$

ist also alsdann die gesuchte Bedingungs-Gleichung, unter welcher die willkürlich vorausgesetzte vollständige Stammgleichung $u = 0$ *zu der gegebenen singulairen Stammgleichung* $y = \Sigma x$ *gehört, das heisst, mit ihr eine und dieselbe Ableitungs-Gleichung hat.*

Diese Ableitungs-Gleichung, die zu finden der Gegenstand der Aufgabe war, erhält man sogleich, wenn man in

$$\Phi(a, b) = 0$$

die Werthe von a *und* b *in* x, y *und* $\frac{dy}{dx}$, *nemlich*

$$a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \text{ und } b = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

substituirt; denn $\Phi(a, b)$ *ist nichts anders als die Ableitungs-Gleichung von* $u = 0$ *selbst, in der Voraussetzung, dass darin jene Werthe von* a

und b gesetzt werden. Da man nun auf diese Weise die Ableitungs-Gleichung von $u=0$ findet, so hat man auch diejenige von $y=\Sigma x$; denn beide Gleichungen $u=0$ und $y=\Sigma x$ haben, nach der Voraussetzung, eine und dieselbe Ableitungs-Gleichung.

Dieses ist das Verfahren von (208.), *wie man aus dem Beispiele in* (210.) *deutlich sehen kann.*]

211.

Es ist allgemein leicht zu sehen, dass man das nemliche Resultat

$$\Phi(a, b) = 0$$

erhält, wenn man sogleich in die vorausgesetzte Gleichung

$$F(x, y, a, b) = 0$$

den gegebenen [*singulairen*] Werth

$$y = \Sigma x$$

substituirt und x, vermittelst der davon nach x abgeleiteten Gleichung, eliminirt.

Giebt die Gleichung $\Phi(a, b) = 0$,

$$b = \Psi a$$

und substituirt man diesen Werth von b statt b, so erhält man

$$u = F(x, y, a, \Psi a) = 0,$$

welche Gleichung mit ihrer nach x abgeleiteten zugleich Statt findet. Da aber jetzt a eine Function von x ist, so muss die davon nach x und a abgeleitete Statt finden $\left[nemlich\ \frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0\right]$.

singulairen Stammgleichung zu finden.

Also muss auch der auf a sich beziehende Theil derselben allein Statt finden [*weil nemlich, für den Fall, wenn a constant ist,* $\frac{du}{dx} = 0$ *ist und also der Theil* $\frac{du}{dx}$ *von* $\frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx}$ *auch für sich verschwindet. Deshalb ist der auf a sich beziehende Theil von* $\frac{d(u)}{dx}$, *nemlich* $\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx}$, *allein gleich Null*]. Dieses ist das Kennzeichen der singulairen Stammgleichung.

Hat man also eine beliebige vollständige Stammgleichung zwischen x, y, a und b angenommen, so darf man nur zwischen ihr und der gegebenen singulairen Stammgleichung, y wegschaffen, [*weil* $y = \Sigma x$ *den singulairen Fall bestimmt*,] hierauf aber nur zwischen der entstehenden Gleichung und ihrer nach x abgeleiteten, x eliminiren, so erhält man auf der Stelle eine Gleichung zwischen a und b, welche die Bedingungs-Gleichung

$$\Phi(a, b) = 0$$

ist, vermittelst welcher eine Constante durch die andere bestimmt werden muss. Hierauf kann man aus der nemlichen Stammgleichung, wenn man will, die Ableitungs-Gleichung durch Elimination der willkürlichen Constante finden.

212.

[*Beispiel.*] Substituirt man, in dem obigen Beispiele, $y = Ax + B$ in die Gleichung $y^2 - ax^2 - b = 0$

Die Ableitungs-Gleichung einer

[*um* $y = \Sigma x$ *zwischen der angenommenen vollständigen Stammgleichung* $y^2 - ax^2 - b = 0$ *und der singulairen Stammgleichung* $y - Ax - B = 0$ *zu eliminiren*] so erhält man [$A^2 x^2 + 2ABx + B^2 - ax^2 - b = 0$, *oder*]

$$(A^2 - a)x + 2ABx + B^2 - b = 0.$$

Hiervon ist die erste Ableitung:

$$(A^2 - a)x + AB = 0,$$

woraus folgt:

$$x = -\frac{AB}{A^2 - a}.$$

Setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung [$(A^2 - a)x^2 + 2ABx + B^2 - b = 0$, *um weiter, dem vorigen Paragraphe zu Folge,* x *zwischen diesen beiden Gleichungen wegzuschaffen*], so erhält man [*auf der Stelle die Bedingungs-Gleichung zwischen* a *und* b, $(A^2 - a)\frac{A^2 B^2}{(A^2 - a)^2} - \frac{2A^2 B^2}{A^2 - a} + B^2 - b = 0$, *oder* $A^2 B^2 - 2A^2 B^2 + (B^2 - a)(A^2 - a) = 0$, *oder*]

$$(A^2 - a)(B^2 - b) - A^2 B^2 = 0,$$

wie oben.

Nimmt man andere Gleichungen zwischen x, y, a und b an und verfährt auf die nemliche Weise, so kann man so viele Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung finden, als man will, von welchen allen

$$y - Ax - B = 0$$

die singulaire Stammgleichung ist.

singulairen Stammgleichung zu finden.

Umgekehrt folgt, dass die nemliche [*vollständige Stamm-*] Gleichung zwischen x, y, a und b jeder beliebigen singulairen Stammgleichung, die man verlangt, entsprechen kann, je nachdem man diese oder jene Gleichung zwischen den Constanten a und b annimmt.

Endlich folgt aus dieser Aufgabe [*drittens*], dass sich immer das Verhältniss zwischen den beiden Constanten a und b einer gegebenen Gleichung zwischen x, y, a, b finden lässt, welches Statt findeu muss, wenn diese Gleichung, als vollständige Stammgleichung, zu einer gegebenen singulairen Stammgleichung gehören soll.

II. Wenn die gegebene Stammgleichung Ableitungen enthält.

213.

Man kann ganz eben so bei der Aufgabe, die Ableitungs-Gleichung zweiter oder höherer Ordnung aus ihrer gegebenen singulairen Stammgleichung zu finden, verfahren.

Gesetzt die gegebene singulaire Stammgleichung sey erster Ordnung, nemlich

$$\frac{dy}{dx} + f(x, y) = 0,$$

so nehme man eine beliebige Gleichung zwischen x, y und drei willkürlichen Constanten a, b, c [*z. B.* $u = F(x, y, a, b, c) = 0$] an. Aus dieser Gleichung [$u = 0$] und ihrer ersten und zweiten abgeleiteten

Die Ableitungs-Gleichung einer

$\left[\frac{du}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = 0\right]$ nehme man die Ausdrücke von a, b, c in x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Man substituire darin die Ausdrücke von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in x und y aus der gegebenen [*singulairen*] Stammgleichung, nemlich $-f(x, y)$ statt $\frac{dy}{dx}$ [*welches unmittelbar aus der gegebenen singulairen Gleichung* $\frac{dy}{dx} + f(x, y) = 0$ *folgt*] und

$$-\frac{df(x, y)}{dx} + \frac{df(x, y)}{dy} \cdot f(x, y)$$

statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ [*welches aus der gegebenen singulairen Gleichung folgt, wenn man daraus die erste Ableitung* $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{df(x, y)}{dx} + \frac{df(x, y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ *nimmt; denn diese giebt* $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{df(x, y)}{dx} - \frac{df(x, y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, *und weil* $\frac{dy}{dx} = -f(x, y)$ *ist,* $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{df(xy,)}{dx} + \frac{df(x, y)}{dy} \cdot f(x, y)$], so erhält man für a, b und c Ausdrücke blos in x und y. [*Denn die obigen Ausdrücke für* $\frac{dy}{dx}$ *und* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *enthalten nur x und y.*] Man erhält also drei Gleichungen, aus welchen man x und y eliminiren kann. Geschieht dieses, so findet man eine Gleichung zwischen a, b und c, welche

$\Phi\ (a, b$

singulairen Stammgleichung zu finden.

$$\Phi(a, b, c) = 0$$

seyn mag.

Setzt man in diese Gleichung die oben [*aus* $u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$ *und* $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$] gefundenen Werthe von a, b, c in x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, so entsteht eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, von welcher die gegebene

$$\frac{dy}{dx} + f(x, y) = 0$$

die singulaire Stammgleichung, die [*vorausgesetzte*] Gleichung zwischen x, y, a, b, c, [$u = F(x, y, a, b, c) = 0$] aber die vollständige Stammgleichung zwischen x und y ist, in so fern in derselben den drei Constanten das wechselseitige Verhältniss beigelegt wird, welches die Gleichung

$$\Phi(a, b, c) = 0$$

bestimmt.

Wäre die gegebene singulaire Stammgleichung von der zweiten Ordnung, so müsste man [*willkürlich*] eine Gleichung zwischen x, y und vier Constanten a, b, c *etc.* annehmen u. s. w. [*Hier findet eine ähnliche Erläuterung Statt, wie bei* (208 *und* 209.)]

214.

[*Beispiel.*] Die gegebene singulaire Stammgleichung sey

$$\frac{dy}{dx} = Ay,$$

Die Ableitungs-Gleichung einer

so setze man die Gleichung [*zwischen x, y und drei Constanten a, b, c, die oben allgemein durch $u = F(x, y, a, b, c) = 0$ bezeichnet wurde,*]

$$[u =]\, y - \tfrac{1}{2} a x^2 - b x - c = 0.$$

Die erste und zweite Ableitung davon geben

$$\left[\frac{du}{dx} =\right] \frac{dy}{dx} - a x - b = 0 \text{ und}$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2} =\right] \frac{d^2y}{dx^2} - a = 0.$$

Diese drei Gleichungen [$u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$ *und* $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$] geben

$$a = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$b = \left[\frac{dy}{dx} - ax =\right] \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$c = \left[y - \tfrac{1}{2}ax^2 - bx = y - \tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}.x^2 + x^2.\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} =\right]$$

$$y + \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}.$$

Nun giebt die gegebene [*singulaire Stamm-*] Gleichung $\left[\frac{dy}{dx} = Ay\right]$

$$\frac{dy}{dx} = Ay,\ \frac{d^2y}{dx^2} = A\frac{dy}{dx} = A^2 y.$$

Substituirt man also die hieraus folgenden Werthe [*von* $\frac{dy}{dx}$ *und* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *in die Werthe von* a, b, c], so erhält man

$$a = A^2 y,$$

singulairen Stammgleichung zu finden.

$b = [-A^2xy + Ay =]\ Ay(1 - Ax)$,

$c = [y + \frac{1}{2}x^2A^2y - xAy =]\ y(1 - Ax + \frac{1}{2}A^2x^2)$.

Eliminirt man [*zwischen diesen Ausdrücken von* a, b, c] x und y, so erhält man [*erstlich aus* $a = A^2y$, $y = \frac{a}{A^2}$, *folglich* $b = a.\frac{1-Ax}{A}$, $c = \frac{1-Ax+\frac{1}{2}A^2x^2}{A^2}.a$; *ferner aus* $b = a.\frac{1-Ax}{A}$, $\frac{1-2Ax+A^2x^2}{A^2}.a^2 = b^2$, *also* $\frac{1-Ax+\frac{1}{2}A^2x^2}{A^2}.a = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{2A}$, *folglich* $c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{2A^2}$, *oder* $4aA^2c = 2A^2b^2 + 2a^2$, *oder*]

$$a^2 + A^2(b^2 - 2ac) = 0.$$

Substituirt man in diese Gleichung [*zwischen* a, b, c, *die also die Gleichung* $\Phi(a, b, c) = 0$ *ist*], die obigen Werthe von a, b, c [*nemlich* $a = \frac{d^2y}{dx^2}$, $b = -x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}$ *und* $c = y + \frac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}$,] so erhält man $\Big[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + A^2\Big(x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{d^2y}{dx^2}.y - x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}\Big) = 0$, *oder*$\Big]$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - A^2\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\,\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

von welcher Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, die gegebene Gleichung $\frac{dy}{dx} = Ay$, die singulaire

Stammgleichung; die wilikürlich angenommene Gleichung $y - \frac{1}{2}ax^2 - bx - c = 0$ aber die vollständige Stammgleichung, unter der Bedingung ist, dass [*die Bedingungs-Gleichung*]

$$a^2 + A^2(b^2 - 2ac) = 0,$$

[*zwischen den drei Constanten a, b, c Statt findet*] welches, weil aus dieser Bedingungs-Gleichung

$$c = \frac{a^2 + A^2 b^2}{2a}$$

folgt [*für die supponirte vollständige Stammgleichung*]

$$y - \frac{1}{2}ax^2 - bx - \frac{a^2 + A^2 b^2}{2a} = 0$$

giebt, wo nunmehr a und b die beiden willkürlichen Constanten sind [*welche die vollständige Stammgleichung haben kann, weil sie die Urgleichung einer Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung ist.*]

Ableitungs-Gleichungen, welche immer singulaire Stammgleichungen haben.

215.

Gleichungen von der Form

$$\Phi(a, b, c \ldots.) = 0,$$

wie die obige, in welchen die Grössen a, b, c *etc.* die aus einer Stammgleichung wie

$$u = F(x, y, a, b, c \ldots.) = 0,$$

und den davon abgeleiteten Gleichungen

singulaire Stammgleichungen haben.

$$\frac{du}{dx} = o, \ \frac{d^2u}{dx^2} = o \ etc.$$

genommenen Werthe der Constanten a, b, c.... in x, y, $\frac{dy}{dx}$.... bezeichnen, machen eine eigenthümliche merkwürdige Art von Ableitungs-Gleichungen aus, welche immer singulaire Stammgleichungen haben, weil die von einer solchen Gleichung abgeleitete Gleichung nothwendig einen Factor hat, der von der nemlichen Ordnung ist, wie die Gleichung selbst.

216.

Um diesen Umstand zu beweisen, sey

$$u = F(x, y, a, b) = o$$

irgend eine Gleichung zwischen x, y und den beiden Constanten a und b.

Betrachtet man a und b als unveränderlich, so ist $u = o$ die Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung zwischen $x, y, \frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, welche man erhält, wenn man a und b zwischen $u = o$ und den beiden davon abgeleiteten Gleichungen $\frac{du}{dx} = o$ und $\frac{d^2u}{dx^2}$ eliminirt; die entstehende Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung aber kann, wie wir oben sahen, immer auf die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o$$

gebracht werden [*denn man darf daraus nur* $\frac{d^2y}{dx^2}$

Ableitungs-Gleichungen, welche immer algebraisch entwickeln, oder von den übrigen Grössen absondern.]

Fängt man nun damit an, zuerst aus den beiden Gleichungen

$$u = 0 \text{ und } \frac{du}{dx} = 0$$

die Werthe von a und b zu nehmen, welche Werthe durch

$$a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \text{ und } b = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

bezeichnet werden können, so ist klar, dass die beiden Gleichungen

$$a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \text{ und } b = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

in welchen a und b willkürliche Constanten bedeuten, die beiden Stammgleichungen erster Ordnung von der obigen [*Ableitungs-*] Gleichung [*zweiter Ordnung*]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

sind [*denn sie sind die beiden Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung von der Stammgleichung* $u = 0$, *von welcher* $\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ *die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung ist*]. Die davon abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{d(a)}{dx} = \frac{d\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0 \text{ und}$$

singulaire Stammgleichungen haben.

$$\frac{d(b)}{dx} = \frac{d\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0$$

müssen also nothwendig mit der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung $\left[\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0\right]$ völlig übereinstimmen und den nemlichen Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ in x, y und $\frac{dy}{dx}$ geben [*denn sie enthalten keine Constanten mehr*].

Es ist aber

$$\frac{d(a)}{dx} = \frac{da}{dx} + \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \text{ und}$$

$$\frac{d(b)}{dx} = \frac{db}{dx} + \frac{db}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

[*wenn man durch* $\frac{da}{dx}$ *und* $\frac{db}{dx}$ *die von der Veränderung aller* x *ausserhalb* $\frac{dy}{dx}$, *herkommenden Theile der Ableitungen von* a *und* b *bezeichnet*]. Daraus folgt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{da}{dx} : \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} = -\frac{db}{dx} : \frac{db}{d\frac{dy}{dx}} =$$

$$-f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

[*Das letzte folgt aus der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung* $\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$]. Alle

Ableitungs-Gleichungen, welche immer

diese Ausdrücke von $\frac{d^2y}{dx^2}$ müssen nothwendig identisch die nemlichen seyn.

Man erhält also daraus

$$\frac{da}{dx} = \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} \cdot f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \text{ und}$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{d\frac{dy}{dx}} \cdot f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die obigen Ausdrücke von $\frac{d(a)}{dx}$ und $\frac{d(b)}{dx}$, so erhält man

$$\frac{d(a)}{dx} = \frac{da}{d\frac{dy}{dx}}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right) \text{ und}$$

$$\frac{d(b)}{dx} = \frac{db}{d\frac{dy}{dx}}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right).$$

Nun sey

$$p = \Phi(a, b) = 0$$

eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, so ist die davon abgeleitete Gleichung:

$$\frac{dp}{da} \cdot \frac{d(a)}{dx} + \frac{dp}{db} \cdot \frac{d(b)}{dx} = 0.$$

Setzt man hierin die eben gefundenen Werthe von $\frac{d(a)}{dx}$ und $\frac{d(b)}{dx}$, so erhält man

$$\left(\frac{dp}{da} \cdot \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{dp}{db} \cdot \frac{db}{d\frac{dy}{dx}}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right) = 0.$$

singulaire Stammgleichungen haben.

Diese Gleichung hat, wie man sieht, zwei Factoren; der eine [*der erste*] ist nur von der ersten Ableitungs-Ordnung, gleich der gegebenen Gleichung [$\Phi(a, b) = 0$], der zweite enthält $\frac{d^2y}{dx^2}$ und gehört zu der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung [*von* $\Phi(a, b)$].

Dieser zweite Factor giebt die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

aus welcher, vermöge der obigen Ausdrücke,

$$\frac{d(a)}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d(b)}{dx} = 0$$

folgt $\left[\textit{denn es war oben } \frac{d(a)}{dx} = \frac{da}{d\frac{dy}{dx}}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right) = 0 \textit{ und } \frac{d(b)}{dx} = \frac{db}{d\frac{dy}{dx}}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right)\right]$, so dass also a und b Constanten sind.

Nimmt man daher a und b unveränderlich an, so erhält man die beiden Stammgleichungen erster Ordnung:

$$a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \text{ und } b = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Eliminirt man zwischen denselben die Ableitung $\frac{dy}{dx}$, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, a und b, welche die Stammgleichung der gegebenen [$p =$

Ableitungs-Gleichungen, welche i m m e r

$\Phi(a, b) = o]$ ist und nothwendig mit der Gleichung

$$u = F(x, y, a, b) = o$$

übereinkommen muss, aus welcher man die Grössen $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ und $\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ abgeleitet hatte.

Aber die Constanten a und b in diesen Gleichungen sollen die Bedingung

$$\Phi(a, b) = o$$

erfüllen, welche die gegebene Ableitungs-Gleichung $[\Phi(a, b) = o]$ bestimmt. Sie reduciren sich also auf eine einzige Constante, welche dann folglich die willkürliche Constante der Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung ist.

Der Factor erster Ordnung $\frac{dp}{dx} \cdot \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{dp}{db} \cdot \frac{db}{d\frac{dy}{dx}}$ giebt seinerseits:

$$\frac{dp}{da} \cdot \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{dp}{db} \cdot \frac{db}{d\frac{dy}{dx}} = o,$$

welches, wenn man annimmt, dass darin statt a und b ihre Werthe $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ und $\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ gesetzt werden, eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ ist; und diese Gleichung giebt, nach der Theorie der vorigen Vorlesung, auf der Stelle die singulaire Stammgleichung der gegebenen $[\Phi(a, b)]$, wenn man

zwischen ihr und dieser Stammgleichung $\frac{dy}{dx}$ eliminirt. [*Man sehe* 182.]

Nun ist leicht zu sehen, dass der Factor $\frac{dp}{da} \cdot \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{dp}{db} \cdot \frac{db}{d\frac{dy}{dx}}$ nichts anders ist als $\frac{d(p)}{d\frac{dy}{dx}}$, [*nemlich die Ableitung von p nach* $\frac{dy}{dx}$, *überall wo* $\frac{dy}{dx}$ *in p vorkommt. Diese Stelle konnte wieder wegen der veränderten Zeichen nicht wörtlich übersetzt werden*]. Man findet also die singulaire Stammgleichung von

$$p = \Phi(a, b) = 0,$$

in so fern sich solche auf eine Form wie $\Phi(a, b)$ reduciren lässt, wenn man $\frac{dy}{dx}$ zwischen $p = 0$ und der davon nach $\frac{dy}{dx}$ allein abgeleiteten Gleichung eliminirt.

[*Da man also wirklich eine singulaire Stammgleichung zu Gleichungen, wie* $p = \Phi(a, b) = 0$, *welche die in* (215.) *angegebene Eigenschaft haben, findet, so folgt, dass diese Gleichungen wirklich, wie in* (215.) *behauptet wurde, immer eine singulaire Stammgleichung haben.*]

217.

Verfährt man auf dieselbe Weise bei den höhern Ordnungen, so lässt sich beweisen, dass, wenn z. B. eine durch

Ableitungs-Gleichungen, welche immer

$$q = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

bezeichnete Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung gegeben wäre, in welcher die Grösse $\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ irgend eine Function $\Phi(a, b, c)$ von den drei, durch irgend eine Gleichung zwischen x, y, a, b, c, wie

$$u = F(x, y, a, b, c) = 0$$

und den beiden davon abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{du}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

$\left[in\ x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right]$ bestimmten Grössen a, b, c seyn kann: dass dann die gegebene Gleichung $\left[q = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0\right]$ nothwendig eine singulaire Stammgleichung erster Ordnung haben muss, welche man findet, wenn man $\frac{d^2y}{dx^2}$ zwischen $q = 0$ und $\frac{dq}{d\frac{d^2y}{dx^2}} = 0$ wegschafft.

Die [*vollständige*] Stammgleichung in x und y erhält man, wenn man in der Gleichung

$$u = F(x, y, a, b, c) = 0$$

selbst, die Constanten so bestimmt, dass sie der Gleichung

$$\Phi(a, b, c) = 0$$

entsprechen, so dass nur zwei [*wie es seyn muss*] willkürlich bleiben.

Eben so verhält es sich für höhere Ordnungen.

218.

[*Erstes Beispiel.*] Wir wollen die Gleichung

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$$

zum Beispiel nehmen.

Ihre erste Abgeleitete ist

$$x - a\frac{dy}{dx} = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$a = x : \frac{dy}{dx} \text{ und } b = x^2 - 2xy : \frac{dy}{dx} - x^2 : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Nimmt man nun für die Gleichung $\Phi(a, b) = 0$,

$$b = Const.$$

an, so hat man die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung:

$$x^2 - 2xy : \frac{dy}{dx} - x^2 : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b = 0,$$

wo b eine beliebige Constante ist.

Man findet also davon sogleich die singulaire Stammgleichung, wenn man $\frac{dy}{dx}$ zwischen dieser Gleichung und ihrer, nach $\frac{dy}{dx}$ abgeleiteten, welche

$$2xy : \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0,$$

ist, eliminirt. Aus der letzten folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ [*in* $x^2 - 2xy \cdot \frac{dy}{dx} - x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b = 0$], so erhält man

$$x^2 + y^2 - b = 0;$$

wie wir schon oben auf einem andern Wege fanden.

219.

[*Zweites Beispiel.*] Wir wollen noch die Gleichung

$$y - \tfrac{1}{2} a x^2 - b x - c = 0$$

annehmen. Ihre beiden Abgeleiteten sind:

$$\frac{dy}{dx} - ax - b = 0 \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} - a = 0,$$

woraus [*wie oben* (214.)]

$$a = \frac{d^2y}{dx^2},\ b = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2},\ c = y - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

folgt.

Nun sey z. B.

$$\Phi(a, b, c) = c - b^2 - a^2,$$

so erhält man [*wenn man die vorigen, in* x, y, $\frac{dy}{dx}$ *und* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *ausgedrückten Werthe von* a, b, c *substituirt,*] die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung:

$$y - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0,$$

Die singulaire Stammgleichung u. s. w.

wovon man die singulaire Stammgleichung erhält, wenn man zwischen ihr und ihrer nach $\frac{d^2y}{dx^2}$ Abgeleiteten die Grösse $\frac{d^2y}{dx^2}$ eliminirt. Man findet

$$\tfrac{1}{2}x^2 + 2x\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

wie weiter oben.

Die singulaire Stammgleichung aus der vollständigen, ohne die Constanten zu entwickeln.

220.

Wenn man die vollständige Stammgleichung

$$u = F(x, y, a, b \ldots.) = 0,$$

nebst der Bedingungs-Gleichung

$$\Phi(a, b \ldots.) = 0$$

für das Verhältniss zwischen den Grossen $a, b, c \ldots.$ kennt, so kann man daraus ohne Weiteres die singulaire Stammgleichung finden, ohne erst die Werthe der Grössen $a, b, c \ldots.$ in $x, y, \frac{dy}{dx}$ *etc.* zu berechnen.

Denn, nachdem die Zahl der Grössen $a, b, c \ldots.$ vermittelst der Bedingungs-Gleichung $\Phi(a, b \ldots.) = 0$ um Eins vermindert worden, darf man nur mit der vollständigen Stammgleichung $u = F(x, y, a, b \ldots.) = 0$ nach der vorigen Vorlesung verfahren.

Die singul. Stammgl. aus der vollständigen,

221.

Aber die Schwierigkeit liegt darin, a posteriori zu sehen, ob gegebene Functionen, aus welchen eine gegebene Gleichung zusammengesetzt ist [*wie a und b in* $\Phi(a, b \ldots)$] von einer und derselben Stammgleichung abhängen und folglich die aus dieser Stammgleichung und ihren Abgeleiteten genommenen Werthe der Constanten ausdrücken können.

Um diese Schwierigkeit zu lösen, bemerke ich zuerst, dass es eine unterscheidende Eigenschaft dieser Art von Grössen ist, dass die Verhältnisse ihrer Ableitungen zu einander nur durch Ableitungen von der nemlichen [*keiner höhern*] Ordnung ausgedrückt werden, als diejenige ist, in welche die Grössen selbst gehören.

In der That sahen wir oben [216.] bei den Functionen erster Ordnung, dass die durch $\frac{d(a)}{dx}$ und $\frac{d(b)}{dx}$ bezeichneten Ableitungen der Grössen $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ und $\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, welche die aus der allgemeinen Gleichung $u = F(x, y, a, b, c) = 0$ und ihrer Abgeleiteten $\frac{du}{dx} = 0$ genommenen Werthe der Constanten a und b bezeichnen, die Form

$$\frac{d(a)}{dx} = \frac{da}{d\frac{dy}{dx}}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right) \text{ und}$$

$\frac{d(b)}{dx}$

ohne die Constanten zu entwickeln.

$$\frac{d(b)}{dx} = \frac{db}{d\frac{dy}{dx}}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right)$$

haben, so dass blos

$$\frac{d(a)}{dx} : \frac{d(b)}{dx} = \frac{da}{d\frac{dy}{dx}} : \frac{db}{d\frac{dy}{dx}}$$

ist. Dieses zeigt, dass die Grössen $a = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ und $b = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ in der That die Eigenschaft haben, dass die Ableitung von y, zweiter Ordnung, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in dem Verhältnisse der Ableitungen jener Grössen nicht vorkommt und dass dieses Verhältniss das nemliche ist, als wenn die Grössen [*nicht nach x, sondern*] blos nach $\frac{dy}{dx}$ allein abgeleitet würden.

222.

[*Beispiel.*] Es sey z. B. die Gleichung der graden Linie

$$y + ax + b = 0$$

gegeben, so ist ihre Abgeleitete:

$$\frac{dy}{dx} + a = 0.$$

Also ist

$$a = -\frac{dy}{dx} \text{ und } b = x\frac{dy}{dx} - y.$$

Man erhält also, wenn man diese Ausdrücke von a und b blos durch φ und Ψ bezeichnet,

Die singul. Stammgl. aus der vollständigen,

$$\varphi = -\frac{dy}{dx} \text{ und } \Psi = x\frac{dy}{dx} - y.$$

Nimmt man hiervon die Ableitungen, so erhält man

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{d^2y}{dx^2} \text{ und}$$

$$\left[\frac{d\Psi}{dx} = x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}, \text{ oder}\right]$$

$$\frac{d\Psi}{dx} = x\frac{d^2y}{dx^2};$$

also

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\Psi}{dx} = -\frac{1}{x}.$$

Nähme man die Ableitungen von φ und Ψ blos nach $\frac{dy}{dx}$, so erhielte man $\frac{d\varphi}{d\frac{dy}{dx}} = -1$ und $\frac{d\Psi}{d\frac{dy}{dx}} = x$, also

$$\frac{d\varphi}{d\frac{dy}{dx}} : \frac{d\Psi}{d\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{x},$$

welches das Nemliche ist [*wie es dem allgemeinen Beweise in* (221.) *zu Folge seyn muss.*]

223.

[*Zweites Beispiel.*] Man nehme noch die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

an, welche die Gleichung eines Kreises mit dem Halbmesser b ist, dessen Mittelpunct in der Axe der Ab-

ohne die Constanten zu entwickeln.

scissen und um a von dem Anfangs-Puncte der Abscissen entfernt liegt.

Die Abgeleitete von dieser Gleichung ist

$$y\frac{dy}{dx} + x - a = 0,$$

woraus

$$a = x + y\frac{dy}{dx} = \varphi$$

folgt. Man findet, wenn man [*diesen Ausdruck von a in die gegebene Gleichung* $y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, *oder* $y^2 - b^2 + (a-x)^2 = 0$] substituirt,

$$\left[y^2 - b^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \textit{ also}\right]$$

$$b = y\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = \Psi.$$

Nimmt man nun die Ableitungen von diesen φ und Ψ, so erhält man

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} \text{ und}$$

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{dy}{dx}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} + \frac{y\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},$$

$$\left[\text{oder } \frac{d\Psi}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]$$

woraus

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\Psi}{dx} = \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\Psi}{\varphi - x}$$

Die singul. Stammgl. aus der vollständigen,

folgt. Nähme man die Ableitungen von φ und Ψ blos nach $\frac{dy}{dx}$, so erhielte man

$$\frac{d\varphi}{d\frac{dy}{dx}} = y \text{ und } \frac{d\Psi}{d\frac{dy}{dx}} = \frac{y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},$$

woraus

$$\frac{d\varphi}{d\frac{dy}{dx}} : \frac{d\Psi}{d\frac{dy}{dx}} = \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\frac{dy}{dx}}$$

folgt, wie oben.

224.

Auf eine ähnliche Art lässt sich zeigen, dass die Verhältnisse der Ableitungen der Functionen von x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, welche die aus einer Gleichung, wie

$$u = F(x, y, a, b, c) = 0$$

und ihren beiden Abgeleiteten

$$\frac{du}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

genommenen Werthe der Grössen a, b, c bezeichnen, wenn diese Grössen bei der Ableitung noch als unveränderlich betrachtet werden, die Ablieitung dritter Ordnung $\frac{d^3y}{dx^3}$ nicht enthalten und dass sie die nemlichen sind, welche man erhält, wenn man die Ableitungen von den Grössen blos nach $\frac{d^2y}{dx^2}$ nähme.

ohne die Constanten zu entwickeln.

Denn man bezeichne die drei Grössen a, b, c durch

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right), \quad \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

$$\xi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

so sind die drei Gleichungen

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = a,$$

$$\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = b \text{ und}$$

$$\xi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = c,$$

in welchen a, b, c willkürliche Constanten bedeuten, die drei Stammgleichungen einer und derselben Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung, wie

$$\frac{d^3y}{dx^3} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

welcher also die Ableitungen jener Gleichungen genugthun müssen; und so weiter, für ähnliche Functionen mit Ableitungen höherer Ordnungen.

Man kann sich aber von diesem Satze noch auf directerem Wege, wie folgt, überzeugen.

225.

Man schreibe nemlich blos φ und Ψ für die Functionen $\varphi\left(x, b, \frac{dy}{dx}\right)$ und $\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, welche die aus der Gleichung

$$u = F(x, y, a, b) = 0$$

und ihrer Abgeleiteten

Die singul. Stammgl. aus der vollständigen,

$$\frac{du}{dx} = 0$$

genommenen Ausdrücke der Constanten *a* und *b* bezeichnen, so ist klar, dass die Gleichung

$$u = F(x, y, \varphi, \Psi) = 0$$

identisch seyn muss [*das heisst, dass sie sich in sich selbst aufheben muss; denn nimmt man aus einer Gleichung, wie* $u = 0$, *und einer davon abhängenden Gleichung* $\frac{du}{dx} = 0$, *die Werthe der beiden Grössen a und b und substituirt sie in die ursprüngliche Gleichung* $u = 0$ *zurück, so muss diese nothwendig sich in sich selbst aufheben*]. Die davon abgeleitete Gleichung

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{d\Psi} \cdot \frac{d\Phi}{dx} = 0$$

muss also von selbst Statt finden. Nun ist aber schon

$$\frac{du}{dx} = 0$$

[*nemlich für den Fall, wenn a und b constant sind, welcher ebenfalls Statt findet*]. Also ist auch, für sich besonders,

$$\frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{d\Psi} \cdot \frac{d\Psi}{dx} = 0,$$

woraus

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\Psi}{dx} = -\frac{du}{d\Psi} : \frac{du}{d\varphi}$$

folgt. Da aber φ und Ψ nur x, y und $\frac{dy}{dx}$ [*und*

ohne die Constanten zu entwickeln.

folglich auch $\frac{du}{d\varphi}$ *und* $\frac{du}{d\Psi}$ *nur x, y und* $\frac{dy}{dx}$] enthalten, so ist klar, dass in dem Ausdrucke von $\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\Psi}{dx}$ nur Ableitungen erster Ordnung vorkommen.

226.

So ist in dem obigen Beispiele, in welchem

$$u = F(x, y, a, b) = y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2$$

war, wenn man φ und Ψ statt a und b setzt,

$$u = y^2 + x^2 - 2a\varphi + \varphi^2 - \Psi^2,$$

also

$$\frac{du}{d\varphi} = 2(\varphi - x) \text{ und } \frac{du}{d\Psi} = -2\Psi,$$

folglich

$$\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\Psi}{dx} \left[= \frac{du}{d\Psi} : \frac{du}{d\varphi} \right] = \frac{\Psi}{\varphi - x},$$

wie wir oben [223.] auf einem andern Wege fanden.

227.

Eben so erhält man, wenn φ, Ψ, ξ die aus der Gleichung

$$u = F(x, y, a, b, c) = 0$$

[*mit drei Constanten a, b, c*] und den beiden davon abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{du}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

folgenden Ausdrücke der Grössen a, b, c bezeichnen, und man diese Grössen in $u = 0$ statt a, b, c sub-

stituirt, ebenfalls identische Gleichungen, deren Abgeleiteten folglich auch statt finden.

Man erhält also zunächst

$$u = F(x, y, \varphi, \Psi, \xi) = 0$$

und

$$\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0.$$

Da nun aber, schon für sich allein,

$$\frac{du}{dx} = 0$$

ist, so ist

$$\frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{d\Psi} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0.$$

Da ferner die Grösse

$$\frac{d(u)}{dx} \left[\text{in der Gleichung } \frac{d(u)}{dx} = 0 \right],$$

ausser den Grössen x, y und $\frac{dy}{dx}$, die drei Functionen φ, Ψ und ξ enthält, so ist auch, wenn man diese Grösse durch $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi, \Psi, \xi\right)$ bezeichnet, die Gleichung

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varphi, \Psi, \xi\right) = 0$$

identisch, und folglich

$$\frac{d(v)}{dx} = \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dv}{d\Psi} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + \frac{dv}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = 0.$$

Da aber schon an und für sich

$$\frac{dv}{dx} = 0$$

ohne die Constanten zu entwickeln.

ist, weil, wie leicht zu sehen, $\frac{dv}{dx}$ nichts anders ist, als $\frac{d^2u}{dx^2}$, so ist auch

$$\frac{dv}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dv}{d\Psi}\cdot\frac{d\Psi}{dx}+\frac{dv}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}=0.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der obigen

$$\left[\frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}+\frac{du}{d\Psi}\cdot\frac{d\Psi}{dx}+\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}=0,\right]$$

so erhält man, weil die Grössen $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\Psi}{dx}$ und $\frac{d\xi}{dx}$ in den beiden Gleichungen nur in einer Abmessung und als Multiplicatoren aller Glieder vorkommen [*und die Grössen* $\frac{du}{d\varphi}$, $\frac{du}{d\Psi}$, $\frac{du}{d\xi}$, $\frac{dv}{d\varphi}$, $\frac{dv}{d\Psi}$ *und* $\frac{dv}{d\xi}$ *sämmlich keine Ableitungen höherer Ordnung von* y, *als* $\frac{dy}{dx}$ *enthalten,*] für $\frac{d\varphi}{dx}:\frac{d\Psi}{dx}$ und $\frac{d\varphi}{dx}:\frac{d\xi}{dx}$ Ausdrücke, die, wie leicht zu sehen, nur die Grössen x, y, $\frac{dy}{dx}$, φ, Ψ und ξ [*und keine Ableitungen von* y, *höherer Ordnungen*] enthalten, so dass diese Ausdrücke nicht über die zweite Ordnung steigen. [*Und zwar können sie die zweite Ordnung deshalb erreichen, weil die in den Ausdrücken vorkommenden Grössen* φ, Ψ, ξ, *welche aus den drei Gleichungen* $u=0$, $\frac{du}{dx}=0$ *und* $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ *genommen sind, selbst Ableitungen von* y *zweiter Ordnung enthalten können.*]

Die singul. Stammgl. aus der vollständigen,

228.

Bezeichneten φ und Ψ die aus der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a, b\right) = 0,$$

und der davon abgeleiteten

$$\frac{du}{dx} = 0$$

genommenen Werthe von a und b, so wären diese Grössen in diesem Falle von der zweiten Ordnung und man würde durch ein ähnliches Raisonnement finden, dass sich das Verhältniss $\frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\Psi}{dx}$ ihrer Ableitungen, durch $-\frac{du}{d\Psi} : \frac{du}{d\varphi}$ ausdrücken lässt, so dass selbiges von der zweiten Ordnung und folglich von der nemlichen Ordnung ist, von welcher φ und Ψ selbst sind.

229.

Allgemein folgt aus dieser Rechnung, dass wenn φ, Ψ, ξ *etc.* Functionen mit Ableitungen einer beliebigen Ordnung, und zugleich die aus einer Gleichung zwischen $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ a, b, c \ldots$ und den davon nach x abgeleiteten Gleichungen genommenen Ausdrücke der Constanten a, b, c.... bezeichnen, dass dann die Ausdrücke der Verhältnisse der Ableitungen dieser Functionen nie Ableitungen höherer Ordnungen enthalten können, als die Functionen selbst.

ohne die Constanten zu entwickeln.

230.

Nun sieht man leicht, dass wenn beliebige Functionen von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.... die Eigenschaft haben, dass die Ausdrücke der gegenseitigen Verhältnisse ihrer Ableitungen keine Ableitungen von y höherer Ordnung enthalten, als die Functionen selbst, dass alsdann diese Functionen [*vermöge des vorigen Satzes*] allemal als die Ausdrücke eben so vieler, aus einer Stammgleichung und ihrer Abgeleiteten genommenen Constanten angesehen werden können, und dass es dann leicht ist, die erzeugende Stammgleichung daraus zu finden.

Denn, man bezeichne die benannten Functionen durch φ, Ψ, ξ.... und die Verhältnisse ihrer Ableitungen $\frac{d\Psi}{dx}$, $\frac{d\xi}{dx}$ *etc.* zu $\frac{d\varphi}{dx}$, welche nach der Voraussetzung Functionen keiner höhern Ordnung seyn können, als φ, Ψ, ξ.... selbst, durch M, N...., so hat man die Gleichungen

$$\frac{d\Psi}{dx} = M\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\xi}{dx} = N\frac{d\varphi}{dx} \ldots;$$

Setzt man also

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

[*weil* φ, Ψ, ξ.... *Constanten einer Stammgleichung bedeuten sollen*], so ist auch

$$\frac{d\Psi}{dx} = 0, \quad \frac{d\xi}{dx} = 0,$$

also

Die singul. Stammgl. aus der vollständigen,

$$\varphi = a,\ \Psi = b,\ \xi = c \dots;$$

wo nun a, b, $c \dots$ Constanten bedeuten.

Diese Gleichungen sind also eben so viele Stammgleichungen der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

weil sie mit ihr zugleich Statt finden. Eliminirt man daher zwischen diesen Gleichungen

$$\varphi = a,\ \Psi = b,\ \xi = c \dots$$

die Ableitung der Grösse y von der höchsten Ordnung, so erhält man eine Stammgleichung von einer [*und zwar um so viel Einheiten*] niedrigeren Ordnung [*als Gleichungen* $\varphi = a$, $\Psi = b$, $\xi = c \dots$ *vorhanden sind*] welche die Constanten a, b, $c \dots$ enthält und welche folglich die erzeugende Stammgleichung von der Form

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots a, b, c \dots\right) = 0$$

ist, aus welcher dann wieder die Functionen φ, Ψ, $\xi \dots$ folgen, wenn man dafür die Ausdrücke der Constanten a, b, $c \dots$ aus dieser Gleichung und den davon abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{dF\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots a, b, c \dots\right)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots a, b, c \dots\right)}{dx^2} = 0 \text{ etc.}$$

nimmt.

ohne die Constanten zu entwickeln.

Wäre also irgend eine Gleichung zwischen diesen Functionen, wie

$$\Phi(\varphi, \Psi, \xi \ldots.) = 0$$

gegeben und es fände sich, dass die Ausdrücke der Verhältnisse der Ableitungen $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\Psi}{dx}, \frac{d\xi}{dx} \ldots.$ zu einander keine Ableitungen höherer Ordnung enthalten, als die Functionen selbst, so hätte man auf der Stelle die Stammgleichungen:

$$\varphi = a, \quad \Psi = b, \quad \xi = c \text{ etc.}$$

und daraus die vollständige Haupt-Stammgleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots. a, b, c \ldots.\right) = 0,$$

in welcher die Constanten $a, b, c \ldots.$ willkürlich sind, bis auf eine, welche durch die gegebene Gleichung, die sich alsdann auf

$$\Phi(a, b, c \ldots.) = 0$$

reducirt, bestimmt wird.

Die singulaire Stammgleichung findet sich dann ferner [*weil man auf diese Weise die vollständige Stammgleichung fand*] durch die oben abgehandelte Methode.

231.

[*Beispiel.*] Wäre z. B. die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$\Phi\left[x + y\frac{dy}{dx}, y\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\right] = 0$$

gegeben, ohne dass man wüsste, dass die beiden Aus-

Die singul. Stammgl. aus der vollständigen,

drücke unter dem Functions-Zeichen, Constanten, wie sie aus einer Stammgleichung und ihrer Abgeleiteten folgen, bedeuten können, so untersuche man zuvörderst die Ableitungen dieser Ausdrücke. Sie sind

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} + \frac{y\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}.$$

Da die zweite

$$\frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}$$

giebt, so sieht man leicht, dass ihr Verhältniss zur ersten blos

$$\frac{dy}{dx} : \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

ist, ohne dass die Ableitung von y, zweiter Ordnung, in dem Ausdrucke dieses Verhältnisses vorkäme. Dieses beweiset, dass die beiden Functionen $x+y\frac{dy}{dx}$ und $y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$ allerdings von einer Stammgleichung herkommen können, die man findet, wenn man

$$x+y\frac{dy}{dx} = a \text{ und } y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = b$$

setzt und $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, welches

$$y^2 + (a-x)^2 = b^2$$

ohne die Constanten zu entwickeln.

giebt, welche Gleichung auch wirklich mit derjenigen übereinkommt, aus welcher wir die Ausdrücke von a und b in dem obigen Beispiele nahmen.

Die gegebene Gleichung $\left[\Phi\left(x + y\frac{dy}{dx}, y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\right) = 0\right]$ ist nun blos

$$\Phi(a, b) = 0,$$

aus welcher sich b durch a ausdrücken lässt, so dass die gefundene Gleichung $[y^2 + (a-x)^2 = b^2]$ nur noch a enthält und alsdann die vollständige Stammgleichung der gegebenen ist.

Man kann daraus ferner die singulaire Stammgleichung finden, wenn man nach der Methode der funfzehnten Vorlesung [182.] a zwischen ihr und ihrer nach a abgeleiteten eliminirt, oder auch, wenn man blos aus der gegebenen Gleichung, vermittelst der davon nach $\frac{dy}{dx}$ allein genommenen Abgeleiteten, a wegschafft, wie wir Dieses oben [182.] sahen.

[*Diese Sätze sind auch, wie man sieht, für die Methode der Entwickelung der vollständigen Stamm- oder Urgleichungen von gegebenen Ableitungs-Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen (Integration der Differential-Gleichungen) nicht unwichtig.*]

Siebzehnte Vorlesung.

Ueber verschiedene Aufgaben die sich auf die Theorie der singulairen Stammgleichungen beziehen.

232.

Schon bald nach der Erfindung der Differential-Rechnung stiessen die Analysten auf Fälle, die sich auf die Theorie der singulairen Stammgleichungen beziehen. Sie wandten bei denselben verschiedene eigenthümliche Kunstgriffe an.

Leibnitzische Aufgabe.

Leibnitz lehrt in einer Abhandlung unter dem Titel: „nova calculi differentialis applicatio," die man in den Leipziger Actis von 1694 findet. (Man sehe die Nummer XI. in Jacob Bernoullis Werken.) Mittel, die Curve zu finden, welche durch stetige Aufeinanderfolgen der Durchschnitte aller der unzähligen Curven entsteht, welche alle von einer und derselben

Aufgabe.

Gleichung ausgedrückt werden, wenn man in dieser Gleichung den Parameter, durch welchen die Curven sich unterscheiden (qui les differencie) sich verändern lässt. Man erhält auf diese Weise eine Gleichung, welche den Werth des Parameters in Functionen der Coordinaten giebt, und wenn man diese Werthe in die gegebene Gleichung substituirt, alsbald eine endliche Gleichung für die gesuchte Curve.

Er wendet hierauf diese Methode auf die, damals sehr schwierig scheinende Aufgabe an, die Curve zu finden, deren Normalen, oder Perpendikel, in einem gegebenen Verhältnisse zu den Abschnitten der Axe, zwischen den Anfangs-Puncten der Abscissen und der Normalen stehen.

Leibnitz betrachtet diese Curven, als durch auf einander folgende Durchschnitte einer unendlichen Menge von Kreisen entstehend, deren Mittelpuncte alle in der Axe liegen. Die Halbmesser dieser Kreise sind Normalen der entstehenden Curven, und das durch die Aufgabe gegebene Verhältniss zwischen den Normalen und den correspondirenden Theilen der Axe findet zwischen den Halbmessern und den Abscissen der Mittelpuncte der Kreise Statt.

233.

Die Coordinaten des Kreises mögen x und y, die Abscisse des Mittelpuncts mag a, der Halbmesser b seyn, so ist [*wie leicht zu sehen*]

$$y^2 + (a - x)^2 = b^2, \text{ oder}$$

Leibnitzische

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

die Gleichung des Kreises.

Nun erhält man aus der gegebenen Gleichung zwischen b und a [*das Verhältniss nemlich zwischen dem Halbmesser b und der Entfernung a, des in der Axe liegenden Kreis-Mittelpuncts vom Anfangs-Puncte der Abscissen, sollte gegeben seyn*] die Grösse b in a ausgedrückt und es bleibt nur der Parameter a übrig, welchen man, wie oben gesagt, bestimmen kann. Die entstehende Gleichung zwischen x und y ist alsdann die Gleichung der Curve, welche durch die aufeinander folgende Durchschnitte aller Kreise gebildet wird und hat folglich die verlangte Eigenschaft.

Wir wollen, mit Leibnitz, annehmen, die [*gegebene*] Gleichung zwischen a und b sey die Gleichung einer Parabel:

$$b^2 = ak,$$

wo k eine Constante bedeutet, so ist die Gleichung zwischen x, y und a,

$$y^2 + x^2 - 2ax + ak = 0.$$

Lässt man nun a allein sich verändern, so erhält man, wenn man sich der gewöhnlichen Zeichen der Differential-Rechnung bedient,

$$(-2x + 2a - k)\,da = 0, \text{ woraus}$$

$$a = \tfrac{1}{2}(k + 2x)$$

folgt. Substituirt man diesen Werth von a in die vorige Gleichung, so erhält man für die gesuchte Curve, die Gleichung:

Aufgabe.

$$y^2 - kx - \tfrac{1}{4}k^2 = 0.$$

Diese Curve ist also, wie man sieht, ebenfalls eine Parabel.

234.

Man kann sich a posteriori überzeugen, dass diese Curve der Gleichung genugthut.

Denn die erste Ableitung $\frac{dy}{dx}$ von y, wenn man die Ordinate y als Function der Abscisse x betrachtet, drückt, wie bekannt, das Verhältniss der Ordinate zur Subtangente aus, oder das Verhältniss der Subtangente zur Ordinate, welches das Nemliche ist, so dass $y\frac{dy}{dx}$ der Ausdruck der Subtangente und folglich $y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$ der Ausdruck der Normale, $x+y\frac{dy}{dx}$ aber der Ausdruck des zwischen dem Anfangs-Puncte der Abscissen und der Normale liegenden Theils der Axe ist. (Man sehe den zweiten Theil der Theorie der analytischen Functionen.)

Nun giebt die vorhin gefundene Gleichung:

$$y^2 = kx + \tfrac{1}{4}k^2,$$

und, wenn man davon die erste Ableitung nimmt,

$$2y\frac{dy}{dx} = k.$$

Also ist die Normale [*welche* $y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$, *oder* $\sqrt{\left(y^2+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$ *und zugleich dem Halbmesser*

Leibnitzische

des Kreises b gleich war, gleich $\sqrt{(kx+\frac{1}{4}k^2+\frac{1}{4}k^2)}$ $=\sqrt{(kx+\frac{1}{2}k^2)}$. *Also ist*]

$$b=\sqrt{(kx+\tfrac{1}{2}k^2)}$$

und der oben benannte Theil der Axe [$x+y\frac{dy}{dx}$, *welcher a war, ist*]

$$a=x+\tfrac{1}{2}k,$$

welches, mit k multiplicirt, wie man sieht, dem Quadrate der Normale gleich ist [*so dass also, wie es seyn sollte,* $ak=b^2$ *ist*].

235.

Die Aufgabe ist also auf diese Weise aufgelöset. Indessen ist es sonderbar, dass Leibnitz nicht bemerkte, dass seine Auflösung, in der Gleichung der Curve, keine willkürliche Constante zulässt, da doch offenbar die Aufgabe auf eine Differential-Gleichnng führt, deren Integral ohne eine willkürliche Constante nicht vollständig seyn kann.

Es sey nemlich a der Theil der Axe bis zur Normale, b die Normale, so ist, wie wir vorhin sahen,

$$a=x+y\frac{dy}{dx} \text{ und } b=y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}.$$

Will man also, dass $b=Fa$ sey, so erhält man die Ableitungs-Gleichung

$$y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}=F\left(x+y\frac{dy}{dx}\right),$$

von welcher die Stammgleichung gesucht werden muss.

Aufgabe.

Die Gleichung $y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}=F\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)$ muss also, um mit den Ausdrücken der Differential-Rechnung zu reden, integrirt werden.

In dem gegebenen Beispiele ist $b = a\,k$, folglich

$$Fa = \sqrt{(ak)}$$

und die Differential-Gleichung ist

$$y\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = \sqrt{\left(\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)k\right)}.$$

Entwickelt man aus dieser Gleichung den Werth von $y\frac{dy}{dx}$, so erhält man $\left[y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = kx + ky\frac{dy}{dx}, \textit{also}\right]$

$$y\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}k + \sqrt{(\tfrac{1}{4}k^2 + kx - y^2)}, \text{ oder}$$

$$k - 2y\frac{dy}{dx} + 2\sqrt{(\tfrac{1}{4}k^2 + kx - y^2)} = 0.$$

Dividirt man die gesammte Gleichung durch $2\sqrt{(\frac{1}{4}k^2 + kx - y^2)}$, so erhält man

$$\frac{k - 2y\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{(\frac{1}{4}k^2 + kx - y^2)}} + 1 = 0,$$

wovon die Stammgleichung, wie leicht zu sehen,

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}k^2 + kx - y^2)} + x = h$$

ist, wo h eine willkürliche Constante bedeutet.

Diese Gleichung giebt, wenn man das Wurzelzeichen wegschafft,

$$\tfrac{1}{4}k^2 + kx - y^2 = (h - x)^2,$$

Leibnitzische Aufgabe.

welches die Gleichung eines Kreises ist. Setzt man $k = a - \frac{1}{2}h$, wo nun a die willkürliche Constante bedeutet, so erhält man

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - ak = 0.$$

236.

Diese Gleichung stimmt, wie man sieht, mit der Gleichung des Kreises überein, aus welcher Leibnitz seine Auflösung, vermittelst der Variation von a fand. Also ist die Gleichung des Kreises, in welcher die Abscisse des Mittelpuncts a die willkürliche Constante und $\sqrt{ak}$ der Halbmesser ist, die Stammgleichung, welche die Aufgabe ganz allgemein auflöset. In der That ist leicht zu sehen, dass jeder Kreis, dessen Mittelpunct in der Axe liegt, und dessen Halbmesser sich zur Entfernung des Mittelpuncts vom Anfangs-Puncte der Abscissen, wie die Normale zum correspondirenden Theile der Axe verhält, die Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Die Gleichung der Parabel, welche Leibnitz findet, kann also nur eine singulaire Stammgleichung seyn. In der That erhält man, wenn man von der obigen Gleichung des Kreises die Ableitnng nach a nimmt, wie es für einen solchen Fall, dem Anfange der funfzehnten Vorlesung zu Folge, geschehen muss, die Gleichung

$$-2x + 2a - k = 0,$$

welches

$$a = \tfrac{1}{2}(k + 2x)$$

giebt. Substituirt man diesen Werth von a in die

Gleichung des Kreises, so erhält man [$y^2 + x^2 + a^2 - 2a^2 = 0$, *oder* $y^2 + x^2 - a^2 = 0$, *oder* $y^2 + x^2 - \frac{1}{4}k^2 - kx - x^2 = 0$, *oder*]

$$y^2 - kx - \tfrac{1}{4}k^2 = 0,$$

wie Leibnitz; woraus folgt, dass die Auflösung bei Leibnitz in einer singulairen Stammgleichung liegt.

Umfangende Curven.

237.

Wie wir sahen, fand Leibnitz seine Auflösung dadurch, dass er die Curve untersuchte, welche von den stetig auf einander folgenden Durchschnitten aller Kreise gebildet wird, die man erhält, wenn man die Constante a fortwährend sich verändern lässt. In der That besteht eine allgemeine Eigenschaft der singulairen Stammgleichungen darin, dass sie die Curven ausdrücken, welche durch die stetige Aufeinanderfolge der Durchschnitte aller, von der vollständigen Stammgleichung ausgedrückten Curven gebildet werden, wenn man die willkürliche Constante, die diese letzten Curven particularisirt, fortwährend sich verändern lässt.

Da diese Eigenschaft gleichsam das Kennzeichen dieser Art von Stammgleichungen ist, so ist es interessant, sie allgemein zu beweisen.

238.

Man erwäge zu dem Ende, dass die, durch stetig aufeinander folgende Durchschnitte einer Reihe,

unendlich wenig von einander unterschiedener Curven, entstehende Curve nichts anders ist, als die Curve, welche alle jene, auf die Weise umfängt oder berührt, dass sie in allen Puncten mit ihnen gemeinschaftliche Tangenten hat.

Nun sey

$$u = F(x, y, a) = 0$$

die allgemeine Gleichung der gegebenen Curve, wo a einen Parameter bezeichnet, der für jede einzelne Curve constant ist, von einer zur andern aber sich verändert. Da die Curve, welche alle diese Curven umfangen soll, mit jeder von ihnen einen Punct gemein haben muss, so hat sie auch die nemlichen Coordinaten x und y und die nemliche Gleichung zwischen diesen Coordinaten, nur mit dem Unterschiede, dass der Parameter a in der Gleichung $u = F(x, y, a) = 0$ veränderlich ist, sobald sich die Gleichung auf die umfangende Curve bezieht.

Sodann muss auch nothwendig die Lage der Tangente die nemliche seyn, sowohl in der Curve, in welcher a constant ist, als in denjenigen mit veränderlichem a.

Nun ist bekannt, dass die Lage der Tangenten allein von der Function $\frac{dy}{dx}$ abhängt, weil $y : \frac{dy}{dx}$ der Ausdruck der Subtangente ist; also muss nothwendig der aus der Gleichung $u = F(x, y, a) = 0$ genommene Werth von $\frac{dy}{dx}$ der nemliche seyn, man mag a als constant, oder als eine veränderliche Function

Curven.

von x betrachten, welches nicht anders möglich ist, als wenn der von der Ableitung nach a herkommende Theil der Ableitung Null ist [*denn wenn* a *constant ist, so erhält man aus der gegebenen Gleichung* $u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$ *und, wenn* a *veränderlich ist*, $\frac{du}{dx} + \frac{du}{da}.\frac{da}{dx} = 0$. *Diese beiden Gleichungen können für* $\frac{dy}{dx}$, *wie es seyn soll, nur dann das Nemliche geben, wenn* $\frac{du}{da} = 0$ *ist, so dass das Glied* $\frac{du}{da}.\frac{da}{dx}$ *in der zweiten Gleichung wegfällt und diese in die erste Gleichung übergehet*].

Dieser Theil ist $\frac{du}{da}$. Also ist nothwendig

$$\frac{du}{da} = 0;$$

welche Gleichung zur Bestimmung von a in x und y dient.

Diese Gleichung ist nun, wie man sieht, die nemliche, welche die singulaire Stammgleichung giebt, wenn $u = F(x, y, a) = 0$ die vollständige Stammgleichung mit der Constante a ist. [*Man sehe oben die 15te Vorlesung.*] Hieraus folgt die Identität der singulairen Stammgleichung und der Gleichung der Curve, welche alle, durch die vollständige Stammgleichung ausgedrückte Curven umfängt, wie es in den Eigenschaften des Gegenstandes selbst liegt.

Umfangende Curven.

239.

Vorstehende geometrische Betrachtung ist für die Theorie der singulairen Stammgleichungen wichtig. Sie zeigt die Verbindung, in welcher die durch die singulaire Stammgleichung ausgedrückten Curven stehen, so wie das analystische Princip, welches der Theorie zur Grundlage dient und auf die Verbindung der nemlichen Gleichungen, vermittelst der Veränderung der willkürlichen Constanten, führt.

Die analytische Aufgabe im Anfange der vorigen Vorlesung besteht also, geometrisch, darin, die Curven mit veränderlichem Parameter zu finden, deren stetig aufeinander folgende Durchschnitte eine gegebene Curve bilden.

Diese Aufgabe lässt sich also auch, wie folgt, ausdrücken.

240.

Man setze, es wären zwei Curven und ihre Gleichungen gegeben. Die eine Gleichung enthalte zwei willkürliche Constanten. Man solle das Verhältniss zwischen diesen beiden Constanten finden, für welches, wenn man die eine, willkürlich bleibende Constante sich verändern lässt, eine unendliche Menge aufeinander folgender Curven entstehen, deren aufeinander folgende Durchschnitte die andere Curve bilden. [*Diese Aufgabe also ist wesentlich der geometrische Ausdruck der Aufgabe von* 208 *u.* 209.]

Um diese Aufgabe aufzulösen darf man nur, nach der Methode der vorigen Vorlesung, das Verhältniss

zwischen den beiden Constanten der gegebenen Gleichung

$$u = F(x, y, a, b) = 0$$

suchen, welches Statt finden muss, wenn diese Gleichung, als vollständige Stammgleichung betrachtet, der singulairen Stammgleichung

$$y = \Sigma x$$

entsprechen soll, welche dann die Gleichung der Curve ist, die durch die aufeinander folgenden Durchschnitte der durch die andere Gleichung gegebenen Curven entsteht.

Johann Bernoullis Behandlung der Aufgabe.

241.

Diese von Leibnitz abgehandelte Aufgabe ist auch von Johann Bernoulli in seinen Vorlesungen über den Integral-Calcul (im dritten Bande von Johann Bernoullis Werken, in der 14ten Vorlesung) aber auf eine andere Weise, die jedoch das nemliche Resultat giebt, aufgelöset worden. Bernoulli nimmt zwei, einander unendlich nahe Normalen an und bemerkt, dass sich der unendlich kleine Wachsthum der Normale zum Wachsthum des der Normale entsprechenden Theils der Axe, wie der Theil der Axe zwischen der Ordinate und der Normale, zu der Normale selbst verhält; wie dieses leicht aus der Aehnlichkeit der entstehenden Dreiecke folgt.

Johann Bernoullis Behandlung.

Er erhält durch die Differential-Rechnung, wenn, wie oben, der der Normale entsprechende Theil der Axe, a, die Normale selbst b heisst, die Gleichung

$$\frac{db}{dx} = \frac{a-x}{b}.$$

Auf der andern Seite giebt das rechtwinklige Dreieck, dessen Hypothenuse b und dessen beide Seiten y und $a-x$ sind,

$$y^2 + (a-x)^2 = b^2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$x = a - \frac{b\,db}{da} \text{ und } y = b\sqrt{\left(1 - \frac{db^2}{da^2}\right)}.$$

Nun geben aber die Bedingungen der Aufgabe b in a ausgedrückt. Man erhält also x und y in a, und wenn man a eliminirt, die gesuchte Gleichung der Curve zwischen x und y.

Setzt man, wie in dem Leibnitzschen Beispiele,

$$b = \sqrt{(ka)},$$

so erhält man

$$\frac{db}{da} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)};$$

also, wenn man Dieses in die Ausdrücke von x und y substituirt,

$$x = a - \tfrac{1}{2}k,\ y = \sqrt{(ak - \tfrac{1}{4}k^2)},$$

und wenn man a eliminirt,

$$y^2 = kx + \tfrac{1}{4}k^2$$

für die Gleichung der gesuchten Curve, welche, wie man sieht, die nemliche Parabel ist, die Leibnitz auf einem ganz verschiedenem Wege fand.

der Aufgabe.

242.

Dieses ist Johann Bernoullis Auflösung, deren Resultat, wie man sieht, mit dem Leibnitzischen übereinstimmt und worüber sich also Aehnliches sagen lässt.

Es ist aber wieder auffallend, dass Bernoulli übersahe, dass die Aufgabe wesentlich für die umgekehrte Methode der Tangenten gehört und dass die allgemeine Auflösung von einer Integration abhängt, die nothwendig eine willkürliche Constante in die Gleichung zwischen x und y bringen muss. Dieses ist um so sonderbarer, da er in den nemlichen Vorlesungen die Differential-Ausdrücke der Normale und Subnormale gegeben hatte und da die Aufgabe in nichts weiter besteht, als zwischen diesen Grössen ein bestimmtes Verhältniss einzuführen.

Sodann ist aus dem Obigen klar, dass Bernoullis Auflösung wirklich von einer Integral- oder einer singulairen Stamm-Gleichung abhängt. Um dieses aus seiner eigenen Rechnung zu beweisen, darf man nur bemerken, dass man ohne Weiteres die Gleichung zwischen x und y erhält, wenn man den durch die Aufgabe gegebenen Werth von b in a, in die beiden Gleichungen

$$\frac{db}{da} = \frac{a-x}{b} \text{ und } y^2 + (a-x)^2 = b^2$$

substituirt und darauf a eliminirt.

Setzt man nemlich

$$b = \sqrt{(ka)},$$

Johann Bernoullis Behandlung

so gehen die beiden Gleichungen in

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)} = \frac{a-x}{\sqrt{(ka)}} \text{ und } y^2 + (a-x)^2 = ka$$

über. Die erste giebt

$$\tfrac{1}{2}k = a - x, \text{ also } a = x + \tfrac{1}{2}k,$$

welches in die zweite substituirt,

$$y^2 + \tfrac{1}{4}k^2 = kx + \tfrac{1}{2}k^2,$$

und folglich

$$y^2 = kx + \tfrac{1}{4}k^2$$

giebt, wie wir es vorhin fanden.

Nun aber bemerke ich, dass die Differential-Gleichung

$$\frac{db}{da} = \frac{a-x}{b}, \text{ oder } b\,db = (b-x)\,da$$

nichts anders als das Differential der andern Gleichung

$$y^2 + (a-x)^2 = b^2$$

ist, wenn man blos a und b sich verändern lässt. Es reducirt sich also die Auflösung, weil b als Function von a betrachtet wird, darauf, die Grösse a in der Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

allein sich verändern zu lassen und hernach a, vermittelst der entstehenden Gleichung zu eliminiren, welches, wie man sieht, mit dem Verfahren bei Leibnitz übereinstimmt, weil die Gleichung die nemliche ist, wie seine Kreis-Gleichung. Eben so sieht man, dass dieses Verfahren mit demjenigen übereinkommt, welches die singulaire Stammgleichung der Ablei-

der Aufgabe.

tungs- oder Differential-Gleichung giebt, deren vollständige Stammgleichung mit der willkürlichen Constante a die nemliche Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

ist. Man erhält also diese Ableitungs-Gleichung, wenn man a zwischen der Stammgleichung und ihrer Abgeleiteten

$$y\frac{dy}{dx} + x - a = 0$$

eliminirt, oder a und b vermittelst dieser beiden Gleichungen bestimmt, sodann aber die Werthe dieser beiden Grössen in die Gleichung substituirt, die das durch die Bedingung der Aufgabe bestimmte Verhältniss zwischen a und b ausdrückt.

Die beiden Gleichungen geben

$$a = x + y\frac{dy}{dx} \text{ und } b = y\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)},$$

welche Ausdrücke, wie man sieht, die nemlichen sind, die wir oben für die Normale b und für den dieser Normale entsprechenden Theil a der Axe fanden, so dass, wenn z. B. das Verhältniss zwischen den beiden Grössen a und b, allgemein durch

$$\Phi(a, b) = 0$$

ausgedrückt wäre, die der Stammgleichung

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

entsprechende Ableitungs-Gleichung

$$\Phi\left(x + y\frac{dy}{dx}, y\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\right) = 0$$

seyn würde.

Dieses ist die allgemeine Gleichung für das Leibnitzische und Bernoullische Problem, von welchem diese beiden Mathematiker, auf verschiedenen Wegen, die singulaire Stammgleichung fanden, ohne jene Art von Widerspruch zu bemerken, in welchen ihre Auflösungen mit den Principien der Differential-Rechnung stehen.

243.

Ehe wir diesen Gegenstand verlassen, ist es nöthig, a priori zu zeigen, warum die aus der Gleichung des Kreises

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

und ihrer Abgeleiteten

$$y\frac{dy}{dx} + x - a = 0$$

genommenen Werthe der Constante a und b die nemlichen sind, welche man findet, wenn man die Normale, und den der Normale entsprechenden Theil der Axe, in einer beliebigen, auf die Coordinaten x und y bezogenen Curve sucht.

Stellt man sich einen Kreis vor, der eine Curve in irgend einem Puncte berührt, so ist offenbar der Halbmesser des Kreises die Normale der Curve in dem Berührungs-Puncte. Nun ist die obige Gleichung, wie wir sahen, die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunct in der Axe liegt und der Abscisse a entspricht, und dessen Halbmesser b ist. Damit dieser Kreis eine gegebene Curve berühre, muss er erstlich einen Punct mit ihr gemein haben, für

welchen

welchen also die Coordinaten x und y beide gemeinschaftlich sind. Ferner muss der Werth von $\frac{dy}{dx}$, wie wir oben im zweiten Theile der Theorie der analytischen Functionen zeigten, für den Kreis und die Curve der nemliche seyn. Soll also b die Normale der Curve und a der zugehörige Theil der Axe seyn, so muss nothwendig die Gleichung

$$y^2 + (x-a)^2 - b^2 = 0,$$

und ihre Abgeleitete

$$y\frac{dy}{dx} + x - a = 0,$$

für die Constanten a und b, in Beziehung auf die Coordinaten x und y, zugleich Statt finden; woraus man für a und b die oben gefundenen Werthe erhält.

Tailor fand zuerst direct eine singulaire Stammgleichung aus der Abgeleiteten.

244.

Die Untersuchungen von Leibnitz und Johann Bernoulli enthalten die ersten Beispiele singulairer Stammgleichungen. Aber Tailor ist vielleicht der Erste, welcher direct eine singulaire Stammgleichung aus der Abgeleiteten fand.

In seinem Werke „methodus incrementorum“ welches im Jahre 1715 erschien, kommt Tailor, Seite 27, bei der Auflösung einer gewissen Aufgabe, auf die Differential-Gleichung

Tailor fand zuerst direct eine singulaire

$$1 = y^2 - 2zy\frac{dy}{dz} + (1+z^2)\frac{dy^2}{dz^2}.$$

(Ich bediene mich, der Bequemlichkeit wegen, der Differentiale, statt der Fluxionen der Engländer. Beide sind im Grunde das Nemliche.) In dieser Gleichung ist y eine Function von z. Tailor differentiirt die Gleichung, indem er dz constant setzt und erhält

$$\left[0 = 2y\frac{dy}{dz} - 2y\frac{d}{dz} - 2z\frac{dy^2}{dz^2} - 2zy\frac{d^2y}{dz} + 2z\frac{dy^2}{dz^2} + 2(1+z^2)\frac{dy}{dz}.\frac{d^2y}{dz},\ oder\right]$$

$$\left(-2zy + 2(1+z^2)\frac{dy}{dz}\right)\frac{d^2y}{dz} = 0,$$

woraus

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 0 \text{ und } zy - (1+z^2)\frac{dy}{dz^2} = 0$$

folgt. Die zweite Gleichung giebt

$$\frac{dy}{dz} = \frac{zy}{1+z^2},$$

und, wenn man Dieses in die gegebene Gleichung substituirt,

$$1 = y^2 - \frac{2z^2y^2}{1+z^2} + \frac{z^2y^2}{1+z^2},$$

oder

$$1 + z^2 = y^2;$$

welches, wie Tailor sagt, singularis quaedam solutio problematis ist.

Die erste Gleichung $d^2y = 0$ giebt, wenn man der Reihe nach ihre beiden Stammgleichungen oder Integrale nimmt, weil dz constant ist,

$$y = a + bz,$$

Stammgleichung aus der Abgeleiteten.

wo a und b zwei willkürliche Constanten bedeuten. Da indessen die gegebene Gleichung $\left[1 = y^2 - 2zy\frac{dy}{dz} + (1+z^2)\frac{dy^2}{dz^2}\right]$ nur von der ersten Ordnung ist, so kann sie nur eine Constante herbeiführen. Man muss also diesen Werth von $y\,[y = a + bz]$ darin substituiren, um das nothwendige Verhältniss zwischen a und b zu finden. Zu dem Ende darf man nur überall $z = 0$ setzen [*weil die Gleichung für jeden Werth von z, also auch für z = 0 gilt*] welches

$$y = a,\ \frac{dy}{dz} = b$$

und [*wenn man z = 0 in die gegebene Gleichung* $1 = y^2 - 2zy\frac{dy}{dz} + (1+z^2)\frac{dy^2}{dz^2}$ *setzt,*]

$$1 = y^2 + \frac{dy^2}{dz^2},$$

folglich $1 = a^2 + b^2$, oder

$$b = \sqrt{(1 - a^2)}$$

giebt.

245.

Vermöge dessen, was wir in den letzten Vorlesungen zeigten, sieht man leicht, dass das, was Tailor eine singulaire Auflösung nennt, nichts anders als eine singulaire Stammgleichung der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$1 = y^2 - 2zy\frac{dy}{dz} + (1+z^2)\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$$

ist, welche

Fall bei

$$y = a + z\sqrt{(1-a^2)}$$

zur vollständigen Stammgleichung hat. Denn setzt man $\frac{dz}{dx} = 1$ [*welches der obige Fall des constanten Differentials dz ist*] so ist die Ableitung dieser Gleichung erster Ordnung [*wie oben*]

$$\left(-2zy + 2(1+z^2)\frac{dy}{dz}\right)\frac{d^2y}{dz^2}.$$

Der Factor erster Ordnung $-2zy + 2(1+z^2)\frac{dy}{dz}$ giebt die singulaire Stammgleichung, der andere Factor $\frac{d^2y}{dx^2}$ giebt die vollständige Stammgleichung, wie wir dieses näher in der sechszehnten Vorlesung sahen.

Man kann auch die erste Gleichung aus der zweiten hernehmen, wenn man wie in der funfzehnten Vorlesung verfährt. Denn da die vollständige Stammgleichung

$$y = a + 2\sqrt{(1-a^2)}$$

ist, so ist ihre Ableitung nach a,

$$a = 1 - \frac{2a}{\sqrt{(1-a^2)}}.$$

Eliminirt man a zwischen diesen beiden Gleichungen so erhält man

$$1 + z^2 = y^2.$$

Fall bei Clairaut.

246.

Lange Zeit nachher, im Jahre 1734, stiess auch Clairaut, als er einige Aufgaben von Curven

Clairaut.

auflösete, auf eine Differential-Gleichung, von welcher er, vermittelst der Differentiation, zwei verschiedene Integrale erhielt. Er war auf die beiden Gleichungen

$$(x-u).\Pi.u = y - \varphi u \text{ und } dy = \Pi.u\,dx$$

gekommen, in welchen Πu und φu gegebene Functionen einer veränderlichen Grösse u bedeuten, die zu eliminiren war.

Da die Elimination im Allgemeinen unmöglich war, so hatte Clairant den glücklichen Gedanken, die erste Gleichung zu differentiiren und in das Differential den Werth von dy aus der zweiten Gleichung zu substituiren, welches $\left[\left(1-\frac{du}{dx}\right)\Pi u + (x-u)\frac{d\Pi u}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{d\varphi u}{du}.\frac{du}{dx}\right.$, *und*, *wenn man den Werth von* $\frac{dy}{dx}$, *nemlich* Πu, *aus der zweiten Gleichung substituirt*, $\Pi u - \frac{du}{dx}\Pi u + (x-u)\frac{d\Pi u}{du}.\frac{du}{dx} = \Pi u - \frac{d\varphi u}{du}.\frac{du}{dx}$, *oder*$\Big]$

$$\left(\Pi u - (x-u)\frac{d\Pi u}{du} - \frac{d\varphi u}{du}\right)\frac{du}{dx} = 0$$

giebt, woraus zwei Werthe von u folgen. Den einen bestimmt die Gleichung

$$\Pi u - (x-u)\frac{d\Pi u}{du} - \frac{d\varphi u}{du} = 0;$$

den anderen die Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

Fall bei

welche letztere, wenn man integrirt,

$$u = a$$

giebt, wo a eine willkürliche Constante bedeutet.

Diese beiden Werthe von u in die gegebene Gleichung

$$(x - u)\Pi u = y - \varphi u$$

substituirt, geben zwei Integrale in x und y, eins ohne willkürliche Constante, das andere mit der willkürlichen Constante a, welches also

$$(x - a)\Pi a = y - \varphi a$$

ist, und, wie man sieht, nur grade Linien ausdrückt.

Clairaut untersucht hierauf einige besondere Fälle der Aufgabe, wobei er zeigt, dass die Integral-Rechnung immer nur die durch die allgemeine Gleichung

$$x\Pi a - a\Pi a = y - \varphi a$$

ausgedrückte grade Linien giebt und dass die auf dem ersten Wege gefundenen Gleichungen der Integration entgehen.

„Es hat mich sehr gefreut" sagte er, „diese Be-„sonderheit der Rechnung, welche sich hier leicht „darbietet, zeigen zu können. Man könnte sie un-„abhängig von der gegenwärtigen Aufgabe folgender-„maassen ausdrücken."

„Es giebt Differential-Gleichungen, die zwei ver-„schiedene Auflösungen zulassen, von welcher die „eine (hier selbst die allgemeinste) der Integration „nicht bedarf. Solche Gleichungen sind z. B.

$$x\,dy\,dx - dy^2 = y\,dx^2 - dy\,dx,$$

Clairaut.

„welcher Gleichung die beiden Gleichungen

$4y = x^2 + 2x + 1$ und $2ax - x^2 = - 4y + 1 - a^2$

„genugthun; desgleichen

$$a\,dy^2 + x\,dy^2 - y\,dy\,dx = x\,dx\,dy - y\,dx^2,$$

„welche Gleichung die Auflösungen

$\frac{x}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} = \sqrt{(4a)}$ und $b^2 y - 2bx + 2by = -4a$

„hat.“

„Allgemein sey die Gleichung

$\frac{d\varphi(x,y)}{\varphi(x,y)}$ = einer beliebigen Function von x, y, dx, dy

„von dieser Art. Integrirt giebt sie die eine Glei-
„chung und ohne Integration die andere Gleichung

$$\varphi(x,y) = 0.“$$

Man sehe die Mémoiren der Academie der Wissenschaften vom Jahre 1734. Seite 213.

247.

Erinnert man sich an die obigen verschiedenen Auflösungen nach unserer Art, so ist klar, dass diejenigen, welche keine willkürlichen Constanten enthalten, nichts anders als singulaire Stammgleichungen sind; die andern mit willkürlichen Constanten, vollständige Stammgleichungen. Clairaut hat aber unrecht, diese letztern deshalb für weniger allgemein zu halten, weil sie nur grade Linien ausdrücken.

Von der Gleichung

$$\frac{d\varphi(x,y)}{\varphi(x,y)} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

Fall bei

kann man nicht allgemein mit Clairaut sagen, dass die endliche Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0$$

von der Art der Integrale ist, die er vorhin ohne willkürliche Constante fand. Dieses Integral kann eine singulaire Stammgleichung, oder blos ein besonderer Fall der vollständigen Stammgleichung seyn.

Denn setzt man, der Kürze wegen,

$$\varphi(x, y) = z$$

und stellt sich vor, der Werth von y in z sey aus dieser Gleichung genommen und in $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ substituirt worden, so erhält man eine Gleichung zwischen x und z von der Gestalt

$$\frac{dz}{dx} = f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) dx, \text{ oder}$$

$$\frac{dz}{dx} = zf\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right).$$

Soll $z = 0$ eine singulaire Stammgleichung seyn, so muss $z = 0$, wie wir in der funfzehnten Vorlesung, in [191.] sahen,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{0}{0}$$

geben. Nimmt man nun die Ableitung der vorigen Gleichung $\left[\frac{dz}{dx} = zf\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)\right.$; *welches* $\frac{d^2z}{dx^2} =$

$$\frac{dz}{dx}f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) + z\frac{df\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)}{dx} + \frac{df\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)}{d\frac{dz}{dx}}.$$

Clairaut.

$\frac{d^2z}{dx^2}$, *oder, wenn man* $\frac{dz}{dx} = zf\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)$ *sub-*

stituirt, $\frac{d^2z}{dx^2}\left(1 - z \cdot \frac{df\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)}{d\frac{dz}{dx}}\right) =$

$zf\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{df\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)}{dx}$, *also für* $z = 0$,

$$\frac{d^2z}{dx^2}\left(1 - z\frac{df\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)}{d\frac{dz}{dx}}\right) = 0, \textit{ oder}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{0}{1 - z\frac{df\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)}{d\frac{dz}{dx}}}$$

giebt], so sieht man, dass diese Bedingung nicht anders Statt finden kann, als wenn, für $z = 0$,

$$z \cdot \frac{df\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)}{d\frac{dz}{dx}} = 1$$

ist. In andern Fällen kann also die Gleichung $z = 0$ nur ein besonderer Fall der vollständigen Stammgleichung seyn.

Betrachtet man in der That z nur erst als sehr klein und lässt z in der Function $f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)$ weg, so ist blos

$$\frac{dz}{dx} = zf(x),$$

Fall bei

woraus

$$\frac{dz}{dx} : z = fx,$$

und, wenn man die Stammgrössen nimmt,

$$\overset{e}{log}\, z = \int fx + k$$

folgt, wo k eine willkürliche Constante bedeutet. Nun ist klar, dass man in der Gleichung

$$\overset{e}{log}\, z = \int f(x) + k$$

$z = 0$ erhält, wenn man $k = \infty$ setzt, weil

$$\overset{e}{log}\, 0 = -\infty$$

ist. Also ist $z = 0$ ein besonderer Fall der vollständigen Stammgleichung [*weil es für diesen Fall nur auf die Bestimmung der Constante k ankommt.*

Lagrange bezeichnet hier oben das Integral $\int fx$ durch $f_{,}$, und sagt bei dieser Gelegenheit, man könne auch z. B. die Stammgrösse von y durch $y_{,}$ die Stammgrösse von $y_{,}$ durch $y_{,,}$ u.s.w. bezeichnen, welche Bezeichnung er auch schon in seinem Werke über die numerischen Gleichungen vorgeschlagen habe, und die ihm eben so zweckmässig scheine, als die überall gebrauchte Bezeichnung der Ableitungen. Diese neue Lagrangische Bezeichnung findet hier nicht Statt, weil sie zu den alten Zeichen nicht passt. Indessen hat Lagrange unstreitig vollkommen Recht, Stammgrössen und Ableitungen durch ähnliche Zeichen anzudeuten und es ist in der That eine der grössten Inconsequenzen der alten Bezeich-

Clairaut.

nung, ein ∫ für die Zurückleitung zu setzen, während man für die Ableitung ein d setzt. Wenn man die Ableitungen von x durch dx, d^2x etc. bezeichnet, so hat man gar keine Wahl mehr, wie man die Stammgrössen von x bezeichnen will. Man muss sie nothwendig durch $d^{-1}x$, $d^{-2}x$ etc. bezeichnen, aus dem Grunde, weil die Zurückleitung durchaus nichts anders als die Umkehrung der Ableitungs-Operation ist und aus der Stammgrösse die Ableitung rückwärts wieder durch die Ableitungs-Operation gefunden wird. Verschiedene Zeichen für die Ableitungs- und Zurückleitungs-Operation sind vollkommen eben so inconsequent, und verwirren und verdunkeln die Begriffe eben so sehr, als wenn man z. B. die mte Potenz von x durch x^m, hingegen 1 dividirt durch x^m, nicht durch x^{-m}, oder die mte Wurzel aus x nicht durch $x^{\frac{1}{m}}$, sondern diese beiden letzten Grössen durch willkürliche andere Zeichen ausdrücken wollte. Dergleichen wäre in der That mehr als inconsequent: es wäre unrichtig. Eben so ist es mit dem ∫ für die Integration, neben einem d für die Differentiation. Es ist sonderbar, dass ein so einfacher und zugleich für die Deutlichkeit der Begriffe nicht unwichtiger Umstand so lange unbeherzigt bleibt. Die Vernachlässigung ist nur aus der Unrichtigkeit des Begriffs selbst zu erklären, welchen die Vorstellung des

sogenannten Unendlich-Kleinen mit dem Worte „Integral" oder „Stammgrösse" zu verbinden pflegt, indem man Integral für Summe von Differentialen nimmt, welche dann das ∫ andeuten soll, dergleichen es aber auf keine Weise ist. So veranlasst ein unrichtiger Begriff von einem Gegenstande ein unrichtiges Zeichen und das unrichtige Zeichen erhält, befördert und vergrössert wieder die Unrichtigkeit des Begriffs. Die Rückwirkung und Fortpflanzung ist, was der Irrthum mit der Wahrheit gemein hat.]

Fälle singulairer Stammgleichungen bei Euler.

248.

Euler war in seiner Mathematik ebenfalls auf verschiedene Beispiele zweifacher Integrale gekommen. Er hatte selbst einige Regeln gegeben, um sie in einigen Fällen zu finden, wie man aus den Artikeln 268, 303, 335 des zweiten Bandes der Mechanik sieht. Aber erst mehrere Jahre später beschäftigte er sich in einem Mémoire, welches den Titel führt: „Exposition de quelques paradoxes du calcul integral" und in den Sammlungen der Academie von Berlin, vom Jahre 1756, gedruckt ist, mit diesem Gegenstande ex professo.

In diesem Mémoire stellt Euler verschiedene, auf die Tangenten sich beziehende Aufgaben auf, welche nothwendig auf Differential - Gleichungen

bei Euler.

führen und bemerkt, dass sie allemal zweier Auflösungen fähig sind, einer durch die Integration, die also eine willkürliche Constante erfordert, und einer anderen, unabhängig von der Integration, durch die Differentiation der gegebenen Gleichung.

249.

Folgendes ist eine dieser Aufgaben. Man verlangt eine Curve, die die Eigenschaft hat, dass, wenn man aus zwei bestimmten Puncten Perpendikel auf die Tangenten der Curve zieht, das Product dieser Perpendikel immer gleich gross ist.

Man lege durch die beiden gegebenen Puncte die Abscissen-Axe und nenne die beiden Abscissen der gegebenen Puncte, p und q, und die Subtangente für einen beliebigen Punct, das heisst, den zwischen der Tangente und der Ordinate y liegenden Theil der Axe t, so ist $t - x$ der Theil der Axe zwischen der Tangente und dem Anfangs-Puncte der Abscisse; also sind $t - x + p$ und $t - x + q$ die Theile der Axe zwischen den beiden gegebenen Puncten und der Tangente.

Zieht man nun von den beiden Puncten Perpendikel auf die Tangente, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, die dem von der Tangente, der Ordinate y und der Subtangente t umgebenen rechtwinkligen Dreiecke ähnlich sind. [*Da es nicht schwer ist, eine kleine Figur hierzu zu entwerfen, so kann dieselbe füglich erspart werden.*] Desgleichen ist klar, dass in diesem Dreiecke die Linien

Fälle singulairer Stammgleichungen

$t - x + p$, $t - x + q$ der Tangente selbst entsprechen welche $\sqrt{(y^2 + t^2)}$ ist, während die Perpendikel der Ordinate y zugehören, so dass man für die Perpendikel die Ausdrücke,

$$\frac{(t - x + p)y}{\sqrt{(y^2 + t^2)}} \text{ und } \frac{(t - x - q)y}{\sqrt{(y^2 + t^2)}}$$

erhält und folglich die Grund-Gleichung der Aufgabe

$$\frac{(t - x + p) \cdot (t - x + q)y^2}{y^2 + t^2} = k$$

ist, wo k eine gegebene Constante bedeutet.

Nun ist $\frac{dy}{dx}$ der Ausdruck des Verhältnisses der Ordinate zur Subtangente; also ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{t} \text{ und folglich } t = y : \frac{dy}{dx}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die vorige Gleichung, so erhält man

$$\frac{\left(y - x\frac{dy}{dx} + p\frac{dy}{dx}\right)\left(y - x\frac{dy}{dx} + q\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k,$$

welches eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist. Sie giebt die Differential-Formel

$$(ydx - xdy + pdy)(ydx - xdy + qdy) - k(dx^2 + dy^2) = 0,$$

welche Gleichung also die Bedingung der Aufgabe ausdrückt.

Euler sagt, es würde schwer seyn, diese Gleichung direct zu integriren; man könne sie aber leicht durch Differentiation auflösen.

bei Euler.

Man erhält, wenn man x constant setzt [*und differentiirt*]:

$$(y\,dx - x\,dy + q\,dy)(p - x)\,d^2y$$
$$+ (y\,dx - x\,dy + p\,dy)(q - x)\,d^2y - 2k\,dy\,d^2y = 0,$$

welche Gleichung überall durch d^2y theilbar ist.

Dividirt man durch d^2y, so erhält man

$$(\nabla.)\quad (y\,dx - x\,dy + q\,dy)(p - x)$$
$$+ (y\,dx - x\,dy + p\,dy)(q - x) - 2k\,dy = 0,$$

welche Gleichung nur von der ersten Ordnung ist, wie die gegebene und also, wenn man zwischen ihr und der gegebenen dy eliminirt, eine Gleichung zwischen x und y giebt.

Multiplicirt man sie in der That mit dy und zieht das Resultat von der gegebenen ab, nachdem diese mit 2 multiplicirt worden, so erhält man

$$2y^2\,dx^2 + y\,dy\,dx(p + q - 2x) - 2k\,dx^2 = 0,$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(k - y^2)}{y(p + q - 2x)}$$

folgt. Aber die nemliche Gleichung $(\nabla.)$ giebt auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(p + q - 2x)}{2(k - (p - x)(q - x))}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich und multiplicirt kreuzweis', so erhält man

$$y^2(p + q - 2x)^2 = 4(k - y^2)(k - (p - x)(q - x)),$$

welches sich auf

$$((p - y)^2 + 4k)y^2 + 4k(p - x)(q - x) = 4k^2,$$

oder, noch kürzer, auf

Fälle singulairer Stammgleichungen

$$y^2 + \frac{k}{k + \frac{1}{4}(p-q)^2}(x - \tfrac{1}{2}(p+q))^2 = k$$

reduciren lässt und die Gleichung einer Ellipse ist, für welche das Quadrat der halben kleinen Axe k, das Quadrat der halben grossen Axe $k + \frac{1}{4}(p-q)^2$, also $\frac{1}{2}(p-q)$ die Entfernung des Mittelpuncts von den Brennpuncten ist. Und da der Mittelpunct der Ellipse die Abscisse $\frac{1}{2}(p+q)$ hat, so folgt, dass die Abscissen der beiden Brennpuncte p und q sind und dass folglich die Brennpuncte in den beiden gegebenen Puncten liegen [*aus welchen die Perpendikel auf die Tangenten gezogen werden sollten. Alle hier nöthige Zwischen-Rechnungen haben keine Schwierigkeit, daher sie, um den Raum zu sparen, füglich wegblieben*].

In der That ist aus der Theorie der Kegelschnitte bekannt, dass das Product der Perpendikel aus den Brennpuncten auf eine beliebige Tangente, constant und der halben kleinen Axe gleich ist.

Die so eben gefundene Gleichung enthält keine willkürliche Constante, weil sie aus zwei Differential-Gleichungen erster Ordnung, vermittelst der Elimination der Grösse $\frac{dy}{dx}$, gefunden wird. Man erhält aber eine andere Gleichung mit einer willkürlichen Constante aus dem andern Factor d^2y, welcher die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung

$$d^2y = 0$$

giebt, woraus [*wenn man integrirt*]

$$dy = a\,dx$$

folgt,

bei Euler.

folgt, wo a eine willkürliche Constante bedeutet. Verbindet man diese Gleichung mit der gegebenen, so erhält man

$$(y-ax+ap)(y-ax+aq)=k.(1+a^2),$$

woraus

$$y-ax+\tfrac{1}{2}a(p+q)=\pm\sqrt{((1+a^2)k+\tfrac{1}{4}a^2(p-q)^2)}$$

folgt, welche Gleichung zwei grade Linien ausdrückt.

In der That ist leicht zu sehen, dass auch die grade Linie der Aufgabe genugthut, in so fern die Linie so gelegt wird, dass das Product der aus den beiden gegebenen Puncten auf sie gezogenen Perpendikel gleich k ist.]

Setzt man in die oben gefundenen allgemeinen Ausdrücke dieser Perpendikel, statt t seinen Werth $y:\frac{dy}{dx}$, oder, nach Art der Differential-Rechnung, $y\frac{dx}{dy}$, so erhält man

$$\frac{ydx-xdy+pdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} \text{ und } \frac{ydx-xdy+qdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}.$$

Es sey im Allgemeinen

$$y=ax+b$$

die Gleichung der graden Linie, so erhält man [*wenn man diese Gleichung differentiirt*]

$$dy=adx.$$

Substituirt man diese Werthe [*von y und dy*], so erhält man für den obigen Ausdruck der Perpendikel,

$$\frac{b+ap}{\sqrt{(1+a^2)}} \text{ und } \frac{b+aq}{\sqrt{(1+a^2)}},$$

folglich die Gleichung

$$(b+ap)(b+aq) = k(1+a^2),$$

woraus

$$b = -\tfrac{1}{2}a(p+q) \pm \sqrt{((1+a^2)k + \tfrac{1}{4}a^2(p-q)^2)}$$

folgt, welches die nemliche grade Linie giebt, die wir oben fanden.

250.

Dieses ist Eulers Rechnung, die ich hier, als Beispiel eines Gegenstandes, der in den Elementar-Büchern noch wenig behandelt ist, etwas ausführlich hersetzte.

Wie man sieht, lässt die Aufgabe wirklich zwei sehr verschiedene Auflösungen zu. Die eine giebt eine grade Linie, die andre eine Ellipse.

Euler suchte nicht die beiden Auflösungen mit einander zu verbinden, oder eine von der andern abhängig zu machen. Er begnügte sich, die Zwiefachheit der Auflösung als ein Paradoxon der Integral-Rechnung aufzustellen, welches sie in so fern sey, da die Gleichung mit einer willkürlichen Constante, die also die vollständige Stammgleichung ist, nicht die andere endliche Gleichung mit in sich fasse, welche gleichwohl eben so gut der Differential-Gleichung genugthue; welches in der That den Principien der Differential-Rechnung zu widersprechen scheine.

Euler betrachtet auch als ein Paradoxon, dass die Differentiation die Stelle der Integration vertreten könne, welches jedoch nur von den Integralen ohne

willkürliche Constante zu verstehen sey, die unmittelbar aus dem Differentiale der gegebenen Gleichung folgen, wenn man dasselbe mit der gegebenen Gleichung verbindet; denn die andere Gleichung, welche durch eine nachherige Integration gefunden wird, sey dann den allgemeinen Grundsätzen der Rechnung angemessen.

Anwendung der obigen Theorie auf die Eulersche Aufgabe.

251.

Aus unserer obigen Theorie der singulairen Stammgleichungen zeigt sich deutlich, dass diese Eulersche Paradoxen wesentliche Resultate der Analysis sind.

Es ist nemlich klar, dass die Gleichung der Ellipse, ohne willkürliche Constante, nichts anders als die singulaire Stammgleichung der durch die Bedingung der Aufgabe gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist, weil man sie vermittelst des Factors der nemlichen Ordnung erhält, der die abgeleitete der Gleichung multiplicirt. Die Gleichung der graden Linie hingegen, welche durch den andern Factor zweiter Ordnung entsteht, ist durch die vollständige Stammgleichung mit einer willkürlichen Constante gegeben; ganz wie es nach der Theorie der sechzehnten Vorlesung seyn muss.

Nimmt man aus der Gleichung der graden Linie

$$y = ax + b,$$

Anwendung der obigen Theorie auf

und aus ihrer Abgeleiteten:

$$\frac{dy}{dx} = a,$$

die Werthe der Constanten a und b, so erhält man

$$a = \frac{dy}{dx} \text{ und } b = y - x\,\frac{dy}{dx}.$$

Substituirt man diese Werthe von a und b in die, durch die Bedingungen der Aufgabe gegebene Gleichung, nemlich in

$$(b + ap).(b + aq) = k(1 + a^2),$$

so erhält man die Gleichung

$$\left(y - x\frac{dy}{dx} + p\frac{dy}{dx}\right)\left(y - x\frac{dy}{dx} + q\frac{dy}{dx}\right)$$
$$= k\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right),$$

welche, wie man sieht, die nemliche Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist, auf welche die Aufgabe direct führt. Diese Gleichung gehört also zu der Gattung derjenigen in der vorigen Vorlesung, deren allgemeine Gestalt

$$\Phi(a, b) = 0$$

ist und die allemal eine singulaire Stammgleichung haben, welche man finden kann, wenn man zwischen ihnen und ihren nach $\frac{dy}{dx}$ Abgeleiteten, die Grösse $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, welches also das nemliche Resultat giebt, welches wir oben fanden.

Wollte man die singulaire Stammgleichung aus der vollständigen Stammgleichung finden, wie in der

funfzehnten Vorlesung, so dürfte man nur in die Bedingungs-Gleichung zwischen a und b, zunächst den aus der Gleichung

$$y = ax + b$$

genommenen Werth von b substituiren, welches

$$(y - ax + ap)(y - ax + aq) = k(1 + a^2),$$

also die Gleichung zweier graden Linien giebt, und als die vollständige, der Aufgabe entsprechende Stammgleichung mit der willkürlichen Constante a betrachtet werden kann. Man darf also nur zwischen dieser Gleichung und ihrer Ableitung die Grösse a eliminiren, so erhält man wieder das nemliche Resultat, weil die Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ die nemliche Form hat wie nach a. So lassen sich die verschiedenen Methoden mit einander in Uebereinstimmung bringen.

252.

Bei Gelegenheit der Leibnitzschen Aufgabe zeigten wir, dass jede singulaire Stammgleichung die Curve ausdrückt, welche durch die stetige Aufeinanderfolge der Durchschnitte der, durch die vollständige Stammgleichung bezeichneten Curven entsteht. So lässt sich sagen, dass die Ellipse, welche die Eulersche Aufgabe auflöset, die stetige Aufeinanderfolge der Durchschnitte aller, durch die Gleichung

$$(y - ax + ap)(y - ax + aq) = k(1 + a^2)$$

ausgedrückten graden Linien ist, wenn man annimmt, dass in dieser Gleichung a, von einer Linie zur andern sich ändert.

Man könnte also auch die Eulersche Aufgabe eben so auflösen, wie Leibnitz die Aufgabe, von welcher im Anfange dieser Vorlesung die Rede war, und folglich direct zu der Ellipse gelangen, welche die Rechnung nur indirect giebt.

Uebersicht dessen, was die Theorie der singulairen Stammgleichungen betrifft.

253.

Man hatte bis jetzt die singulairen Stammgleichungen nur als besondere Auflösungen betrachtet, die sich von selbst, ohne Integration ergeben und besass noch kein Mittel, um a priori zu sehen, ob eine solche Auflösung in der allgemeinen, durch das vollständige Integral der der Aufgabe entsprechenden Differential-Gleichung ausgedrückten Auflösung enthalten seyn könne, oder nicht. Euler gab im ersten Bande seiner Integral-Rechnung zuerst eine allgemeine, diesen Gegenstand betreffende Auflösung. Hierauf hat Laplace gezeigt, wie man aus der Differential-Gleichung die besonderen Auflösungen finden könne, die in dem vollständigen Integrale nicht enthalten sind, was wir am Schlusse der funfzehnten Vorlesung vortrugen

Es war noch übrig, die Verbindung zwischen den particulairen und vollständigen Integralen und den durch diese oder jene ausgedrückten Curven zu finden und die ganze Theorie dieser Integrale auf die ersten Principien der Differential-Rechnung zu-

singulairen Stammgleichungen betrifft.

rückzuführen; dieses ist in einem davon handelnden Mémoire [*von Lagrange*] geschehen, welches in den Sammlungen der Academie von Berlin vom Jahre 1774 steht und in einem andern Mémoire, in den nemlichen Sammlungen, vom Jahre 1779.

Da dieser analytische Gegenstand, wegen seiner mannigfaltigen Anwendungen, interessant ist, so habe ich die Theorie desselben in ihrem ganzen Umfange in diesen Vorlesungen vortragen zu müssen geglaubt, während ich neue Betrachtungen und historische Details hinzufügte, die dem Analysten Vergnügen machen und zur Geschichte dieses Theils der Mathematik dienen können. [*Die vierzehnte, funfzehnte und sechszehnte Vorlesung umfassen im Wesentlichen die Theorie der singulairen Stammgleichungen. In der vierzehnten Vorlesung wird die Aufgabe untersucht, die singulaire Stammgleichung aus der vollständigen Stammgleichung zu finden; in der funfzehnten, die Aufgabe, die singulaire Stammgleichung aus der Ableitungs-Gleichung zu finden und in der sechszehnten, die umgekehrte, unbestimmte Aufgabe, aus der singulairen Stammgleichung, die Ableitungs-Gleichung, oder die vollständige Stammgleichung zu finden, mit welchen Aufgaben sich mannigfache, für diese Theorie gehörende Sätze verbinden. Schon allein wegen dieser, mit aller Allgemeinheit, Gewandheit und Klarheit der analytischen Kunst Lagrange's vorgetragenen Theorie der singulairen Integrale, hat das gegenwärtige Werk des Verfassers einen*

grossen Werth. Der grosse Analyst klärt hier einen Gegenstand auf, der, obgleich er nicht neu ist, doch bis auf ihn noch ziemlich im Dunkel lag. Man sieht, wie Lagrange's Bescheidenheit ihm kaum erlaubt, sich auch nur einen kleinen Theil des Verdienstes um den Gegenstand zuzugestehen. Sein Verdienst ist aber unstreitig weit grösser; denn hätte Lagrange auch selbst gar nichts Neues zu dieser Theorie hinzugefügt, so bliebe ihm dennoch das Verdienst, ihn erläutert und ins Klare gebracht zu haben, und dieses Verdienst kann eben so gross seyn, als dasjenige neuer Erfindungen. Erst wenn eine mathematische Lehre klar geworden, ist ihre Erfindung vollendet: bis dahin war sie noch nicht ganz erfunden, sondern gleichsam nur erst geahndet. Die Klarheit ist der Mathematik so nothwendig, wie dem Sehen das Licht.]

Achtzehnte Vorlesung.

Digression über Gleichungen mit endlichen Differenzen; über den Uebergang von diesen Differenzen zu den Differentialen und über die Erfindung der Differential-Rechnung.

Von der Differenzen-Rechnung.

254.

Die ersten Erfinder der Differenzen-Rechnung, Barrow und Leibnitz, betrachteten die veränderlichen Grössen als um unendlich kleine Differenzen wachsend und ersannen die Differential-Gleichungen, um die Verhältnisse dieser Differenzen auszudrücken. Da die Voraussetzung unendlich kleiner Grössen der Strenge der Analysis zuwider ist, so hat man späterhin die Zunahmen der veränderlichen Grössen als endliche Grössen betrachtet und, die Differential-Rechnung nachahmend, eine neue Rechnung mit endlichen Differenzen aufgestellt, deren Resultate vollkommen genau sind. Der Zweck dieser Rechnung, von wel-

cher Tailor in seinem methodus incrementorum die erste Idee gab, und mit welcher man sich unter dem Namen der Rechnung mit endlichen Differenzen viel beschäftigt hat, besteht darin, das Gesetz der aufeinander folgenden Glieder einer Reihe oder Progression zu finden, von welcher man den Ausdruck, oder die Form des allgemeinen Gliedes kennt; oder umgekehrt: aus dem Gesetze der auf einander folgenden Glieder, den Ausdruck des allgemeinen Gliedes zu finden.

Es ist aber zu bemerken, dass bei diesen Untersuchungen die Hülfe der Differenzen, nicht so wie in der Differential-Rechnung, nothwendig ist, und dass ihre Anwendung selbst eher unbequem als nützlich seyn kann; denn da die Weglassung der unendlich-kleinen Glieder, welche die Differential-Rechnung vereinfacht, bei den endlichen Differenzen nicht Statt findet, so sind zuweilen die Differenzen Ausdrücke zusammengesetzter, als wenn sie die aufeinander folgenden Glieder unmittelbar selbst enthielten.

Ausserdem ist die Aehnlichkeit, welche man zwischen den beiden Rechnungen mit unendlich-kleinen und mit endlichen Differenzen zu finden glaubte, ungeachtet der Gleichförmigkeit einiger Verfahren und Resultate, mehr scheinbar als wirklich. Denn in der Differenzen-Rechnung betrachtet man die verschiedenen Glieder der Progressionen als Ausdrücke einer und derselben Function von Grössen die von einem Gliede zum andern sich verändern, und die endlichen Differenzen-Gleichungen sind nichts an-

ders als Gleichungen zwischen solchen Functionen, statt dass die Differential-Gleichungen, oder Gleichungen mit unendlich-kleinen Differenzen wesentlich zwischen verschiedenen, aber nach festen und gleichförmigen Regeln von einander abgeleiteten Functionen einer und derselben veränderlichen Grösse Statt finden.

Die Gleichungen mit endlichen Differenzen sind nichts anders, als eine Reihe ähnlicher Gleichungen zwischen verschiedenen unbekannten Grössen, aus welchen man, der Reihe nach, die unbekannten Grössen finden kann. Das gleichförmige Gesetz aber, welches zwischen diesen Gleichungen Statt findet, macht, dass man die darin vorkommenden unbekannten Grössen als Glieder einer regelmässigen Reihe betrachten kann, von welcher sich dass allgemeine Glied angeben lässt. Der Ausdruck dieses allgemeinen Gliedes enthält alsdann die allgemeine Auflösung aller dieser Gleichungen.

Die Rechnung mit endlichen Differenzen ist also eigentlich nichts anders, als die Rechnung mit Reihen und kann der Differential-Rechnung nicht beigesellt werden, welche wesentlich die Rechnung mit abgeleiteten Functionen ist. [*Die Differenzen-Rechnung wäre etwa eine Rechnung mit ganzen Reihen, die Differential-Rechnung eine Rechnung mit den Coefficienten ihrer einzelnen Glieder, in so fern die Glieder nach Potenzen der den veränderlichen Grössen beigelegten Ver-*

Von der Differenzen-änderungen, mit ganzen positiven Exponenten, fortschreiten.]

255.

Aber man hat auch geglaubt, die endlichen Differenzen könnten auf die unendlich-kleinen Differenzen gebracht werden und die Rechnung mit endlichen Differenzen behalte ihre ganze Strenge, wenn sie durch Weglassung unendlich-kleiner Glieder in die Differential-Rechnung übergehe. Daraus ist die Methode der Grenzen entstanden, in welcher man das Verhältniss unendlich-kleiner Differenzen als die Grenze des Verhältnisses endlicher Differenzen und die Differential-Gleichungen als die Grenzen der Gleichungen mit endlichen Differenzen betrachtete.

Ich läugne nicht, dass man auf diese Weise die Richtigkeit der Resultate der Differential-Rechnung beweisen könne. Obgleich indessen der Gang direct und natürlich zu seyn scheint, so erfordert doch der Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen allemal eine Art von mehr oder weniger gewaltsamen Sprung, welcher das Gesetz der Stetigkeit und die Form der Functionen aufhebt. [*Der Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen und umgekehrt, findet wohl allemal bei jeder möglichen Methode Statt, auch bei der Methode des gegenwärtigen Werks, weil das Unendliche in der That wirklich da ist, und Uebergänge zum Unendlichen, und Durchgänge durch das Unendliche eben so gewöhnlich sind, wie Uebergänge zu Null und Durchgänge durch*

Rechnung.

Null. Selbst schon positive und negative Grössen sind nichts anders als solche, zwischen welchen ein Durchgang durch Null oder Unendlich liegt. Es kommt indessen darauf an, dass man das Unendliche nicht mit dem Endlichen vermenge *und mit unendlichen Grössen so rechne wie mit endlichen, wie es die Differential-Rechnung zu thun pflegt. Dann ist allemal eine grössere oder geringere Täuschung unvermeidlich; denn wenn man auch unendlich kleine Grössen* nennt, *so meint man doch im Grunde nur* sehr *kleine Grössen, und diese Verschiedenheit des Gegenstandes und seines Begriffs führt in Gefahr des Irrthums. Man kann aus dem Endlichen nur schliessen, was im Unendlichen vorgeht, alle darauf Bezug habende Beweise aber sind indirect. Direct weiss man vom Unendlichen Nichts und es darf nie in den Vordersatz kommen. In der Rechnung selbst können immer nur endliche Grössen vorkommen, und wenn man von unendlichen Grössen, wie von endlichen spricht, und damit rechnet, so spricht man von Dingen und rechnet damit, die das nicht sind, wofür man sie ausgiebt, nemlich* Grössen.]

256.

Nachdem wir die Differential-Rechnung auf ihre wahren Elemente, die abgeleiteten Functionen, zurückgeführt und sie auf diese Weise gänzlich von der Rechnung mit endlichen Differenzen abgesondert haben, glauben wir auch noch einige Worte über die

Von der Differenzen-

Natur und die Anwendung der Differenzen-Rechnung sagen zu müssen, welche eigentlich nichts anders ist, als die gewöhnliche Algebra, auf eine Reihe von Grössen angewendet, die nach einem bestimmten Gesetze von einander abhängen. [*Auch die Differential-Rechnung, nach dem gegenwärtigen Vortrage, ist etwas Aehnliches, obgleich von der Differenzen-Rechnung allerdings wesentlich Verschiedenes.*]

I. Es sey eine Reihe von Grössen

$$\overset{0}{y},\ \overset{1}{y},\ \overset{2}{y},\ \overset{3}{y},\ \overset{4}{y}\ldots$$

gegeben, welche folgenden, eine arithmetische Reihe bildenden Grössen,

$$0,\ k,\ 2k,\ 3k,\ 4k\ldots$$

entsprechen. [*Im Original steht statt* k, i, *welches weniger bequem ist.*] Man bezeichne im Allgemeinen ein beliebiges Glied der ersten Reihe durch y und das zugehörige Glied der zweiten Reihe durch x, ferner die Glieder der ersten Reihe, welche auf y folgen und den Gliedern der zweiten Reihe

$$x+k,\ x+2k,\ x+3k\ldots$$

entsprechen, durch

$$y',\ y'',\ y'''\ldots$$

Endlich bezeichne man, der Kürze wegen, durch die Zeichen Δ, Δ^2 *etc.* die ersten, zweiten u. s. w. Differenzen der Glieder der ersten Reihe, so dass

$$\Delta y = y' - y$$

$$\Delta^2 y = y'' - 2y' + y \text{ etc.}$$

Rechnung.

[*nemlich*

$$\Delta^2 y = y'' - y' - (y' - y) = y'' - 2y' + y$$

$$\Delta^3 y = y''' - 2y'' + y' - (y'' - 2y' + y) = y''' - 3y'' + 3y' - y,$$

etc.]

Für die zweite Reihe ist offenbar

$$\Delta x = k,\ \Delta^2 x = 0\ \textit{etc.}$$

II. Nun setze man, die erste Reihe hänge von der zweiten durch die einfache Bedingung

$$y = ax$$

ab, wo a ein, für die ganze Folge constanter Coefficient ist.

Man erhält also, wenn man y' statt y und $x + k$ statt x setzt, die Gleichung

$$y' = a(x + k)$$

und da die beiden Gleichungen zugleich Statt finden, so kann man, wenn man will, zwischen denselben die Constante a eliminiren.

Man ziehe zu dem Ende die erste von der zweiten ab, so erhält man

$$y' - y = ak, \text{ oder } \Delta y = ak,$$

woraus

$$a = \frac{\Delta y}{k}$$

folgt, also, wenn man diesen Werth von a in die erste Gleichung substituirt,

$$y = \frac{x \Delta y}{k}.$$

III. Die erste Gleichung $y = ax$ giebt das allgemeine Glied der Reihe, die andere Gleichung

$y = \frac{x\Delta y}{k}$ giebt das Gesetz der Aufeinanderfolge der Glieder; denn weil $\Delta y = y' - y$ ist, so ist [$y' = y + \Delta y$, *folglich, weil aus* $y = \frac{x\Delta y}{k}$, $\Delta y = \frac{ky}{x}$ *folgt*] $y' = y + \frac{ky}{x}$, oder

$$y' = \frac{x+k}{x} \cdot y.$$

IV. Umgekehrt sieht man, dass wenn dieses Gesetz der Glieder gegeben ist, das allgemeine Glied nothwendig

$$y = ax$$

seyn muss, wo a eine willkürliche Constante bedeutet, und es ist leicht, sich zu überzeugen, dass dieser Ausdruck von y in x der allgemeinste ist, welcher der Differenzen-Gleichung

$$\Delta y = \frac{ky}{x}$$

genugthut.

V. Wäre die Differenz k der arithmetischen Reihe unendlich klein, so wäre es die correspondirende Differenz Δy ebenfalls, ihr Verhältniss $\frac{\Delta y}{k}$ aber, welches, wie wir sahen, gleich der willkürlichen Constante a ist, bleibt immer das nemliche. Für Unendlich-Kleines ist dieses Verhältniss der ersten Ableitung $\frac{dy}{dx}$ gleich und die Gleichung ist alsdann

$$y = x\frac{dy}{dx},$$

welche

Rechnung.

welche Gleichung die Ableitungs-Gleichung der Stammgleichung

$$y = ax$$

ist, in welcher a eine willkürliche Constante bedeutet.

VI. Man nehme ferner die Gleichung

$$y = ax + a^2$$

an, welche nur wenig verwickelter ist, als die vorige.

Man erhält, wenn man y' statt y und $x + k$ statt x setzt,

$$y' = ax + ak + a^2.$$

Zieht man die erste von der zweiten ab, und schreibt Δy statt $y' - y$, so erhält man

$$\Delta y = ak,$$

woraus

$$a = \frac{\Delta y}{k}$$

folgt. Substituirt man diesen Ausdruck statt a, so erhält man

$$y = \frac{x \Delta y}{k} + \frac{\Delta y^2}{k^2},$$

welches eine, von der Constante a unabhängige Differenzen-Gleichung ist.

Die erste Gleichung giebt wieder den Ausdruck des allgemeinen Gliedes, die zweite giebt das Gesetz für die Aufeinanderfolge der Glieder, so dass man, wenn dieses Gesetz gegeben wäre, vermittelst der ersten Gleichung, das allgemeine Glied mit einer willkürlichen Constante a finden könnte.

VII. Das Obige setzt voraus, dass a von x nicht abhängt, weil es in beiden aufeinander folgenden Glei-

chungen das nemliche bleibt. Hinge die Grösse a' von x ab, so ist klar, dass, weil beide Gleichungen eben die Form behalten, als wenn x unveränderlich wäre, die aus den beiden Gleichungen, durch die Wegschaffung von a entstehende Differenzen-Gleichung auch dann noch die nemliche seyn würde. Also würde man für eine und dieselbe Differenzen-Gleichung mehr als eine Gleichung zwischen x und y erhalten. Dieses führt auf singulaire Stammgleichungen, wie wir in der vierzehnten Vorlesung sahen.

VIII. Man setze also allgemein, die Grösse a, welche zu x gehört, gehe in a', a'' *etc.* über, wenn $x+k$, $x+2k$ *etc.* aus x wird, so sind die beiden auf einander folgenden Gleichungen, deren eine zu x, die andere zu $x+k$ gehört,

$$y = ax + a^2 \text{ und}$$
$$y' = a'(x+k) + a'^2.$$

Setzt man aber nun, die Grössen a und a' wären von der Art, dass

$$a'(x+k) + a'^2 = a(x+k) + a^2$$

ist, so giebt die zweite Gleichung $[y' = a'(x+k) + a'^2,]$

$$y' = a(x+k) + a^2,$$

wie, wenn a constant wäre. Also erhält man auch jetzt, wenn man a eliminirt, die Differenzen-Gleichung

$$y = \frac{x\Delta y}{k} + \frac{\Delta y^2}{k^2}.$$

IX. Es kommt also darauf an, das allgemeine Glied der Reihe zu finden, deren aufeinanderfol-

Rechnung.

gende, den Grössen x und $x + k$ entsprechenden Glieder a und a' in dem, durch die obige Gleichung bestimmten Verhältnisse stehen, welche Gleichung auch

$$a'^2 - a^2 + (x + k)(a' - a) = 0$$

ist.

X. Diese Gleichung lässt sich in

$$(a' + a + (x + k))(a' - a) = 0$$

verwandeln und zerfällt also in die beiden Gleichungen

$$a' - a = 0 \text{ und } a' + a + x + k = 0.$$

Die erste giebt

$$a' = a$$

und folglich a gleich einer beliebigen Constante, welches der anfängliche Fall ist.

Die zweite giebt ein Verhältniss zwischen a und a', aus welchem sich das allgemeine Glied finden lässt.

XI. Um diese Gleichung zu vereinfachen, setze man zunächst

$$a = u + mx + n,$$

wo m und n zwei Constanten sind, u aber eine neue veränderliche Grösse ist, so ist

$$a' = u' + m(x + k) + n,$$

und man erhält, wenn man [*diese Werthe von a und a'*] in die obige Gleichung [$a' - a + x + k = 0$] substituirt,

$$u' + u + (2m + 1)x + 2n + (m + 1)k = 0,$$

wo man die von u unabhängigen Glieder gleich Null

Von der Differenzen-

setzen kann [*deshalb, weil die Gleichung auch für* $u = 0$ *Statt findet*]. Ich setze also

$$2m + 1 = 0 \text{ und } 2n + (m+1)k = 0,$$

welches

$$m = -\tfrac{1}{2} \text{ und } n = -\frac{k}{4}$$

giebt, so dass, wenn man nun

$$a = u - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}k \text{ [vermöge } a = u + mx + n]$$

setzt, die Gleichung $[u' + u + (2m+1)x + 2n + (m+1)k = 0]$ sich auf

$$u' + u = 0$$

reducirt [*weil, um den Ausdruck* $a = u - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}k$ *zu finden, die Glieder* $2m + 1$ *und* $2n + (m+1)k$ *gleich Null gesetzt worden sind.*]

XII. Ich bemerke nun, dass wenn man

$$u = br^{x}$$

setzt, wo b und r Constanten bedeuten,

$$u' = br^{x+k}$$

ist, und man also

$$br^{x+k} + br^{a} = 0$$

erhält, welches durch br^{x} dividirt werden kann und

$$r^{k} + 1 = 0$$

giebt, woraus

$$r^{k} = -1 \text{ und } r = (-1)^{\frac{1}{k}}$$

folgt.

Rechnung.

XIII. Also thut der Ausdruck

$$u = b\,(-1)^{\frac{x}{k}}$$

der Gleichung $[u + u' = 0]$ mit der Constante b genug. In der That, wenn man diese Gleichung zwischen u und x nimmt und, um die Constante b zu eliminiren, die folgende Gleichung:

$$u' = b(-1)^{\frac{x+k}{k}} = [b(-1)^{\frac{x}{k}+1} = b(-1)^{\frac{x}{k}} - 1 =] - b(-1)^{\frac{x}{k}}$$

aufstellt, so erhält man, wenn man b eliminirt,

$$u + u' = [b\,(-1)^{\frac{x}{k}} - b\,(-1)^{\frac{x}{k}} =]\ 0,$$

welches wieder die gegebene Gleichung ist.

XIV. Der allgemeine Ausdruck von a ist also

$$a = b\,(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}k,$$

und dieser Werth von a, in den Ausdruck von y gesetzt, giebt ein neues allgemeines Glied mit einer willkürlichen Constante b, welches ebenfalls der Differenzen-Gleichung

$$y = \frac{x\Delta y}{k} + \frac{\Delta y^2}{k^2}$$

entspricht.

XV. Um die Substitution zu erleichtern, bringe man den gegebenen Ausdruck von y [$y = ax + a^2$ *(VI.)*] auf die Form

$$y = (a + \tfrac{1}{2}x)^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$

und setze hierin den so eben für a gefundenen Werth,

Von der Differenzen-

so erhält man für y folgenden Ausdruck:

$$y = (b(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{4}k)^2 - \tfrac{1}{4}x^2.$$

XVI. Da hier b eine willkürliche Constante ist, so kann man sie auch durch die zugehörige folgende Gleichung, die man erhält, wenn man $x+k$ statt x setzt, welches y', oder $y+\Delta y$ für y giebt, wegschaffen. Man erhält nemlich

$$y + \Delta y = (-b(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{4}k)^2 - \tfrac{1}{4}(x+k)^2,$$

weil $(-1)^{\frac{x+k}{k}} = (-1)^{\frac{x}{k}+1} = -(-1)^{\frac{x}{k}}$ ist.

Zieht man von dieser Gleichung die vorige ab, und erinnert sich, dass die Differenz zweier Quadrate dem Producte der Summe und Differenz ihrer Wurzeln gleich ist, so erhält man

$$\Delta y = kb(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{2}kx - \tfrac{1}{4}k^2,$$

woraus

$$b(-1)^{\frac{x}{k}} = \frac{\Delta y}{k} + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}k$$

folgt. Substituirt man diesen Ausdruck in die anfängliche Gleichung $[y = (b(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{4}k)^2 - \tfrac{1}{4}x^2$ *(XV.)*], so erhält man die Differenzen-Gleichung

$$y = \left(\frac{\Delta y}{k} + \tfrac{1}{2}x\right)^2 - \tfrac{1}{4}x^2, \text{ oder}$$

$$y = \frac{x\Delta y}{k} + \frac{\Delta y^2}{k^2},$$

Rechnung.

welche ganz mit derjenigen übereinstimmt, die man fand, als a die willkürliche Constante war. [*VII.*]

XVII. Nimmt man nun die Differenz k unendlich klein an, so ist es die correspondirende Differenz Δy ebenfalls; aber das Verhältniss beider Differenzen $\frac{\Delta y}{k}$, welches im ersten Falle gleich a und im zweiten gleich $b(-1)^{\frac{x}{k}} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}k$ war, bleibt endlich. Dieses Verhältniss ist alsdann die erste Ableitung von y, wenn man y als Function von x betrachtet. Die Differenzen-Gleichung geht also alsdann in die Gleichung

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

über, welche in der That die zu der Gleichung

$$y = ax + a^2,$$

mit der willkürlichen Constante a, gehörige erste Ableitungs-Gleichung ist.

Denn nimmt man die Ableitungen, so erhält man $\frac{dy}{dx} = a$, und wenn man diesen Werth substituirt,

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

XVIII. Aber was bedeutet jetzt der zweite Ausdruck von y mit der willkürlichen Constante b?

Nach den Regeln des Unendlich-Kleinen muss das Glied $\frac{1}{4}k$ [*XV.*] gegen das endliche Glied $b(-1)^{\frac{k}{x}}$ weggelassen werden, so dass also blos

Von der Differenzen-

$$y = (b(-1)^{\frac{x}{k}})^2 - \tfrac{1}{4}x^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$

ist, weil $(-1)^{\frac{2k}{k}} = \left[((-1)^2)^{\frac{x}{k}} = \right](+1)^{\frac{x}{k}} = 1$ ist.

Aber dieser Werth von y entspricht der Ableitungs-Gleichung $\left[y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$ nicht, wenn nicht b Null ist, denn er giebt $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x$ und, wenn man substituirt,

$$b^2 - \tfrac{1}{4}x^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^2,$$

folglich $b = 0$.

Hiernach müsste man sagen, dass der Uebergang vom Endlichen zum Unendlich-Kleinen nicht allein die unendlich kleinen Grössen, sondern auch die willkürlichen Constanten verschwinden macht.

XIX. Uebrigens erhält man, wenn man $b = 0$ setzt,

$$y = -\tfrac{1}{4}x^2,$$

welches ein singulairer Werth von y ist. Denn nimmt man von der gegebenen Stammgleichung $y = ax + a^2$ die Ableitung nach a, so erhält man

$$x + 2a = 0,$$

woraus $a = -\frac{1}{2}x$ und also

$$y = -\tfrac{1}{2}x^2$$

folgt.

XX. Also kann man auch den zweiten Ausdruck von y als einen singulairen Werth des allgemeinen Gliedes betrachten. Da derselbe indessen die

Constante b enthält, so lange die Differenzen k endlich sind, so ist derselbe offenbar eben so allgemein als der erste, so dass man also annehmen kann, der Werth von y sey für $x = 0$ gegeben, welches für singulaire Werthe der gewöhnlichen Stammgleichungen nicht der Fall ist.

XXI. Der selige Charles, Mitglied der Academie der Wissenschaften, hat zuerst die wichtige Bemerkung gemacht, dass zu einer und derselben Gleichung mit endlichen Differenzen zwei Integral-Gleichungen, oder Gleichungen ohne Differenzen gehören können, jede mit einer willkürlichen Constante. Man sehe die Mémoiren der Academie vom Jahre 1783.

XXII. Die Folgerungen aber, die er späterhin, in einem Mémoire vom Jahre 1788 daraus für die Integrale von Differential-Gleichungen zu ziehen gedachte, sind nicht richtig. Sie beweisen vielmehr, dass man die, für endliche Grössen gefundenen Resultate nicht unmittelbar auf das Unendlich-Kleine anwenden darf, und dass man vielmehr bei dem Uebergange vom Endlichen zum Unendlich-Kleinen alle Glieder, welche das Unendlich-Kleine enthalten können, gänzlich weglassen muss, selbst wenn diese Glieder nicht unendlich-klein sind.

XXIII. So ist in dem Ausdrucke

$$y = (b(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{4}k)^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$

das Glied $b(-1)^{\frac{x}{k}}$ nicht unendlich-klein, wenn man k unendlich-klein setzt: dennoch muss dieses Glied,

weil es die Differenz k enthält, die für die Differential-Gleichung unendlich-klein ist, weggelassen werden, wenn man ein genaues Resultat haben will. In der That erhält man, wenn man in der obigen Gleichung [*XV.*] Alles was k enthält weglässt, blos

$$y = -\tfrac{1}{4}x^2,$$

wie es, um der Ableitungs-Gleichung genug zu thun, seyn muss.

XXIV. Die Ursache hiervon ist, dass sich die Art der Function bei dem vorausgesetzten Uebergange vom Endlichen zum Unendlich-Kleinen wesentlich ändert und dass das $\frac{dy}{dx}$, welches in der Differential-Rechnung vorkommt, eine von y wesentlich verschiedene Grösse ist, während es, so lange die Differenz dx einen beliebigen, noch so kleinen Werth hat, die Differenz zweier Functionen von der nemlichen Art bedeutet, woraus man sieht, dass der Uebergang vom Endlichen zum Unendlich-Kleinen zwar als mechanisches Rechnungsmittel zulässlich ist, aber nicht dazu dient, die Natur der Differential-Gleichungen zu erklären, welche die Eigenschaft haben, die Beziehungen zwischen den Stamm- und abgeleiteten Gleichungen auszudrücken. [*Darum ist es auch unrichtig und eine Vermengung ungleichartiger Dinge, wenn man die Ableitungen, oder Differentiale als Differenzen, und die Stammgrössen, oder Integrale als Summen betrachtet. Sie sind nichts diesem Aehnliches, sondern blos Coefficienten einzelner Glieder von Reihen, in welche sich jene*

Rechnung.

Differenzen und Summen entwickeln lassen. Das Differential ist keinesweges e i n *T h e i l des Integrals, das Integral keineswegs die* S u m m e, *selbst von einer* u n e n d l i c h e n *Menge von Differentialen.*]

XXV. Man kann die, der nemlichen Differenzen-Gleichung

$$y = \frac{x \Delta y}{k} + \frac{\Delta y^2}{k^2}$$

entsprechenden Ausdrücke von y auch noch auf eine andere Art finden.

Nimmt man nemlich die zu $x + k$ gehörige folgende Gleichung, so erhält man auch

$$y' = \frac{(x+k)\Delta y'}{k} + \frac{\Delta y'^2}{k^2}.$$

Nun aber ist

$$y' = y + \Delta y, \; \Delta y' = \Delta y + \Delta^2 y.$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man

$$\Big[y' - y = \Delta y = \frac{x+k}{k} \Delta y' - \frac{x \Delta y}{k} + \frac{\Delta y'^2}{k^2} - \frac{\Delta y^2}{k^2}$$

$$= \frac{x+k}{k}(\Delta y + \Delta^2 y) - x\frac{\Delta y}{k} + \frac{\Delta y^2 + 2\Delta y \Delta^2 y + \Delta^2 y^2}{k^2} - \frac{\Delta y^2}{k^2},$$

oder]

$$\Delta y = x\frac{\Delta^2 y}{k} + \Delta y + \Delta^2 y + \frac{2\Delta y \Delta^2 y}{k^2} + \frac{\Delta^2 y^2}{k^2},$$

oder, wenn man mit k multiplicirt und reducirt,

$$\left(x + k + \frac{2\Delta y}{k} + \frac{\Delta^2 y}{k}\right)\Delta^2 y = 0,$$

welche Gleichung sich, wie man sieht, in die beiden,

Von der Differenzen-

$$\Delta^2 y = 0 \text{ und } x + k + \frac{2\Delta y + \Delta^2 y}{k} = 0$$

zerlegen lässt.

Die erste giebt sogleich

$$\Delta y = a = Const.$$

Setzt man diese Constante $= ak$, so erhält man

$$\Delta y = ak,$$

und, wenn man solches in die Differenzen-Gleichung $\left[y = \frac{x\Delta y}{k} + \frac{\Delta y^2}{k^2}\right]$ substituirt,

$$y = ax + a^2.$$

XXVI. Wir wollen bei der Voraussetzung

$$\Delta y = ak$$

bleiben, aber nunmehr a als veränderlich und von x abhängig betrachten. Dieses giebt

$$\Delta y' = a'k \text{ und } \Delta^2 y = (a' - a)k$$

[*weil oben* $\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y$ *ist (XXV.)*]. Die andere Gleichung $\left[x + k + \frac{2\Delta y + \Delta^2 y}{k} = 0\right]$ giebt also $\left[x + k + \frac{2ak}{k} + \frac{(a' - a)k}{k} =\right]$

$$x + k + a + a' = 0;$$

welche Gleichung die nemliche ist, die wir oben [*in X.*] und aus welcher wir

$$a = b(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}k$$

fanden. Man erhält also

$$\Delta y = k\left(b(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}k\right)$$

Rechnung.

[*vermöge* $\Delta y = ak$ *(XXV. und XXVI.)*] und da die Differenzen-Gleichung $\left[y = \frac{x\Delta y}{k} + \frac{\Delta y^2}{k^2}\right]$ auf die Gestalt $y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\Delta y}{k}\right)^2 - \frac{1}{4}x^2$ gebracht werden kann, wenn man darin den Werth von Δy substituirt,

$$y = (b(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{4}k)^2 - \tfrac{1}{4}x^2,$$

wie oben. [*XV.*]

XXVII. Diese Art, den zweiten Ausdruck von y zu finden, kommt mit der in der sechszehnten Vorlesung für die singulairen Stammgleichungen gegebenen Methode überein. [*Ueberhaupt ist die Aehnlichkeit der gegenwärtigen Verfahren und Resultate mit den obigen bei den singulairen Stammgleichungen, leicht zu bemerken.*]

XXVIII. Setzt man k unendlich klein, so sind die den Grössen x und $x + k$ entsprechenden Werthe von a und a' nur um eine unendlich kleine Grösse verschieden. Nach den Regeln des Unendlich-Kleinen reducirt sich also die Gleichung $a' + a + x + k = 0$ [*XXVI.*] auf

$$2a + x = 0,$$

welches

$$a = -\tfrac{1}{2}x$$

giebt, woraus

$$y = -\tfrac{1}{4}x^2$$

folgt [*vermöge der gegebenen Stammgleichung* $y = ax + a^2$], wie in dem Falle $b = 0$.

Von der Differenzen-

In der That giebt der Ausdruck

$$a = b(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}k \ [XXVI.]$$

für $x + k$,

$$a' = -b(-1)^{\frac{x}{k}} - \tfrac{1}{2}(x+k) - \tfrac{1}{4}k,$$

wo man sieht, dass die Differenz zwischen a' und a, für ein unendlich-kleines k, nicht unendlich-klein ist, so lange nicht die Constante b verschwindet.

257.

Es sey allgemein

$$F(x, y, a) = 0$$

die Gleichung, durch welche das allgemeine Glied y in x bestimmt wird; a ist eine willkürliche Constante.

Es wird vorausgesetzt, dass diese Gleichung für alle aufeinander folgende Glieder y', y'' gelte, welche zu den aufeinander folgenden Werthen $x + k$, $x + 2k$.... von x gehören. Also ist auch

$$F(x + k, y', a) = 0$$

und es lässt sich, durch Verbindung dieser beiden Gleichungen, die Constante a wegschaffen.

Man erhält auf diese Weise eine Gleichung ohne a in x, y, y' und, wenn man statt y', $y \Delta y$ setzt, eine Gleichung zwischen x, y und Δy, welches dann wesentlich eine Differenzen-Gleichung erster Ordnung ist.

Enthält das allgemeine Glied zwei Constanten a und b, wie

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

so kann man, vermittelst der beiden aufeinander folgenden Gleichungen

$F(x + k, y', a, b) = 0$ und $F(x + 2k, y'', a, b) = 0$,

die beiden Constanten wegschaffen. Das Resultat der Elimination ist eine Gleichung zwischen x, y, y' und y'', oder, wenn man $y + \Delta y$ statt y' und $y + 2\Delta y + \Delta^2 y$ statt y'' setzt, eine Gleichung zwischen x, y, Δy und $\Delta^2 y$, also eine Differenzen-Gleichung zweiter Ordnung u. s. w.

Umgekehrt also lässt jede Differenzen-Gleichung erster Ordnung, oder zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern, eine willkürliche Constante in dem allgemeinen Gliede zu; jede Differenzen-Gleichung zweiter Ordnung, oder zwischen drei aufeinander folgenden Gliedern, zwei willkürliche Constanten u. s. w.

258.

Man kann sich hiervon leicht aus der Natur der Differenzen-Gleichungen selbst überzeugen.

Man nehme z. B. irgend eine Differenzen-Gleichung erster Ordnung zwischen x, y und $\overset{1}{y}$ und setze, es sey der daraus genommene Werth von $\overset{1}{y}$,

$$\overset{1}{y} = f(x, y).$$

Da diese Gleichung für den ganzen Umfang der Reihe gilt, so geht y, wenn man der Reihe nach, $x = 0$, k, $2k$, $3k$.... setzt, in $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y}$...., $\overset{1}{y}$ aber zugleich in $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y}, \overset{4}{y}$ *etc*, über.

Von der Differenzen-

Die gegebene Gleichung giebt also, der Reihe nach, folgende Gleichungen

$$\overset{1}{y} = f(0, \overset{0}{y}), \quad \overset{2}{y} = f(k, \overset{1}{y}), \quad \overset{3}{y} = f(k, \overset{2}{y}) \ldots$$

Substituirt man hierin, nach und nach die vorhergehenden Werthe, so erhält man die Glieder $\overset{1}{y}$, $\overset{2}{y}$, $\overset{3}{y}$ *etc.* alle durch das erste Glied $\overset{0}{y}$, also ein beliebiges, zu x gehöriges Glied, durch x und $\overset{0}{y}$ ausgedrückt.

Der Ausdruck des allgemeinen Gliedes enthält also nothwendigerweise den willkürlichen und constanten Werth des ersten Gliedes $\overset{0}{y}$.

Wäre die gegebene Gleichung eine Differenzen-Gleichung zweiter Ordnung und enthielte also die Glieder y, y', y'', so könnte man daraus den Werth y'' entwickeln, der z. B.

$$y'' = f(x, y, y')$$

seyn mag. Setzt man nun, der Reihe nach, $x = 0$, k, $2k$, $3k \ldots$, so ist

$$\overset{2}{y} = f(0, \overset{0}{y}, \overset{1}{y}), \quad \overset{3}{y} = f(k, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}), \quad \overset{4}{y} = f(2k, \overset{2}{y}, \overset{3}{y}) \text{ etc.}$$

so dass man, wenn man immer die vorhergehenden Werthe substituirt, die Glieder $\overset{2}{y}$, $\overset{3}{y}$, $\overset{4}{y}$ in $\overset{0}{y}$ und $\overset{1}{y}$, folglich auch das zu x gehörige allgemeine Glied y, in x, $\overset{0}{y}$ und $\overset{1}{y}$ erhält, wo $\overset{0}{y}$ und $\overset{1}{y}$ willkürliche und constante Grössen sind.

Und so für Differenzen-Gleichungen höherer Ordnung. [*Man wird wieder leicht die Aehnlichkeit*

keit dieses Beweises mit demjenigen, oben am Ende der zwölften Vorlesung, für den ähnlichen Gegenstand bei den Differential-Gleichungen, bemerken.]

Man sieht hieraus, dass die Zahl der willkürlichen Constanten, welche in dem vollständigen Ausdrucke des allgemeinen Gliedes vorkommen müssen, nothwendig dem Zeiger der höchsten Differenz in der gegebenen Gleichung gleich ist, woraus folgt, dass jeder Ausdruck des allgemeinen Gliedes, welcher einer gegebenen Differenzen-Gleichung entspricht, sobald er so viele willkürliche Constanten enthält, als diese Gleichung, nach der Ordnung der Differenzen, zulässt, als vollständig betrachtet werden muss, auf welche Weise man auch dazu gelangt seyn mag.

259.

Aber die Gleichung kann auch noch eines andern Ausdrucks fähig seyn, welcher der singulairen Stammgleichung correspondirt und welchen man auf eine ähnliche Weise finden kann.

Denn wenn

$$F(x, y, a) = 0$$

die Gleichung ist, welche den allgemeinen Ausdruck von y in x mit der willkürlichen Constante a giebt, so erhält man die Gleichung zwischen zwei auf einander folgenden Glieder y und y', oder $y + \Delta y$, wenn man a zwischen den beiden Gleichungen

$$F(x, y, a) = 0 \text{ und } F(x + k, y', a) = 0$$

eliminirt; und das Resultat dieser Elimination, welches

die Differenzen-Gleichung ist, bleibt das nemliche, die Grösse a mag constant seyn, oder von x abhängen, wenn sie nur im letzten Falle von der Art ist, dass

$$F(x+k, y', a) = F(x+k, y', a')$$

ist.

Befreit man diese Gleichungen von Bruch- und Wurzel-Grössen, so wird sie allemal durch $a' - a$ theilbar seyn, weil ihr in der That die Gleichung $a = a'$ genugthut [*denn es ist* $F(x+k, y', a) = F(x+k, y', a')$, *wenn man* $a' = a$ *setzt.*] Diese Wurzel der Gleichung giebt also $a = Const.$ wie Anfangs vorausgesetzt wurde.

Enthält die Gleichung die Grössen a und a' nur in einer Abmessung, so kommen diese Grössen in dem Resultate der Division nicht mehr vor; also ist alsdann

$$a' - a = 0$$

die einzige Wurzel und es giebt in diesem Falle **nur einen** Ausdruck des allgemeinen Gliedes.

Kommen aber diese Grössen in der obigen Gleichung in mehreren Abmessungen vor, so sind sie auch noch nach der Division mit $a' - a$ da, und man erhält eine neue Gleichung zwischen a und a', welche folglich eine Differenzen-Gleichung erster Ordnung, nach der veränderlichen Grösse a ist und welche noch einen oder mehrere Werthe von a, mit neuen willkürlichen Constanten geben kann. Dieses ist ein Fall, wie er vorhin vorkam. [256. *VI. etc.*]

Betrachtet man a als Function von x, so erhält

Rechnung.

man für a', welches dem Werthe $x + k$ von x entspricht, wenn man entwickelt,

$$a' = a + k\frac{da}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2a}{dx^2}\ldots.$$

und die Function $F(x, y, a')$ [*welche, der Kürze wegen, durch u bezeichnet werden mag*] geht in

$$u + k\frac{du}{da}\cdot\frac{da}{dx}\ldots.$$

über. Also ist alsdann die Gleichung zwischen a und a' folgende:

$$k\frac{du}{da}\cdot\frac{da}{dx}\ldots. = 0,$$

[*nemlich, weil u an sich selbst schon Null ist.*]

Ist k unendlich klein, so können die Glieder, welche k^2, k^3.... enthalten, gegen diejenigen, die blos k enthalten, weggelassen werden und die Gleichung reducirt sich auf

$$k\frac{du}{da}\cdot\frac{da}{dx} = 0,$$

welche

$$\frac{da}{dx} = 0,$$

und folglich

$$a = Const.,$$

desgleichen

$$\frac{du}{da} = 0$$

giebt, woraus man a in x findet, welches der Fall der singulairen Stammgleichungen ist.

In diesem letzten Falle also kann der Ausdruck von a weder eine willkürliche Constante, noch die

Grösse k enthalten. Folglich müssen alle Glieder in dem allgemeinen Ausdrucke von a, wie er aus der Gleichung zwischen a' und a folgt, im Fall k unendlich klein ist, nothwendig gänzlich verschwinden, selbst wenn die Glieder an sich selbst nicht unendlich klein wären; wie wir solches im vorigen Beispiele sahen.

Uebergang von der Differenzen- zur Differential-Rechnung.

260.

Die meisten Ausdrücke, welche man durch endliche Differenzen fand und hernach in Differential-Ausdrücke verwandelte, verursachten beim Uebergange vom Endlichen zum Unendlichen ähnliche Schwierigkeiten, die sich nur heben lassen, wenn man aus den nemlichen Ausdrücken, alle Glieder mit den unendlich-kleinen Differenzen, auf welche Weise dieselben auch vorkommen mögen, ohne Unterschied, weglässt.

So ist z. B. für endliche Differenzen, der Reihe nach,

$$y' = y + \Delta y$$
$$y'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$$
$$y''' = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y \quad etc.$$

und allgemein

$$y^{(m)} = y + m\Delta y + \frac{m.m-1}{2}\Delta^2 y + \frac{m.m-1.m-2}{2 \cdot 3}\Delta^3 y \ldots$$

Der letzte Ausdruck ist der des mten Gliedes, welches dem Gliede $x + mk$ in der Reihe x, $x + k$, $x + 2k$ *etc.* entspricht.

Differential-Rechnung.

Setzt man also

$$mk = \omega,$$

so ist das, der Grösse $x + \omega$ entsprechende Glied, wenn man nemlich $\frac{\omega}{k}$ statt m schreibt,

$$(\nabla.) y + \omega \frac{\Delta y}{k} + \frac{\omega(\omega - k)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y}{k^2} + \frac{\omega(\omega - k)(\omega - 2k)}{2.3} \cdot \frac{\Delta^3 y}{k^3} \dots$$

Dieser, zuerst von Newton am Schlusse seiner „Principia" für die Interpolation bei den Cometen-Bahnen angegebene Ausdruck ist hernach von Tailor auf den Fall angewendet worden, wenn die Differenz k unendlich-klein und gleich dx ist, also die Differenzen Δy, $\Delta^2 y$ *etc*, gleich dy, $d^2 y$ *etc.* sind.

Lässt man in solchem Falle die Glieder k, $2k$ $3k$ *etc.* gegen ω weg, so erhält man den Ausdruck

$$y + \omega \frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\omega^3}{2.3} \frac{d^3 y}{dx^3} \dots$$

welcher den Werth bezeichnet, den y hat, wenn x in $x + k$ übergegangen ist.

Dieser Ausdruck ist der, unter Tailors Namen bekannte Lehrsatz.

Da indessen die Coefficienten von k in den auf einander folgenden Factoren immerfort zunehmen, so ist klar, dass k, so klein es auch seyn mag, zuletzt mit einem so grossen Coefficienten multiplicirt wird, dass der Werth des Products allerdings der Grösse ω vergleichbar seyn kann, und folglich gegen ω nicht mehr weggelassen werden darf. Gleichwohl müssen alle Vielfachen von k, wie gross sie auch seyn mögen, nach der Natur der Sache, wirklich wegge-

Uebergang von der Differenzen- zur

lassen werden, damit die Grössen $\frac{\Delta y}{k}$, $\frac{\Delta^2 y}{k^2}$ aufhören, die endlichen Differenzen der Grössen y, y', y'', das heisst ähnlicher Functionen von x, $x+k$, $x+2k$ zu seyn, und blos in die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ *etc.* der nemlichen Function y übergehen.

Denn da die Grösse y eine Function von x ist, so muss der obige Ausdruck die nemliche Function von $x+\omega$ geben; und wie wir eben direct und strenge zeigten, erhält man, wenn man diese Function nach Potenzen von ω entwickelt, die Reihe

$$y + \omega \frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\omega^3}{2.3} \frac{d^3y}{dx^3} \dots$$

[*Gegen diese Bemerkungen scheinen einige Einwendungen gemacht werden zu können; denn wären sie unbestreitbar, so würde die Richtigkeit des Tailorschen Satzes, auf welchem die gesammte Rechnung mit veränderlichen Grössen, oder die gesammte Differential- und Integral-Rechnung beruht, zu bezweifeln seyn. Der durch Differenzen gefundene obige Ausdruck* (v.) *nemlich ist ohne allen Zweifel richtig. Ginge er also nicht ganz strenge in den Tailorschen Ausdruck über, so wäre der letzte zweifelhaft.*

Lagrange sagt, die Grösse k, so klein sie auch seyn möge, werde zuletzt mit einem so grossen Coefficienten multiplicirt, dass das Product gegen ω allerdings vergleichbar seyn könne (il est visible, que quelque petit que soit i, (k) *il*

Differential-Rechnung.

se trouve à la fin multiplié par un coefficient si grand, que sa valeur pourra devenir comparable à celle de ω etc.) Dieses ist freilich richtig, so lange k nur so klein seyn soll, als man will, aber weiter oben war von einem unendlich kleinen k, nicht blos von einem sehr kleinen k die Rede, was auch angenommen werden muss, wenn $\frac{\Delta y}{k}$ etc. in $\frac{dy}{dx}$ etc. übergehen sollen, und dann lässt sich die Behauptung bestreiten; oder vielmehr: sie muss nothwendig bestritten werden, weil das Resultat des Tailorschen Satzes eben so unbestreitbar richtig ist, wie die Newtonsche Formel (v.). In der That wird erst, wenn man den Ausdruck erlauben will, aus 2k, 3k.... mk dann Etwas, wenn m unendlich gross ist, also erst beim unendlichsten Gliede. In allen vorhergehenden Gliedern sind (m — 1)k, (m — 2)k etc. gegen ω durchaus Nichts. Also eine unendliche Zahl von Gliedern der Reihe, vom Anfange an, wäre richtig, blos was über das Unendliche hinaus liegt, wäre nicht richtig. Ueber das Unendliche hinaus liegt aber Nichts, also wäre die ganze Formel richtig. Die Schwierigkeit des Umganges mit dem Unendlichen zeigt sich hier recht augenfällig in ihrer ganzen Stärke. Was so eben gesagt ward, ist unstreitig nicht vielmehr als leere Worte, allein nothwendig muss sich dennoch wirklich ein richtiger Sinn darin befinden, weil der Tailorsche Satz richtig ist. Soviel ist gewiss, dass

man die Lagrangische Bemerkung nicht zugeben darf, weil sonst der Tailorsche Satz angefochten würde und der Grund, warum man es nicht darf, ist, weil man a posteriori, oder aus andern Gründen überzeugt seyn kann, dass der Tailorsche Satz keinen Zweifel hat.

Es ist hier ein merkwürdiger Fall, an welchem man die unvermeidliche Nothwendigkeit sieht, dass man vermeiden müsse das Unendliche wie endliche Grössen zu behandeln, und zu glauben, man könne damit rechnen. Man weiss davon in der That, direct Nichts und kann oft seine Eigenschaften höchstens nur aus den Eigenschaften des Endlichen schliessen. Das Unendliche ist etwas völlig Unwahrnehmbares und man hat davon nur Vermuthungen, nicht Begriffe. Wollte man hier oben mit einem Schlusse anfangen, der nur Statt findet, wenn man mit dem Unendlichen rechnen könnte, nemlich sagen: die Grössen $2k$, $3k$, $4k$.... mk können zuletzt so gross werden, dass sie gegen ω nicht mehr weggelassen werden dürfen, so würde ohne Widerrede folgen, dass der Tailorsche Satz falsch sey. Dieses aber wäre geradezu ein Irrthum, weil der Tailorsche Satz richtig ist. Also ist es augenfällig, dass man mit dem Unendlichen nicht rechnen, oder dasjenige, was man davon zu wissen glaubt, nicht in den Vordersatz bringen dürfe. Grade umgekehrt folgt hier, dass, weil der Tailorsche Satz richtig ist, und der Newtonsche ebenfalls, dass deshalb die Grössen

Differential-Rechnung.

$2k$, $3k$.... mk wirklich nie so gross seyn können, dass sie gegen ω in Vergleich kämen, sondern dass dieselben vielmehr gegen ω unbedingt und für alle Fälle weggelassen werden können und müssen.

Es wäre gut, die Erinnerung die, dieser Fall giebt nicht zu übersehen. Man kann in der That nicht besorgt genug seyn, zu vermeiden, dass man bei mathematischen Schlüssen vom Scheinbaren, wie das Unendliche ist, ausgehe. Es wäre um die Mathematik, und folglich um einen grossen Theil des eigentlichen Wissens geschehen, wenn man unternehmen wollte, die Wissenschaft auf so Etwas zu gründen. Sie würde sich in leere Träume verlieren und gleichsam in einen Abgrund versinken, in welchem, statt der Wahrheit, so weit sie dem endlichen Sinne zugänglich, nur der Irrthum oder das Nichts ist.

Man sehe auch über den Beweis des Tailorschen Satzes durch höhere Differenzen den ersten Band des Versuchs des Uebersetzers über die Rechnung mit veränderlichen Grössen, S. 119 etc., wo man einen Beweis antrifft, der die Schwierigkeit des Ueberganges von der Newtonschen Formel zur Tailorschen nicht hat.]

261.

Der Ausdruck für die Sinus vielfacher Bogen lässt sich auf dieselbe Weise auf die Entwickelung

Ueberg. v. d. Differ. zur Differ.-Rechn.

der Sinus durch die Bogen anwenden und ist den nemlichen Schwierigkeiten unterworfen.

Wie wir nemlich in der zehnten Vorlesung sahen, ist

$$\sin mx = m \cos x^{m-1} \sin x - \frac{m.m-1.m-2}{2.3} \cos x^{m-3} \sin x^3$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5} \cos x^{m-5} \sin x^5 \ldots.$$

Man setze x unendlich klein und m unendlich gross, so dass mx einen endlichen Werth z hat, also $m = \frac{z}{x}$, so gehen die Coefficienten

$$m, \frac{m.m-1.m-2}{2.3}, \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5} \text{ etc.},$$

wenn man gegen z alle Vielfache x weglässt, wie gross sie auch seyn mögen, in

$$\frac{z}{x}, \frac{z^3}{2.3.x^3}, \frac{z^5}{2.3.4.5.x^5} \ldots.$$

über. Auf der andern Seite wird x aus $\sin x$ und 1 aus $\cos x$. Substituirt man Dieses, so erhält man

$$\sin z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \ldots.,$$

welcher Ausdruck, wie wir oben direct fanden, genau richtig ist. [*Daraus, dass dieses Resultat richtig ist, folgt, dass man die Vielfachen von x gegen z weglassen, und dass man $\sin x = x$ und $\cos x = 1$ setzen könne; denn dass Alles dieses erlaubt sey, ist an und für sich völlig unbegreiflich. Es kann nur vielleicht deshalb erlaubt seyn, weil ein Fehler den andern aufhebt; vielleicht*

auch anders. Der Uebergang von einem Ausdrucke zum Andern liegt im Unendlichen, von welchem man Nichts weiss.]

Form- Veränderungen der Functionen erfolgen bei dem Ausdrucke $\frac{0}{0}$.

262.

Der Umstand, dass Functionen ihre Form verändern, findet nicht allein bei Uebergängen von endlichen Differenzen zu Differentialen, sondern auch noch unter andern Umständen Statt. Wir wollen an verschiedenen Beispielen zeigen, dass die Rechnung die Form-Aenderung der Functionen allezeit durch Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$ anzeigt und bewerkstelligt.

I. Man nehme erstlich das Differential dfx. Strenge ist, nach den Grundsätzen der Differenzen-Rechnung,

$$dfx = f(x+dx) - fx$$

und folglich

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{f(x+dx) - fx}{dx}.$$

Dieser Ausdruck giebt $\frac{0}{0}$ für $dx = 0$. Um zu sehen, was derselbe in solchem Falle bedeute, darf man nur das Verfahren anwenden, welches am Ende der achten Vorlesung gezeigt und daselbst, unabhängig von der Differential-Rechnung, begründet ist.

Form-Veränderungen der Functionen

Man darf nemlich nur die erste Ableitungen nach dx von Zähler und Nenner nehmen und hernach $dx = 0$ setzen. Dieses giebt $\frac{df(x+dx)}{ddx} : 1$, folglich erhält man, wenn man $dx = 0$ setzt, für den Werth des Bruchs $\frac{dfx}{dx}$, für $dx = 0$, die erste Ableitung von fx.

Dieser Werth ist, wie man sieht, der nemliche, den die Differential-Rechnung giebt, wie wir am Schlusse der zweiten Vorlesung zeigten.

II. Nimmt man die zweiten Differenzen, so erhält man, strenge genommen,

$$d^2fx = f(x+2dx) - 2f(x+dx) + fx,$$

also

$$d^2fx : dx = \frac{f(x+2dx) - 2f(x+dx) + fx}{dx^2}.$$

Setzt man $dx = 0$, so giebt dieser Ausdruck $\frac{0}{0}$. Man muss also die Ableitungen nach dx von Zähler und Nenner nehmen, welches

$$\left(\left(\frac{df(x+2dx)}{dx}\right) - \left(\frac{df(x+dx)}{dx}\right)\right) : dx$$

giebt. Dieser Ausdruck giebt für $dx = 0$ abermals $\frac{0}{0}$. Man muss also nochmals von Zähler und Nenner die Ableitungen nach dx nehmen, welches

$$\frac{2d^2f(x+2dx)}{dx^2} - \frac{d^2f(x+dx)}{dx^2}$$

giebt. Setzt man hierin $dx = 0$, so erhält man für

erfolgen bei dem Ausdrucke $\frac{0}{0}$.

den Werth des Bruchs $d^2fx : dx^2$, im Fall $dx = 0$ ist, die zweite Ableitung von fx. Dieses ist wirklich der Werth des zweiten Differentials, wenn man solches durch dx^2 dividirt.

III. Hieraus folgt allgemein, dass die Ausdrücke der Differential-Rechnung $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.... nur als Zeichen für die Ableitungen der Grössen $y = fx$ genommen werden können [*die aber als Zeichen dieser ihrer wahren Bedeutung sehr unpassend sind.*]

IV. Wir bemerkten oben, dass Tailor zu dem Ausdrucke, der seinen Namen führt, nur auf einem wenig sichern Wege gelangt sey. Durch das Obige kann man seinem Verfahren diejenige Strenge geben, welche die Analysis erfordert.

Setzt man nemlich in die obige Interpolations-Formel [v. 260.]

$$fx = y,$$

so erhält man

$$f(x+\omega) = fx + \omega\frac{\Delta fx}{k} + \frac{\omega.\omega-k}{2}\frac{\Delta^2 fx}{k^2}$$
$$+ \frac{\omega.\omega-k.\omega-2k}{2.3}\frac{\Delta^3 fx}{k^3}....$$

In diesem Ausdrucke ist

$$\Delta fx = f(x+k) - fx$$
$$\Delta^2 fx = f(x+2k) - 2f(x+k) + fx \text{ etc.}$$

Der Ausdruck gilt allgemein, was auch k sey [*also auch für* $k = 0$]. Setzt man aber

$$k = 0,$$

so geben die sämmtliche Ausdrücke $\frac{\Delta fx}{k}, \frac{\Delta^2 fx}{k^2}$ *etc.* $\frac{0}{0}$.

Form-Veränderungen der Functionen

Die Werthe der Ausdrücke sind in diesem Falle die nemlichen, welche wir oben fanden, wenn man blos Δ in d und k in dx verändert.

Sie sind also $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$ *etc.*, sobald $k = 0$ ist. Folglich ist alsdann

$$f(x+\omega) = fx + \omega\frac{dfx}{dx} + \frac{\omega^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots,$$

wie wir in der zweiten Vorlesung direct und strenge zeigten.

V. Es folgt hieraus, dass Diejenigen, welche, nach Euler, die Differentiale als wirkliche Nullen, und folglich ihr Verhältniss als dasjenige von Null zu Null betrachteten, strenge der Analysis gemäss verfuhren, weil eine Function, die im Allgemeinen den Bedingungen einer Aufgabe entspricht, für irgend einen besondern Fall ihre Gestalt nicht anders ändern kann, als wenn sie durch $\frac{0}{0}$ geht, wie sich an mehreren Beispielen zeigen lässt. [*Ueberhaupt war, wie es scheint, die Eulersche Ansicht der Differential-Rechnung unter allen ältern die richtigste, natürlichste und klarste, wenn auch gleich die Form der Darstellung noch der Lagrangischen Verbesserung bedurfte. In ganz vorzüglichem Grade besass der grosse Euler die Gabe, die Resultate zu entdecken und sie zuweilen gleichsam zu ahnen. Er gelangte öfters selbst mit wenig haltbaren Schlüssen an's richtige Ziel. Es war ihm insbesondere nur um gute Resultate zu thun, weni-*

erfolgen bei dem Ausdrucke $\frac{0}{0}$.

ger um Raisonnements über die Mittel, dazu zu gelangen.]

VI. Wie bekannt ist z. B. die Summe der n ersten Glieder der geometrischen Reihe

$$1 + a + a^2 + a^3 \ldots\ldots$$

gleich $\frac{1 - a^n}{1 - a}$.

Betrachtet man diesen Ausdruck als eine Function von n, so ist dieselbe, wie man sieht, von der Form der Exponential-Grössen.

Nun aber geht die Reihe, wenn man $a = 0$ setzt, in

$$1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$$

über und die Summe von n Gliedern ist n.

In diesem Falle also muss nothwendig die Exponential-Function ihre Form ändern und in eine einfache algebraische Function übergehen, welches nicht anders als durch eine Art von Sprung geschehen kann, welchen alsdann die Rechnung durch den Ausdruck $\frac{0}{0}$ anzeigt.

In der That giebt der obige Ausdruck $\frac{1 - a^n}{1 - a}$, wenn man darin $a = 1$ setzt, $\frac{0}{0}$. Um den Werth dieser Grösse zu finden, muss man vom Zähler und Nenner die Ableitungen nach a nehmen, welches $\left[\frac{-na^{n-1}}{-1} =\right] na^{n-1}$, und folglich für $a = 1$, n giebt.

Form-Veränderungen der Functionen

VII. Die Stammgrösse von x^n, oder das Integral von $x^n dx$ ist allgemein $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Soll dasselbe da anfangen, wo $x = a$ ist, so muss man davon die Constante $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ abziehen und erhält also

$$\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Diese Function von x ist immer algebraisch. Aber in dem Falle, wenn

$$n = -1,$$

giebt sie $\frac{0}{0}$, welches anzeigt, dass sie für diesen Fall ihre Form ändert.

Um die neue Function zu finden, nehme man die Ableitungen von Zähler und Nenner des Ausdrucks, nach n, so erhält man, vermöge der Ausdrücke der vierten Vorlesung,

$$\left[\frac{x^{n+1} \overset{e}{\log} x - a^{n+1} \overset{e}{\log} a}{1} =\right]$$

$$x^{n+1} \overset{e}{\log} x - a^{n+1} \overset{e}{\log} a.$$

Setzt man hierin $n = -1$, so erhält man $\overset{e}{\log} x - \overset{e}{\log} a$, oder

$$\overset{e}{\log} \frac{x}{a}$$

für die Stammgrösse von $\frac{1}{x}$, wie wir es in der vierten Vorlesung aus andern Gründen fanden.

VIII.

erfolgen bei dem Ausdrucke $\frac{0}{0}$.

VIII. Die Reihe

$$\cos x^{n-1} \sin x - \frac{n-1.n-2}{2.3} \cos x^{n-3} \sin x^3 + \frac{n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5} \cos x^{n-5} \sin x^5 \ldots$$

lässt sich allgemein durch die Sinus-Function $\frac{\sin nx}{n}$ ausdrücken, wie man aus der obigen Formel sieht.

Diese Formel aber giebt $\frac{0}{0}$ für

$$n = 0,$$

in welchem Falle sich die Reihe auf

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x^3}{3 \cos x^3} + \frac{\sin x^5}{5 \cos x^5} \ldots$$

reducirt. Die Form $\frac{0}{0}$ ist ein Zeichen, dass sich die Gestalt der Function in diesem Falle ändert. In der That erhält man, wenn man, nach der allgemeinen Regel, von Zähler und Nenner die Ableitungen nach n nimmt, $x \cos nx$, welches für $n = 0$ [*weil dann* $\cos nx = \cos 0 = 1$ *ist*] die Kreis-Function x giebt. wirklich ist, wie bekannt, der Werth von x,

$$x = \tan x - \tfrac{1}{3} \tan x^3 + \tfrac{1}{5} \tan x^5 \ldots$$

IX. Man sieht aus diesen verschiedenen Beispielen, die sich, wenn es nöthig wäre, leicht vervielfältigen liessen, dass der Ausdruck $\frac{0}{0}$ immer das Zeichen der Form-Aendernng einer Function ist, welches noch nicht bemerkt zu seyn scheint. [*Der allgemeine Beweis dieser wichtigen Bemerkung wäre wohl zu wünschen.*]

Bemerkungen über die Erfindung der

263.

Durch das Obige lassen sich genügend die Schwierigkeiten heben, die man antrifft, wenn man die für eine endliche Zahl von Elementen gefundenen Ausdrücke auf eine unendliche Zahl von Elementen ausdehnen will. Die berühmte Aufgabe von schwingenden Seiten giebt dazu ein merkwürdiges Beispiel. Man sehe deshalb in den „occupules mathematiques, tome I. und IV." die Einwendungen, welche d'Alembert in dem ersten Bande der Mémoiren der Turiner Academie gegen die [*Lagrangische*] Auflösung dieser Aufgabe machte, die aus der allgemeinen Formel der Bewegung eines mit einer unbestimmten Zahl von Gewichten beladenen Fadens hergeleitet war, wenn man die Zahl der Gewichte unendlich-gross und die Gewichte selbst unendlich-klein annimmt. Ich hatte mich in der Antwort auf die Einwürfe, die man im zweiten Bande der Turiner Mémoiren findet, begnügt, durch die Richtigkeit der Resultate die Voraussetzungen bei dem Uebergange vom Endlichen zum Unendlichen zu rechtfertigen. Aber die wahre Metaphysik dieser Voraussetzungen beruht auf denselben Gründen, wie die der Infinitesimal-Rechnung, über welche dermalen keine Ungewissheit oder Dunkelheit mehr Statt findet.

Bemerkungen über die Erfindung der Differential-Rechnung.

264.

Wir wollen diese Vorlesung mit einigen Bemerkungen über die Erfindung der Differential-Rechnung beschliessen.

Differential-Rechnung.

Als den ersten Erfinder dieser Rechnung kann man Fermat betrachten. In seiner Methode „de maximis et minimis" setzt er den Ausdruck der Grösse, deren Grösstes oder Kleinstes gesucht wird, dem Ausdrucke der nemlichen Grösse gleich, nachdem darin die Unbekannte um ein Unbestimmtes vergrössert worden. Hierauf schafft er aus der Gleichung, wenn Sie Wurzel-Grössen oder Brüche enthält, dieselbe weg, und nachdem alles Gemeinschaftliche in beiden Gliedern weggelassen worden, dividirt er das Uebriggebliebene durch die unbestimmte Grösse, welche alle Glieder multiplicirt. Hierauf setzt er diese Grösse gleich o und erhält eine Gleichung, aus welcher er die unbekannte Grösse entwickelt. Folgendes ist ein einfaches, von Fermat gegebenes Beispiel.

Es werde verlangt, eine gegebene Linie so in zwei Theile zu theilen, dass das Rechteck unter den beiden Theilen ein Maximum ist. Die Länge der gegebenen Linie sey a und x einer der beiden Theile, so ist $a - x$ der andere Theil. Der Ausdruck, dessen Maximum man sucht, ist also $ax - x^2$. Man vergrössere x um die willkürliche Grösse e, so erhält man den neuen Ausdruck

$$a(x+e) - (x+e)^2.$$

Setzt man beide Ausdrücke einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$ax - x^2 = a(x+e) - (x+e)^2,$$

oder, wenn man das Quadrat $(x+e)^2$ entwickelt,

$$ax - x^2 = ax + ae - x^2 - 2ex - e^2.$$

Lässt man auf beiden Seiten die gemeinschaftlichen Glie-

der $ax - x^2$ weg und dividirt durch e, so erhält man

$$a - 2x - e = 0,$$

wo man nun e gleich Null setzen muss, welches die Gleichung auf

$$a - 2x = 0$$

reducirt, woraus

$$x = \tfrac{1}{2} a$$

folgt, welches zeigt, dass die gegebene Linie, wie bekannt, in der Mitte getheilt werden muss.

Man sieht beim ersten Blicke, dass die Regel der Differential-Rechnung, das Differential des Ausdrucks, welcher ein Maximum oder Minimum seyn soll, nach der veränderten Unbekannten genommen, gleich Null zu setzen, das Nemliche geben muss, weil beide Verfahren auf Eins hinaus kommen und die Glieder, die man bei der Differential-Rechnung als unendlich-klein weglässt, diejenigen sind, welche bei der Fermatschen Methode, als Nullen, wegblieben.

Fermats Methode der Tangenten beruht auf dem nemlichen Princip. In der Gleichung zwischen Abscissen und Ordinaten, welche Fermat die specifische Eigenschaft der Curve nennt, vermehrt oder vermindert er die Abscisse um eine unbestimmte Grösse und betrachtet die neue Ordinate als gleichzeitig der Curve und der Tangente angehörig. Die entstehende Gleichung behandelt er wie bei den maximis und minimis.

Es sey z. B. x die Abscisse und y die Ordinate der Curve. Bezeichnet man durch t die Subtangente, in dem zu x und y gehörigen Puncte der Curve, so ist leicht zu sehen, dass die ähnlichen Dreiecke für

den Werth der Ordinate der Tangente, die zu der Abscisse $x+e$ gehört, $\frac{y(t+e)}{t}$ geben. Diese Ordinate soll nun der Ordinate der Curve für die nemliche Abscisse $x+e$ gleich seyn. Man erhält also die nöthige Gleichung, wenn man in die Gleichung der Curve $x+e$ statt x und $\frac{y(t+e)}{t}$ statt y setzt. Diese Gleichung wird, nachdem sie gehörig reducirt worden, durch e theilbar seyn. Man dividire also alle ihre Glieder durch e und lasse hernach alle diejenigen, als Nullen, weg, in welchen die unbestimmte Grösse e vorkommt, weil man diese unbestimmte Grösse gleich Null setzen muss. Die alsdann entstehende Gleichung giebt den Werth von t in x und y

Setzt man bei der Parabel, deren Gleichung

$$y^2 = ax = 0$$

ist, $y + \frac{ye}{t}$ statt y und $x+e$ statt x, so erhält man

$$y^2 + \frac{2y^2e}{t} + \frac{y^2e^2}{t^2} - ax - ae = 0.$$

Nun ist $y^2 - ax = 0$. Lässt man also diese Glieder weg und dividirt die übrig bleibenden durch e, so findet man

$$\frac{2y^2}{t} - \frac{y^2e}{t} - a = 0.$$

Lässt man noch das Glied $\frac{y^2e}{t}$ weg, weil es für $e = 0$ verschwindet, so erhält man blos

$$\frac{2y^2}{t} - a = 0,$$

woraus

$$t = \frac{2y^2}{a} = 2x$$

folgt [*wie gehörig*].

Man sieht hier abermals leicht die Aehnlichkeit des Fermatschen Verfahrens mit der Differential-Methode. Die unbestimmte Grösse, um welche die Abscisse x vergrössert wird, ist das Differential dx und die Grösse $\frac{ye}{t}$, welche das correspondirende Wachsthum von y ist, entspricht dem Differentiale dy.

Es ist selbst merkwürdig, dass Leibnitz, in der Schrift, welche von der Entdeckung der Differential-Rechnung handelt, und welche unter dem Titel: „nova methodus pro maximis et minimis" in den Leipziger Actis vom Monat October 1684 abgedruckt wurde, dy eine Linie nennt, welche sich zu der willkürlichen Linie dx verhalte, wie die Ordinate y zur Subtangente. Dieses bringt die Leibnitzsche Analysis der Fermatschen noch näher.

Man sieht, dass Fermat durch eine sehr originelle, aber etwas dunkle Idee, die Laufbahn eröffnete. Diese Idee besteht darin, in die Gleichung eine unbestimmte Grösse einzuführen, die nach der Natur der Aufgabe Null seyn muss, die man aber erst gleich Null setzt, nachdem man die ganze Gleichung durch diese Grösse dividirt hat.

Diese Idee ist der Keim der neuen Rechnung geworden, durch welche die Geometrie und Mechanik so grosse Fortschritte gemacht haben. Aber man

kann sagen, dass sie ihre Dunkelheit auf die Principien des Calculs vererbt habe.

Jetzt, wo wir eine deutlichere Metaphysik der Principien haben, sieht man, dass die unbestimmte Grösse, welche Fermat zu der unbekannten hinzuthat, nur zur Bildung der Ableitung dient, die im Falle des Maximi oder Minimi Null seyn muss und welche allgemein die Lage der Tangenten bestimmt. [*Die Idee, der veränderlichen Grösse ein unbestimmtes Wachsthum beizulegen, welches, nachdem die nöthigen Entwickelungen damit gemacht worden, wieder Null gesetzt wird, ist noch immer die nemliche, die auch zur Entwickelung der Werthe der Ableitungen dient. Denn, z. B. die erste Ableitung von fx wird gefunden, wenn man der Grösse x eine unbestimmte Grösse k hinzufügt, von dem Resultate die anfängliche Grösse fx abzieht, den Rest durch k dividirt und hernach k wieder Null setzt. Die erste Ableitung ist allgemein nichts anders, als die Grösse $\frac{f(x+k)-fx}{k}$, für $k=0$. Dies Verfahren, den Werth dieser Grösse zu finden, ist also ganz das obige.*]

265.

Aber die Mathematiker zu Fermats Zeit fassten den Geist der neuen Rechnung nicht auf. Sie betrachteten sie nur als einen einzelnen Kunstgriff, der auf einzelne Fälle Anwendung finde, aber grossen

Schwierigkeiten unterworfen sey. Man kann im dritten Bande von Descartes Briefen einen langen Streit über diesen Gegenstand mit Fermat sehen. Auch blieb die Erfindung, welche ein wenig früher bekannt wurde, als Descartes Geometrie, vierzig Jahre lang ohne Folgen und wurde fasst vergessen. Denn, wenn man etwa die Sluzesche Regel, die Tangente zu finden, ausnimmt, welche von der Fermatschen Methode hergenommen scheint, so wie die Wallissche Methode für den nemlichen Gegenstand, welche eigentlich keine andere ist, als die Fermatsche, auf eine weniger abstracte Weise entwickelt, so liefert der ganze Zeitraum Nichts, was auf Fermats Entdeckung Bezug hätte.

266.

Endlich fiel Barrow darauf, statt der Grössen, die nach Fermat gleich Null gesetzt werden müssen, reelle, aber unendlich-kleine Grössen zu setzen und gab im Jahre 1674 seine Methode der Tangenten, welche nichts anders als eine Construction der Fermatschen Methode ist, vermittelst eines unendlich kleinen Dreiecks, dessen Seiten e, $\frac{ey}{t}$ und ein unendlich kleiner Theil der, als ein Vieleck betrachteten Curve sind. Dieses trug ebenfalls zur Entstehung des Systems des Unendlich-Kleinen, oder der Differential-Rechnung bei. Aber noch immer waren nur die Grundzüge des Calculs vorhanden (ce calcul n'etoit encore qu'ebauché), denn er liess sich nur auf

Differential-Rechnung.

rationale Ausdrücke anwenden und erforderte die Entwickelung der Glieder, um diejenigen weglassen zu können, welche die Quadrate oder höhern Potenzen der unendlich kleinen Grössen enthalten.

267.

Es war also noch übrig, einen einfachen, allgemeinen und auf alle Arten von Ausdrücken anwendbaren Algorithm zu finden, durch welchen man direct und ohne Reductionen, aus den algebraischen Ausdrücken ihre Differentiale finden könne. Diesen hat Leibnitz, zehn Jahre später, in der oben erwähnten Schrift gegeben, welche die Elemente der eigentlichen Differential-Rechnung enthält. Es scheint, dass Newton zu gleicher Zeit, oder ein wenig früher, die nemlichen Abkürzungen der Rechnung bei den Differentiationen gefunden habe. Vorzüglich aber besteht in der Aufstellung der Differential-Gleichungen und ihrer Integration das grosse Verdienst und die vorzüglichste Wirkung der neuen Rechnung und in diesem Puncte scheint die Ehre der Erfindung Leibnitz, und besonders den Bernoullis fasst allein anzugehören.

268.

Aber während sich dieses Gebäude zu einer unermesslichen Höhe erhob, war sein Eingang immer noch ziemlich dunkel. Die Grössen, welche von

selbst verschwinden, oder wegen ihrer Kleinheit weggelassen werden sollen, erregten bei dem Anfänger wenig befriedigende Vorstellungen, die nicht wohl geeignet waren, dem interessantesten Theile der Mathematik zur Grundlage zu dienen. Sollen die Zweifel und die Dunkelheit gehoben werden, so muss man Nichts weglassen, und dieses ist nur bei den abgeleiteten Functionen möglich.

Neunzehnte Vorlesung.

Von den Functionen zweier oder mehrerer veränderlichen Grössen und ihren Ableitungen. Bezeichnung und Entwickelung dieser Ableitungen.

Begriffe von der Rechnung mit partiellen Differentialen.

269.

Bis jetzt handelten wir [*nemlich in diesem Bande*] erst von Functionen einer einzigen veränderlichen Grösse. Kamen Functionen zweier oder mehrerer veränderlicher Grössen vor, so betrachteten wir sie als Functionen einer und derselben Grösse. Hängt nun eine Function von zweien oder mehreren, von einander unabhängig, veränderlichen Grössen ab, so ist klar, dass diese Function, nach den verschiedenen veränderlichen Grössen, verschiedene Ableitungen haben kann, die aus der Stamm-Function durch die blosse Entwickelung entstehen, wenn man jeder der veränderlichen Grössen ein Wachsthum beilegt.

So führt die Rechnung mit abgeleiteten Functionen einer veränderlichen Grösse von selbst auf die

Ableitungs-Rechnung mit mehreren veränderlichen Grössen [*die Rechnung mit partiellen Differentialen*] welche, wie man sieht, nichts als eine Verallgemeinerung der ersten ist, und dieselben Grundsätze hat.

Hätten die Erfinder der Differential-Rechnung diese Rechnung sogleich als eine Ableitungs-Rechnung betrachtet, so würden sie von selbst und unmittelbar auf die Ableitungs-Rechnung mit mehreren veränderlichen Grössen gekommen seyn, und es würde nicht wieder fasst ein halbes Jahrhundert zwischen der Erfindung der Differential-Rechnung und der sogenannten Rechnung mit partiellen Differentialen, die nichts anders ist, als die Rechnung mit Ableitungen mehrerer veränderlichen Grössen, verstrichen seyn. Man würde die Rechnung mit partiellen Differentialen, anstatt sie als eine eigene Rechnung zu betrachten, vielmehr nur als eine neue Anwendung, oder vielmehr Ausdehnung der Differential-Rechnung angesehen und die verschiedenen Zweige dieser Rechnung, die so lange getrennt und vereinzelnt waren, sogleich vom Anfange an, unter den nemlichen Gesichtspunct und unter eine und dieselbe Benennung zusammengefasst haben.

Ableitung von Functionen mit zwei unabhängig-veränderlichen Elementen.

270.

Es sey zunächst

$$f(x, y) \ [= u]$$

unabhängig-veränderlichen Elementen.

irgend eine Function zweier veränderlicher Grössen x und y, welche wir als von einander unabhängig betrachten. Setzt man in diese Grösse $x+k$ statt x und $y+\lambda$ statt y, [*im Original steht i statt k und o statt λ, welche beide Buchstaben nicht bequem sind,*] wo k und λ unbestimmte Grössen bedeuten, und entwickelt die Function

$$[u+\lambda u] = f(x+k, y+\lambda)$$

nach steigenden Potenzen von k und λ, so ist klar, dass das erste Glied ohne k und λ, die gegebene Function fxy selbst seyn muss, während die übrigen Glieder neue Functionen von x und y sind, mit den Factoren k, λ, k^2, $k\lambda$, λ^2, k^3 *etc.*

Diese neuen Functionen werden ebenfalls Ableitungen der Stammgrösse $f(x, y)$ seyn und man wird das Gesetz ihrer Ableitungen finden, wenn man der Reihe nach die Ableitungen nach jeder der beiden Grössen k und λ nimmt.

Zu dem Ende setze man zuerst x allein veränderlich und $x+k$ statt x, während y unveränderlich das Nemliche bleibt. Alsdann kann man die Function $f(x+k, y)$ blos als Function von x entwickeln [*denn y ist jetzt eine Constante*]. Hierauf setze man, dass in den Ableitungen nach x, die Grösse y in $y+\lambda$ übergehe und entwickle diese Function als von y abhängig, während jetzt x constant ist.

Auf diese Weise wird man, wenn man $f(x+k, y+\lambda)$ entwickelt, verschiedene Ableitungen der Stammgrösse $f(x, y)$ erhalten, Theils nach der veränderlichen Grösse x allein, Theils nach der veränderlichen

Grösse y allein, Theils nach x und y u. s. w. Das Gesetz der Entwickelung ist immer das nemliche. Es wird nur nach einander auf die verschiedenen veränderlichen Grössen angewendet.

271.

[*In der hier folgenden Stelle erklärt Lagrange seine Zeichen für den Fall mehrerer veränderlicher Grössen. Er bezeichnet, anders wie in der Theorie der Functionen, eine Ableitung nach x, z. B. von der Grösse* fx, *durch* $f^{\prime,}\, x,y$; *eine Ableitung nach y durch* $f\quad x,y$; *eine Ableitung nach x und y durch* $f^{\prime,\prime}\, x,y$ *u. s. w. Das Comma zwischen den Strichen soll Beziehung auf das Comma zwischen x und y in der Stammgrösse* fx,y *haben. Die Unterscheidung der Ableitungen durch die Stellung des Striches, unten oder oben, wie die in der Theorie der Functionen, wird aufgegeben. Durch einen Strich unten soll jetzt die Zurückleitungs-Operation bezeichnet werden. Man sieht leicht die Unvollkommenheit dieser Bezeichnung. Für mehr als zwei veränderliche Grössen ist die Bezeichnung auf diese Weise schon schwierig und für eine unbestimmte Zahl veränderlicher Grössen nicht ausführbar. Die alten Zeichen haben diese Unvollkommenheiten weniger, obgleich sie allerdings den grossen Fehler haben, unrichtige Vorstellungen von dem bezeichneten Gegenstande zu erregen, dergleichen*

unabhängig-veränderlichen Elementen.

man also, wenn man sich der alten Zeichen bedient, entfernen muss.]

Man erhält also zunächst

$$f(x+k,y) =$$
$$f(x,y) + k\frac{df(x,y)}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x,y)}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(x,y)}{dx^3} \ldots$$

Nun setze man überall $y+\lambda$ statt y, so erhält man

$$f(x+k,y+\lambda) = f(x,y+\lambda) + k\frac{df(x,y+\lambda)}{dx}$$
$$+ \frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x,y+\lambda)}{dx^2}$$
$$+ \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(x,y+\lambda)}{dx^3}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Man entwickele der Reihe nach der Grössen $f(x,y+\lambda)$, $\frac{df(x,y+\lambda)}{dx}$, $\frac{d^2f(x,y+\lambda)}{dx^2}$ *etc.*, als Functionen von $y+\lambda$ [*und so, als wenn x constant wäre*], so erhält man

$$f(x,y+\lambda) =$$
$$f(x,y) + \lambda\frac{df(x,y)}{dy} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2f(x,y)}{dy^2} + \frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3f(x,y)}{dy^3} \ldots$$

$$\frac{df(x,y+\lambda)}{dx} = \frac{df(x,y)}{dx} + \lambda\frac{d^2f(x,y)}{dx\,dy} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^3f(x,y)}{dx\,dy^2}$$

$$\frac{d^2f(x,y+\lambda)}{dx^2} = \frac{d^2f(x,y)}{dx^2} + \lambda\frac{d^3f(x,y)}{dx^2\,dy} \ldots$$

u. s. w.

Substituirt man Dieses [*und setzt zugleich der Kürze wegen u statt* $f(x,y)$], so erhält man

Ableitung von Functionen mit zwei

$$\Big[f(x+k,y+\lambda)=u+\lambda\frac{du}{dy}+\frac{\lambda^2}{2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{\lambda^3}{2.3}\cdot\frac{d^3u}{dy^3}\cdots\cdots$$

$$+k\left(\frac{du}{dx}+\lambda\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{\lambda^2}{2}\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\cdots\right)$$

$$+\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\cdots\right)$$

$$+\frac{k^3}{2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^2}\cdots\right)$$

oder]

$$f(x+k,\ y+\lambda),\ \text{oder}$$

$$u+\Delta u=u+k\frac{du}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3u}{dx^3}\cdots\cdots$$

$$+\lambda\frac{du}{dy}+k\lambda\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{k^2\lambda}{2}\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\cdots:$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{k\lambda^2}{2}\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\cdots\cdots$$

$$+\frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3u}{dy^3}\cdots\cdots;$$

wo das allgemeine Glied

$$\frac{k^m\lambda^m}{2.3\ldots\ldots m.2.3\ldots\ldots n}\cdot\frac{d^{m+n}u}{d^mx.d^my}$$

ist.

272.

Wir fingen die Entwickelung des Ausdrucks von $f(x+k,y+\lambda)$ damit an, dass wir in $f(x,y)$ $x+k$ statt x setzten und nach k entwickelten. Hierauf setzten wir in alle Glieder der Entwickelung $y+\lambda$ statt y und entwickelten nach λ.

Offenbar findet man identisch das Nemliche, wenn man die Operation durch die Substitution von $y+\lambda$ statt

statt y und durch die Entwickelung nach x anfängt und hernach erst $x+k$ statt x setzt und nach k entwickelt.

In diesem letzten Falle erhält man zuerst die ersten, zweiten etc. Ableitungen von u nach y, das heisst, die Grössen $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ *etc.* hierauf die Ableitungen von diesen nach x, nemlich $\frac{d^2u}{dy\,dx}$, $\frac{d^3u}{dy^2\,dx}$ *etc.* ferner $\frac{d^3u}{dy\,dx^2}$, $\frac{d^4u}{dy^2\,dx^2}$ *etc.* und zuletzt, wie gehörig, den obigen Ausdruck.

Nun aber wird, bei dem ersten Verfahren, die Ableitung nach x und y, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ gefunden, wenn man zuerst die Ableitung von u nach x nimmt, welches $\frac{du}{dx}$ giebt, hernach aber die erste Ableitung von dieser nach y, welches $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ giebt. Hingegen wird, bei dem zweiten Verfahren, die nemliche Grösse gefunden, wenn man erst die erste Ableitung von u nach y, nemlich $\frac{du}{dy}$ und darauf die erste Ableitung von dieser nach x nimmt, welches $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ giebt.

Daraus folgt, dass es gleich viel ist, in welcher Ordnung die nöthigen Operationen, um von der Stammgrösse u zu ihrer zwiefachen Ableitung $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ zu gelangen, vor sich gehe.

Und da sich das Nemliche von allen übrigen Ableitungen zeigen lässt, so folgt allgemein, dass die

Ordnung der Aufeinanderfolge der Ableitungs-Operationen völlig gleichgültig ist und dass man bei jeder beliebigen Aufeinanderfolge immer das nemliche Resultat findet.

So erhält man z. B. den Werth der dreifachen Ableitung von u, zweimal nach x und einmal nach y, man mag erst die zweite Ableitung von u nach x und darauf von dieser die erste Ableitung nach y, oder erst die erste Ableitung von u nach y und von dieser die zweite Ableitung nach x nehmen, oder auch erst die erste Ableitung von u nach x, hierauf von dieser die erste Ableitung nach y, und dann die erste Ableitung hiervon nach x u. s. w.

[*Es wird nicht unnütz seyn, diesen wichtigen Satz, wie folgt, allgemein nachzuweisen.*

Man erhält, wenn man erst x und dann y sich verändern lässt,

$$\begin{aligned} u + \Delta u = u &+ k\frac{du}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3u}{dx^3} \dots \\ &+ \lambda\frac{du}{dy} + k\lambda\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{k^2\lambda}{2}\frac{d^3u}{dx^2\,dy} \dots \\ &+ \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{k\lambda^2}{2}\frac{d^3u}{dx\,dy^2} \dots \\ &+ \frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3u}{dy^3} \dots \end{aligned}$$

Lässt man hingegen erst y und dann x sich verändern, so erhält man

$$\begin{aligned} u + \Delta u = u &+ \lambda\frac{du}{dy} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3u}{dy^3} \dots \\ &+ k\frac{du}{dx} + \lambda k\frac{d^2u}{dy\,dx} + \frac{\lambda^2 k}{2}\frac{d^3u}{dy^3\,dx} \dots \end{aligned}$$

unabhängig-veränderlichen Elementen.

$$+\frac{k^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\lambda k^2}{2}\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\ldots$$

$$+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3u}{dx^3}\ldots$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke, wie sie es sind, einander gleich, lässt zunächst die in Beiden vorkommenden, identisch gleichen Glieder weg, und dividirt durch $\lambda k = k\lambda$, so erhält man

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{k}{2}\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\ldots=\frac{d^2u}{dy\,dx}+\frac{\lambda}{2}\frac{d^3u}{dy^2\,dx}\ldots$$

$$+\frac{\lambda}{2}\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\ldots \qquad +\frac{k}{2}\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\ldots$$

Da diese Gleichung unabhängig von k und λ, oder für jeden Werth von k und λ, also auch für $k=0$ und $\lambda=0$ Statt findet, so kann man auch $k=0$ und $\lambda=0$ setzen. Dieses giebt

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

Lässt man diese beiden Glieder weg und multiplicirt mit 2, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} k\dfrac{d^3u}{dx^2\,dy}\ldots \\ +\lambda\dfrac{d^3u}{dx\,dy^2}\ldots \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} \lambda\dfrac{d^3u}{dy^2\,dx}\ldots \\ +k\dfrac{d^3u}{dy\,dx^2}\ldots \end{array}\right.$$

Setzt man hier z. B. $k=0$, dividirt mit λ und setzt hierauf auch $\lambda=0$, so erhält man

$$\frac{d^3u}{dx\,dy^2}=\frac{d^3u}{dy^2\,dx}.$$

Setzt man statt dessen erst $\lambda=0$, dividirt mit k

und setzt hierauf auch $k = 0$, *so erhält man*

$$\frac{d^3u}{dx^2\,dy} = \frac{d^3u}{dy\,dx^2}$$

u. s. w.]

[*Beispiel.*] Es sey zum Beispiel

$$u = f(x, y) = \frac{x^3}{y^2},$$

so sind die ersten Ableitungen nach x und y,

$$\frac{du}{dx} = \frac{3x}{y^3}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{2x^3}{y^3}.$$

Das Erste giebt, nach y abgeleitet,

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -\frac{6x^2}{y^3}.$$

Das Zweite giebt, nach x abgeleitet, ebenfalls

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = -\frac{6x^2}{y^3}.$$

Ferner erhält man, nach x und y allein,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{6x}{y^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{6x^3}{y^4};$$

Die Ableitung von $\frac{d^2u}{dx^2}$ nach y, ist

$$\frac{d^3u}{dx^2\,dy} = -\frac{12x}{y^3};$$

Die Ableitung von $\frac{d^2u}{dy\,dx}$ nach x ist ebenfalls

$$\frac{d^3u}{dy\,dx^2} = -\frac{12x}{y^3};$$

u. s. w.

[*Hier folgt wieder eine Erklärung von Zeichen, für den Fall, wenn z. B. statt* $f(x, y)$ *ein*

einzelner Buchstabe, wie u, gesetzt wird, welche wegbleiben kann.]

Grenzen für die Werthe der entwickelten Functionen.

273.

Man sieht, dass durch die Ableitung von Functionen zweier veränderlichen Grössen verschiedene Arten von Ableitungen nach den verschiedenen veränderlichen Grössen entstehen und dass dieselben auf die nemliche Weise und nach den nemlichen Regeln gebildet werden, wie die Ableitungen einer einzelnen veränderlichen Grösse, wenn man nur jede Grösse für sich, und eine nach der andern in Rechnung bringt. Daraus folgt, dass Alles, was wir oben von den Functionen **einer** veränderlichen Grösse zeigten, auch auf Functionen **zweier** veränderlichen Grössen, jede einzeln genommen, passt.

Man kann auch die Theorie der Ableitungen auf Functionen dreier und mehrerer veränderlicher Grössen ausdehnen, denn man darf nur für jede die nemliche Operation machen.

[*Hier folgen Bemerkungen über Zeichen, jedoch werden keine Zeichen für den Fall dreier und mehrerer veränderlicher Grössen bestimmt.*]

274.

Obgleich in den hier betrachteten Functionen zweier veränderlicher Grössen die beiden veränder-

lichen Grössen als unabhängig von einander betrachtet werden, und die Unabhängigkeit die vorhin erwähnten verschiedenen Arten von Ableitungen hervorbringt, so hindert dennoch Nichts, die beiden Grössen auch als Functionen beliebiger anderer veränderlicher Grössen anzusehen. Nur sind alsdann diese neuen Functionen unbestimmt und willkürlich.

Auf diese Weise kann man gleichsam die Theorie der Functionen zweier veränderlichen Grössen auf diejenige einer veränderlichen Grösse reduciren und besonders Dasjenige auf die Entwickelung von Functionen zweier und mehrerer veränderlicher Grössen anwenden, was in der neunten Vorlesung von der Entwickelung der Functionen einer veränderlichen Grösse gezeigt wurde.

Es sey z. B. z eine Function der beiden veränderlichen Grössen x und y. Man setze, x und y wären Functionen irgend einer andern veränderlichen Grösse t, so dass also z blos eine Function von t ist, so geht z, nach dieser Ansicht, vermöge des allgemeinen Ausdrucks der zweiten Vorlesung, wenn man $t + k$ statt t setzt, in

$$z + k\frac{d(z)}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2(z)}{dt^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3(z)}{dt^2} \dots .$$

über. Will man in dieser Entwickelung bei dem μten Gliede stehen bleiben, so erhält man die Grenzen des Restes, oder die Summe aller auf das μte folgenden Glieder, nach der neunten Vorlesung, wenn man in

entwickelten Functionen.

$$\frac{k^\mu}{2.3\ldots.\mu}\frac{d^\mu(z)}{dt^\mu}$$

$t+k$ statt t in $\frac{d^\mu z}{dt^\mu}$ setzt und die grössten und kleinsten Werthe dieser Function von $k=0$ bis zu dem der Grösse k bestimmten Werthe nimmt, oder auch noch grössere und kleinere Werthe, als diese.

Da x und y als Functionen von t betrachtet werden, so gehen diese Grössen, wenn man $t+k$ statt t setzt, in

$$x+k\frac{dx}{dt}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\ldots. \text{ und}$$

$$y+k\frac{dy}{dt}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\ldots.$$

über und man findet die Werthe der Ableitungen $\frac{d(z)}{dt}, \frac{d^2(z)}{dt^2}\ldots.$, in $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\ldots.$ ausgedrückt, nach der sechsten Vorlesung.

275.

Verlangte man die Entwickelung von z nur in Beziehung auf die Zunahmen $k\frac{dx}{dt}$ und $k\frac{dy}{dt}$ von x und y, so dürfte man nur $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ unveränderlich annehmen, und folglich

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}=0 \textit{ etc.}$$

setzen, wo alsdann $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ beliebige Coefficienten bedeuten können.

Grenzen für die Werthe der

Wollte man von der Zunahme von x und y die beiden Glieder

$$k\frac{dx}{dt}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2} \text{ und } k\frac{dy}{dt}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

in Rechnung bringen, so müsste man alsdann

$$\frac{d^3x}{dt^2}=0,\ \frac{d^3y}{dt^2}=0 \ etc.$$

setzen und könnte $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ beliebige Coefficienten bedeuten lassen.

276.

[*Beispiel.*] Es sey zum Beispiele

$$z=(x^2+y^2)^m,$$

so erhält man, wenn man nach der sechsten Vorlesung die Ableitungen nimmt, und $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ als unveränderlich betrachtet,

$$\frac{d(z)}{dt}=2m\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)(x^2+y^2)^{m-1},$$

$$\frac{d^2(z)}{dt^2}=2m\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)(x^2+y^2)^{m-1}$$

$$+4m.(m-1)\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)^2(x^2+y^2)^{m-2},$$

$$\frac{d^3(z)}{dt^3}=12m(m-1)\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right).$$

$$\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)^2(x^2+y^2)^{m-2}$$

$$+8m(m-1)(m-2)\left(x\frac{dx}{dt}y+\frac{dy}{dt}\right)^3(x^2+y^2)^{m-3},$$

u. s. w.

Wenn also x und y in $x+k\frac{dx}{dt}$ und $y+k\frac{dy}{dt}$ übergehen, so erhält man

$$\left(\left(x+k\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(y+k\frac{dy}{dt}\right)^2\right)^m$$

$$=(x^2+y^2)^m$$

$$+k\left(2m\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)(x^2+y^2)^{m-1}\right)$$

$$+\frac{\;}{2}\left(2m\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)(x^2+y^2)^{m-1}\right.$$

$$\left.+4m(m-1)\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)^2(x^2+y^2)^{m-2}\right)\ldots.$$

Wollte man bei den ersten beiden Gliedern stehen bleiben, so erhielte man, weil das folgende Glied $\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3(z)}{dt^3}$ ist, die Grenzen des Restes, wenn man in den Ausdruck für $\frac{d^3(z)}{dt^3}$, $x+k\frac{dx}{dt}$ und $y+k\frac{dy}{dt}$ statt x und y setzte und die grössten und kleinsten Werthe dieses Ausdrucks nähme, von $k=0$ an.

Wäre $m-3$ eine positive Zahl und wären $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ auch positive Grössen, so ist leicht zu sehen, dass der kleinste Werth von $\frac{d^3z}{dt^2}$,

$$12m(m-1)\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)(x^2+y^2)^{m-2}$$

$$+8m(m-1)(m-2)\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)^3(x^2+y^2)^{m-3}$$

seyn würde, welcher zu $k=0$ gehört. Der grösste

Werth ist die nemliche Grösse, wenn man darin $x + k\frac{dx}{dt}$ und $y + k\frac{dy}{dt}$ statt x und y setzt.

Wenn die veränderlichen Grössen, Functionen anderer sind.

277.

Verlangte man die Entwickelung von z für $x + k$ und $y + \lambda$, so wie im Anfange der gegenwärtigen Vorlesung, so ist klar, dass man zu dem Ende nur

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ und } k\frac{dy}{dt} = x$$

setzen dürfe. Man muss alsdann ähnliche Resultate finden.

Es ist nemlich

$$\frac{d(z)}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

[*Diese Stelle ist wegen der weggelassenen Zeichen-Erklärung verändert.*]

Daraus folgt, wenn man von Neuem die Ableitungen nach t nimmt,

$$\frac{d^2(z)}{dt^2} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dx\,dt} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2z}{dy\,dt} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Da aber $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ auch als Functionen von x und y betrachtet werden, so sind ihre Ableitungen nach t,

Functionen anderer sind.

$$\frac{d^2 z}{dx\,dt} = \frac{d^2 z}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2 z}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dt} \text{ und}$$

$$\frac{d^2 z}{dy\,dt} = \frac{d^2 z}{dx\,dy}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2 z}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Substituirt man Dieses, so erhält man

$$\frac{d^2(z)}{dt^2} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dx^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$
$$+ 2\frac{d^2 z}{dx\,dy}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Wären die Ableitungen $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ constant, so dass $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$, $\frac{d^3 x}{dt^3} = 0$ *etc.*, so wären blos

$$\frac{d(z)}{dt} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2(z)}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{d^2 z}{dx\,dy}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d^3(z)}{dt^3} = \frac{d^3 z}{dx^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^3 z}{dx^2\,dy}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{dy}{dt}$$
$$+ 3\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{d^3 z}{dy^3}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^3,$$

.

$$\frac{d^m z}{dt^m} = \frac{d^m z}{dx^m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^m + m\frac{d^m z}{dx^{m-1}dy}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{m-1}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}\frac{d^m z}{dx^{m-2}dy^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{m-2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \ldots\ldots$$

Setzt man diese Ausdrücke in die allgemeine Formel

$$z + k\frac{d(z)}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2(z)}{dt^2}\ldots,$$

so erhält man

$$z+k\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}\right)$$

$$+\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)$$

.

Setzt man hierin

$$\frac{dx}{dt}=1 \text{ und } k\frac{dy}{dt}=\lambda,$$

so erhält man die obige Formel für die Entwickelung von z nach Potenzen von k und λ.

Bedingungen für die Vollständigkeit der Ableitungen.

278.

Die obigen Ausdrücke von $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ *etc.* geben die Zusammensetzung der Ableitungen beliebiger Functionen zweier veränderlicher Grössen x und y.

Setzt man nun

$$\frac{dx}{dz}=1,$$

welches nichts anders ist, als dass man x zur unabhängig veränderlichen Grösse [*statt* t] annimmt, das heisst, jetzt y als Function von x [*statt von* t] betrachtet, so muss man, wenn man will, dass z. B.

der Ableitungen.

$$\Psi(x,y)+\frac{dy}{dx}\varphi(x,y)$$

eine vollständige Ableitung irgend einer Function von x und y sey,

$$\Psi(x,y)=\frac{dz}{dx} \text{ und } \varphi(x,y)=\frac{dz}{dy}$$

seyn, wie sich findet, wenn man diese Ausdrücke mit dem obigen Ausdrucke von $\frac{d(z)}{dt}$ [$=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}$, *oder vielmehr jetzt* $\frac{d(z)}{dx}=\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$, *weil x an die Stelle von t getreten ist,*] vergleicht.

Um zwischen diesen beiden Gleichungen z zu eliminiren, darf man nur die Ableitungen von der ersten nach y, von der zweiten nach x nehmen, so erhält man

$$\frac{d\Psi(x,y)}{dy}=\frac{d^2z}{dx\,dy} \text{ und}$$

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx}=\frac{d^2z}{dy\,dx},$$

woraus

$$\frac{d\Psi(x,y)}{dy}=\frac{d\varphi(x,y)}{dx}$$

folgt.

Dieses ist die bekannte Bedingungs-Gleichung, welche erfüllt werden muss, wenn der Ausdruck

$$\Psi(x,y)+\frac{dy}{dx}\varphi(x,y)$$

eine vollständige Ableitung irgend einer Function

Bedingungen für die Vollständigkeit

von x und y seyn soll, für den Fall, dass y von x auf keine Weise abhängt.

Ohne diese Bedingung hat die Gleichung

$$\frac{d(z)}{dt} = \Psi(x, y)\frac{dx}{dt} + \varphi(x, y)\frac{dy}{dt},$$

wenn keine Abhängigkeit zwischen x und y, oder zwischen x, y und z Statt findet, keinen Sinn.

279.

Hätte man allgemein die Gleichung

$$\frac{d(z)}{dt} = \Psi(x, y, z)\frac{dx}{dt} + \varphi(x, y, z)\frac{dy}{dt},$$

so könnte man auf eine ähnliche Weise die Bedingungs-Gleichung, welche erfüllt werden muss, wenn diese Gleichung, ohne dass eine Abhängigkeit zwischen x, y, z Statt hat, eine Stammgleichung haben soll, finden.

Denn vergleicht man diesen Ausdruck von $\frac{d(z)}{dt}$ mit dem obigen allgemeinen Ausdrucke dieser Grösse $\left[\frac{d(z)}{dt} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}\right]$ so erhält man auch hier

$$\Psi(x, y, z) = \frac{dz}{dx} \text{ und } \varphi(x, y, z) = \frac{dz}{dy}.$$

Damit diese Gleichungen mit einander Statt finden können, muss die Ableitung von $\Psi(x, y, z)$ nach y, der Ableitung von $\varphi(x, y, z)$ nach x gleich seyn; denn beide Ableitungen geben $\frac{d^2z}{dx\,dy}$.

der Ableitungen.

Da aber nun, in so fern die gegebene Gleichung eine Stammgleichung hat, durch diese Stammgleichung z in x und y bestimmt wird, so hängt hier z von x und y ab. Die Grösse z muss also, auch in $\Psi(x, y, z)$ und $\varphi(x, y, z)$, als abhängig von x und y betrachtet werden. Dieses giebt [*wenn man der Kürze wegen*]

$$\Psi(x, y, z) = u \text{ und } \varphi(x, y, z) = v$$

setzt

$$\frac{d(u)}{dy} = \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \text{ und}$$

$$\frac{d(v)}{dx} = \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Die Bedingungs-Gleichung $\left[\frac{d(u)}{dy} = \frac{d(v)}{dx}\right]$ ist also hier:

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx},$$

oder, wenn man für $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ ihre Werthe u und v setzt,

$$\frac{du}{dy} + v\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dx} + u\frac{dv}{dz}.$$

Diese Gleichung muss von selbst erfüllt werden, das heisst, sie muss identisch Statt finden, wenn z eine Function von x und y seyn und folglich die gegebene Gleichung $\left[\frac{d(z)}{dt} = u\frac{dx}{dt} + v\frac{dy}{dt}\right]$ eine Stammgleichung haben soll.

Wird die Bedingungs-Gleichung erfüllt, so findet man die Stammgleichung selbst, vermittelst einer

Bedingungen für die Vollständigkeit

oder der andern der beiden Gleichungen

$$\frac{dz}{dx} = u \text{ und } \frac{dz}{dy} = v.$$

Denn nimmt man z. B. die Gleichung $\frac{dz}{dx} = u$, in welcher $\frac{dz}{dx}$ die Ableitung von z ist, so, als wenn y constant wäre, so darf man nur damit, als mit einer abgeleiteten Gleichung erster Ordnung zwischen z und x verfahren, während die andere Grösse y constant ist. Hat man in dieser Voraussetzung die Stammgleichung gefunden, so darf man nur die zugehörige willkürliche Constante als eine unbekannte Function von y betrachten, und dieselbe vermittelst der andern Gleichung $\frac{dz}{dy} = v$ bestimmen.

Wird dagegen die gefundene Bedingungs-Gleichung nicht von selbst erfüllt, so findet die gegebene Gleichung nicht anders Statt, als wenn es irgend ein bestimmtes Verhältniss zwischen x, y und z giebt, so dass zwei von diesen drei Grössen, Functionen der dritten sind.

Setzt man also in diesem Falle

$$z = f(x, y),$$

so ist

$$\frac{d(z)}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die obige Gleichung, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, aus welcher sich der Werth von y in x

finden

finden lässt. Man erhält für y und z gegebene Functionen von x und die Function $f(x, y)$ bleibt unbestimmt.

Da man auf diese Weise auf eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen x und y kommen könnte, zu welcher sich die Stammgleichung nur mühsam oder gar nicht finden liesse, so hat man Mittel gesucht, der willkürlichen Function eine solche Form zu geben, dass man zur Bestimmung von y und z in x unmittelbar zwei Gleichungen zwischen diesen veränderlichen Grössen erhält.

280.

[*Beispiel.*] Um hiervon ein einfaches Beispiel zu geben, setze man die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = xy\left(x + y\frac{dy}{dx}\right),$$

so ist

$$u = \Psi(x, y) = x^2 y \text{ und } v = \varphi(x, y) = xy^2,$$

also

$$\frac{du}{dy} = x^2, \quad \frac{dv}{dx} = y^2.$$

Unter diesen Umständen [*nemlich, weil nicht* $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$ *ist* (278.)] ist es unmöglich, dass z eine Function von x und y ist, so lange x und y von einander unabhängig seyn sollen.

Man setze also

$$y = fx,$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dfx}{dx}$$

und

$$\frac{dz}{dx} = x^2 fx + xfx^2 . \frac{dfx}{dx}.$$

Also ist z gleich der Stammgrösse von

$$x^2 fx + xfx^2 \frac{dfx}{dx},$$

[*welche Grösse blos x enthält, so dass also die Stammgrösse allemal gefunden werden kann.*]

Man kann aber die Untersuchung dieser Stammgrösse ersparen, wenn man dem Gliede $xy\frac{dy}{dx}$ in dem Ausdrucke von $\frac{dz}{dx}$, die Form

$$\frac{d(\frac{1}{3}xy^3)}{dx} - \frac{1}{3}y^3$$

giebt. Dadurch verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(\frac{1}{3}xy^3)}{dx} + yx^2 - \frac{1}{3}y^3.$$

Setzt man nun ferner

$$yx^2 - \frac{1}{3}y^3 = \frac{dfx}{dx},$$

wodurch sich die Gleichung in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(\frac{1}{3}xy^3)}{dx} + \frac{dfx}{dx}$$

verwandelt, so erhält man die Stammgleichung

$$z = \frac{1}{3}xy^3 + fx.$$

Beispiel von rectifiablen Curven u. s. w.

So vertreten diese beiden Gleichungen [$yx^2 - \frac{1}{3}y^3 = \frac{dfx}{dx}$ *und* $z = \frac{1}{3}xy^3 + fx$] zusammen die Stelle der gegebenen und die Function fx bleibt unbestimmt.

Beispiel von rectifiablen Curven, mit Potenzen der Ableitungen.

281.

Das nemliche gilt um so mehr von Gleichungen zwischen x, y, z und $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, wenn die Ableitungen $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ in Potenzen vorkommen.

I. Es sey z. B. die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

gegeben. Man setze

$$y = fx,$$

so ist

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2\right)}$$

Um hieraus z in x zu finden, müsste man von $\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2\right)}$ die Stammgrösse nehmen, welches allgemein, für einen unbestimmten Werth von fx nicht angeht; wenigstens nicht ohne Reihen.

II. Führt man dagegen eine dritte veränderliche Grösse ein, so lassen sich endliche Ausdrücke von x, y, z in diesen Grössen finden.

Zu diesem Ende muss man erst wieder die erste Ableitung $\frac{dx}{dt}$ von x herstellen, welche $= 1$ ist, so lange man x für die Hauptgrösse annimmt. Man muss also, der siebenten Vorlesung zu Folge, $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ und $\frac{dz}{dt} : \frac{dx}{dt}$ statt $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ setzen. Dieses giebt

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

III. Um diese Gleichung auf die allgemeinste Weise aufzulösen, wollen wir uns eines Verfahrens bedienen, welches in der Folge öfter vorkommen wird, nemlich Ausdrücke in x, y, z suchen, die der gegebenen Gleichung mit willkürlichen Constanten genugthun, darauf aber diese Constanten veränderlich setzen, jedoch so, dass die Ausdrücke der Ableitungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ die nemlichen bleiben.

IV. Wir wollen also einen willkürlichen Winkel ω annehmen. Da

$$\sin \omega^2 + \cos \omega^2 = 1$$

ist, so ändert sich die gegebene Gleichung nicht, wenn man ihr zweites Glied mit $\sin \omega^2 + \cos \omega^2$ multiplicirt.

V. Nun kann das Product von $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ und $\sin \omega^2 + \cos \omega^2$ auf die Form

$$\left(\frac{dy}{dt} \cos \omega - \frac{dx}{dt} \sin \omega\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \sin \omega + \frac{dx}{dt} \cos \omega\right)^2$$

gebracht werden. [*Es ist leicht, zu sehen, dass diese*

Potenzen der Ableitungen.

Grösse nichts anders als $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ *ist.*

Also ist die gegebene Gleichung folgende:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dt}\cos\omega - \frac{dx}{dt}\sin\omega\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\sin\omega + \frac{dx}{dt}\cos\omega\right)^2.$$

VI. Man setze

$$\frac{dy}{dt}\sin\omega + \frac{dx}{dt}\cos\omega = 0,$$

welches angeht, weil ω eine unbestimmte Grösse ist, so erhält man, wenn man die Wurzel aus den übrig bleibenden Gliedern nimmt,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt}\cos\omega - \frac{dx}{dt}\sin\omega.$$

VII. Man betrachte den Winkel ω als unveränderlich, so haben die beiden gefundenen Gleichungen folgende Stammgleichungen:

$$z = y\cos\omega - x\sin\omega + a \quad \text{und}$$

$$b = y\sin\omega + x\cos\omega,$$

wo a und b zwei willkürliche Constanten bedeuten.

VIII. Diese beiden Gleichungen geben also von y und z diejenigen Werthe in x, welche der gegebenen Gleichung genugthun, was auch die drei Constanten a, b und ω seyn mögen, wie man sich leicht durch die Substitution überzeugen kann. [*Man darf zu dem Ende nur den Rückweg der Rechnung machen.*]

IX. Nun aber ist leicht zu sehen, dass die nemlichen Werthe auch dann noch der gegebenen Gleichung genugthun, wenn man die Grössen a, b und

Beispiel von rectifiablen Curven, mit

ω veränderlich annimmt, in so fern nur die Werthe der Ableitungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ dieselben bleiben, welches letztere der Fall ist, wenn sich die, bei der Ableitung der beiden gefundenen Gleichungen, von *a*, *b* und ω herkommenden Glieder aufheben.

Man darf daher nur die Ableitungen der beiden Gleichungen nach *a*, *b* und ω nehmen und vermittelst dieser Ableitungen *a* und *b* bestimmen.

X. Wir wollen bei der Ableitungs-Operation, ω als die unabhängig veränderliche Grösse betrachten, so dass

$$\frac{d\omega}{d\omega} = 1$$

ist, so erhalten wir

$$-y \sin\omega - x \cos\omega + \frac{da}{d\omega} = 0 \text{ und}$$

$$y \cos\omega - x \sin\omega = \frac{db}{d\omega}$$

[*weil die erste Ableitung von* $\cos\omega$, $-\sin\omega$ *und von* $\sin\omega$, $\cos\omega$ *ist. Und zwar werden die Ableitungen deshalb nur nach* a, b *und* ω, *nicht zugleich nach* x, y *und* z *genommen, weil der von* x, y *und* z *herkommende Theil der Ableitungen schon an und für sich allein Null ist.*]

XI. Es war aber schon

$$y \sin\omega + x \cos\omega = b.$$

Also ist

$$-b + \frac{da}{d\omega} = 0,$$

Potenzen der Ableitungen.

welches $b = \frac{da}{d\omega}$ und folglich

$$\frac{db}{d\omega} = \frac{d^2 a}{d\omega^2}$$

giebt.

XII. Man hat also nunmehr die drei Gleichungen

$$z = y \cos\omega - x \sin\omega + a,$$

$$y \sin\omega + x \cos\omega = \frac{da}{d\omega},$$

$$y \cos\omega - x \sin\omega = \frac{d^2 a}{d\omega^2}.$$

XIII. Aber a ist irgend eine Function von ω. Bezeichnet man sie durch $f\omega$, so ist

$$\frac{da}{d\omega} = \frac{df\omega}{d\omega}, \quad \frac{d^2 a}{d\omega} = \frac{d^2 f\omega}{d\omega^2}$$

und die drei Gleichungen geben folgende Ausdrücke für x, y, z in ω:

$$x = \cos\omega \frac{df\omega}{d\omega} - \sin\omega \frac{d^2 f\omega}{d\omega^2},$$

$$y = \sin\omega \frac{df\omega}{d\omega} + \cos\omega \frac{d^2 f\omega}{d\omega^2},$$

$$z = f\omega + \frac{d^2 f\omega}{d\omega^2}.$$

[*Nemlich die erste und dritte Gleichung geben, wenn man sie addirt,* $z = a + \frac{d^2 a}{d\omega^2}$; *die zweite und dritte geben, wenn man die zweite mit* $\sin\omega$, *die dritte mit* $\cos\omega$ *multiplicirt, und die Producte addirt,* $y = \frac{da}{d\omega} \sin\omega + \frac{d^2 a}{d\omega^2} \cos\omega$. *Multiplicirt*

man die zweite mit $\cos\omega$ *und die dritte mit* $\sin\omega$ *und zieht letztere von ersterer ab, so erhält man* $x = \frac{da}{d\omega}\cos\omega - \frac{d^2 a}{d\omega^2}\sin\omega$, *wie im Text.*]

XIV. Diese Ausdrücke können dienen, Curven zu finden, die sich rectificiren lassen. Denn wenn x und y die rechtwinkligen Coordinaten einer Curve in der Ebene bedeuten und z der zugehörige Bogen ist, so weiss man aus der Differential-Rechnung und aus den Beweisen in der Functionen-Theorie, dass

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

ist, wenn man x und y beide als Functionen irgend einer andern veränderlichen Grösse betrachtet.

XV. Setzt man z. B. $\frac{df\omega}{d\omega} = m$ [$=$ *Const.*] so ist $\frac{d^2 f\omega}{d\omega^2} = 0$ und $f\omega = m\omega + n$. Die obigen Ausdrücke geben also alsdann

$$x = m\cos\omega,$$
$$y = m\sin\omega,$$
$$z = m\omega + n,$$

welches der Fall des Kreises ist [*indem nemlich für den Kreis die Coordinaten* x *und* y *wirklich* $m\cos\omega$ *und* $m\sin\omega$ *sind, wenn* ω *den zugehörigen Kreisbogen und* m *den Halbmesser bedeuten. Ueberhaupt lassen sich Curven, die rectificirt werden können, das heisst, deren Bogen-Längen durch* e n d l i c h e *Ausdrücke mittelst der Coordinaten angegeben werden können, deshalb mit Hülfe der*

Von den Bezeichnungen.

obigen Ausdrücke finden, weil alle drei Grössen x, y und z von einer und derselben Grösse ω, mittelst endlicher Ausdrücke abhängen.]

XVI. Nimmt man für $f\omega$ beliebige Functionen von $\sin\omega$ und $\cos\omega$, so findet man nach Belieben algebraische Curven, deren Rectification durch algebraische Ausdrücke möglich ist [*weil dann die Ausdrücke von x und y in z nur allein $\sin\omega$ und $\cos\omega$ enthalten, nicht ω selbst, und also zwischen x und y eine algebraische Gleichung Statt findet, eben wie zwischen z, x und y*]. Mit dieser Aufgabe haben sich sonst die Geometer viel beschäftigt und man findet davon verschiedene Auflösungen im fünften Bande der neuen Petersburger Commentarien.

282.

Gleichungen, wie die, von welchen wir so eben sprachen, sind unter der Benennung „Gleichungen, die den Bedingungen der Integrabilität nicht genugthun" bekannt. Man findet elegante Auflösungen mehrerer solcher Gleichungen in einem Mémoire von Monge in der Sammlung der Academie der Wissenschaften vom Jahre 1784.

Von den Bezeichnungen.

[*Was hier ferner im Original auf Seite* 347. 348. 349. 350. 351 *und* 352. *bis gegen das Ende dieser Vorlesung folgt, handelt blos von den Bezeichnungen, die der Verfasser für partielle Differentiale in verwickelten Fällen wählt, und konnte*

Von den

also in der Uebersetzung, die sich der alten gewöhnlichen Zeichen bedient, wegbleiben. Der Verfasser bemerkt, dass die Striche und Commata zwar zur Unterscheidung der Ableitungen, im Fall zweier unabhängig-veränderlicher Grössen, hinreichen, aber wenn mehrere Grössen vorkommen, schon beschwerlich sind und für eine unbestimmte Zahl von Grössen, diejenige Grösse, nach welcher jedesmal die Ableitung genommen werden soll, nicht anzeigen. Dieses zu verbessern, setzt Lagrange die Grösse, nach welcher die Ableitung genommen wird, ungefähr wie bei der alten Bezeichnung, unter die abzuleitende Grösse und schliesst den Bruch in Klammern ein, der dann auch, anders wie bei den alten Zeichen, eine wirklich reelle Bedeutung hat. So z. B. bedeutet $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ *das Nemliche was die alten Zeichen durch* $\frac{dz}{dx}$, *oder nach Euler durch* $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ *ausdrücken. Das Zeichen* $\left(\frac{z'}{x'}\right)$, *in die alten Zeichen übersetzt, bedeutet* $\frac{dz}{dt}:\frac{dx}{dt}$, *denn der Strich bezeichnet allemal die Ableitung nach t. In diesem Sinn ist der Ausdruck* $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ *für* $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ *völlig genau, denn es ist wirklich* $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dt}:\frac{dx}{dt}$, *weil bekanntlich* $\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dz}{dt}$ *ist. In so fern, dass*

die Lagrangischen Zeichen keine unrichtige Begriffe erzeugen, wie es die alten thun, haben dieselben vor diesen auch hier unstreitig den Vorzug, obgleich ihnen die Deutlichkeit und Bestimmtheit abgeht.]

283.

Nachdem wir die Mittel gezeigt haben, die Ableitungen nach mehreren veränderlichen Grössen zu entwickeln, wollen wir die Gleichungen untersuchen, in welchen dergleichen [*partielle*] Ableitungen vorkommen und die man Ableitungs-Gleichungen zwischen mehreren veränderlichen Grössen [*oder partielle Ableitungs-Gleichungen*] nennen kann.

Zwanzigste Vorlesung.

Ableitungs-Gleichungen zwischen mehreren veränderlichen Grössen. Theorie dieser Gleichungen. Allgemeine Methode, die Stammgleichungen von Ableitungs-Gleichungen zwischen mehreren veränderlichen Grössen erster Ordnung zu finden.

Ableitungs-Gleichungen mit zwei unabhängigen Elementen.

284.

Wir wollen zunächst irgend eine Ableitungs-Gleichung zwischen den drei veränderlichen Grössen x, y und z annehmen, in welcher z eine bestimmte Function von x und y ist.

Diese Gleichung werde durch

$$[u =] F(x, y, z) = 0$$

bezeichnet. Man setze einen Augenblick, x und y wären gegebene Functionen einer und derselben ver-

unabhängigen Elementen.

änderlich Grösse t, so ist auch z eine, von der gegebenen Gleichung abhängige Function von t, und vermöge der Theorie der Ableitungs-Gleichungen der vorigen Vorlesung, ist nicht allein $u = o$, sondern auch die Ableitungen von u nach t [*erster*, *zweiter*, *dritter etc. Ordnung*] sind einzeln gleich Null.

Nun ist

$$\frac{d(u)}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt};$$

also giebt die Gleichung $u = o$ auch folgende Gleichung

$$\frac{d(u)}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt} = o$$

[*wegen der veränderten Zeichen nicht wörtlich*]

Betrachtet man aber z als Function von x und y, so ist

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

Substituirt man Dieses $\left[in\ \frac{d(u)}{dt} = o \right]$, so erhält man

$$\left[\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}\right) = o,\right.$$

$\left. oder \right]$

$$\frac{d(u)}{dt} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dt} = o$$

[*Man findet, wie leicht zu sehen, das Nemliche auch unmittelbar, wenn man z als Function von x und y, und x und y als Functionen von t,*

Ableitungs-Gleichungen mit zwei

also z als mittelbare, x und y als unmittelbare Functionen von t betrachtet.]

Damit die Functionen x und y von t unbestimmt [*oder willkürlich*] bleiben, müssen ihre Ableitungen $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ aus der gefundenen Gleichung $\frac{d(u)}{dt} = 0$ wegfallen, welches nicht anders möglich ist, als wenn die beiden Gleichungen

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0$$

einzeln Statt findet. [*Nemlich die obige Gleichung* $\frac{d(u)}{dt}$ *findet Statt für jede beliebige Abhängigkeit der Grössen x und y von t, also auch dann, wenn x und y gar nicht von t abhängen, oder für den Fall, wenn* $\frac{dx}{dt}$ *und* $\frac{dy}{dt}$ *gleich Null sind. Wäre aber erst* $\frac{dx}{dt} = 0$, *so giebt die Gleichung* $\frac{d(u)}{dt} = 0$ *blos* $\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dt} = 0$, *oder* $\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0$. *Wäre* $\frac{dy}{dt}$ *gleich Null, so erhielte man* $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$, *welches die beiden obigen Gleichungen sind.*]

Es ist leicht zu sehen, dass die beiden gefundenen Gleichungen nichts anders sind, als die von $u = 0$, einzeln nach x und y abgeleiteten.

In der That müssen die von u, Theilweise nach x und y abgeleiteten Gleichungen, weil die Grössen

x und y in u von einander unabhängig seyn sollen, einzeln, jede für sich Statt finden. Nun ist die Grösse z, vermöge der gegebenen Gleichung $u = o$, eine Function von x und y, und $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ sind ihre Ableitungen nach x und y; also ist die Ableitung von u nach x gleich $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}$ und nach y gleich $\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}$, so dass die Stammgleichung $u = o$ die zwei von einander unabhängigen abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = o \text{ und } \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = o$$

hat, welche zur Bestimmung der Ableitungen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ dienen. Man erhält

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{du}{dx} : \frac{du}{dz} \text{ und } \frac{dz}{dy} = -\frac{du}{dy} : \frac{du}{dz}.$$

Aus diesen Ausdrücken der ersten [*theilweisen*] Ableitungen von z erhält man die zweiten Ableitungen $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, wenn man von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ von Neuem die Ableitungen nach x und y nimmt u. s. w.

285.

Hieraus folgt, dass, wenn die Stammgleichung

$$u = F(x, y, z) = o$$

gegeben ist, auch zugleich die beiden abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0$$

Statt finden, folglich auch alle Verbindungen, die sich zwischen diesen drei Gleichungen machen lassen und die dann die Stelle der Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung vertreten.

Jede Gleichung zwischen x, y, z und den beiden Ableitungen von z, nach x und y, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ ist also eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen drei veränderlichen Grössen [x, y, z], welche nothwendig eine Stammgleichung zwischen x, y und z haben muss.

286.

[*Beispiel.*] Es sey z. B. die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N$$

gegeben, wo M und N Constanten sind.

Die Stammgleichung dieser Gleichung ist

$$z - Nx = \varphi(y - Mx),$$

wo das Zeichen φ eine beliebige Function bedeutet.

Denn man nehme von dieser Stammgleichung die Ableitung nach x, so erhält man [*wenn man, der Kürze wegen,* $y - Mx = v$ *und* $\varphi(y - Mx) = \varphi$ *setzt*]

$$\frac{dz}{dx} - N = \left[\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} =\right] - M\frac{d\varphi}{dv}.$$

Nimmt

Allgem. Zurückleit. von Gleichung. u. s. w.

Nimmt man die Ableitung nach y, so erhält man

$$\frac{dz}{dy} = \left[\frac{d\varphi}{dv} \cdot \frac{dv}{dy} =\right] \frac{d\varphi}{dv}.$$

Eliminirt man die Grösse $\frac{d\varphi}{dv}$, so erhält man wieder die gegebene Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} - N = 0.$$

Allgemeine Zurückleitung von Gleichungen von der lineären Form $\frac{dz}{dx} + \varphi(x,y)\frac{dz}{dy} = \Psi(x,y)$.

287.

Man nehme die allgemeine Gleichung von der nemlichen Form, in welcher aber M und N beliebige Functionen von x, y, z [*also nicht mehr Constanten*] sind. [*Folglich die Gleichung*

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N,$$

wo aber jetzt M und N nicht Constanten, sondern beliebige Functionen von x und y sind.]

Man setze,

$$u = F(x, y, z) = 0$$

sey die Stammgleichung dieser Gleichung, so erhält man, dem Obigen [284.] zu Folge,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{du}{dx} : \frac{du}{dz}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{du}{dy} : \frac{du}{dz}.$$

Substituirt man solches in die gegebene Ableitungs-

Allgem. Zurückleit. von Gleichung. von der

Gleichung, multiplicirt das Ganze mit $\frac{du}{dz}$ und verwechselt die Zeichen, so erhält man

$$\left[-\frac{du}{dx}:\frac{du}{dz}-M\frac{du}{dy}:\frac{du}{dz}=N,\ oder\right]$$

$$\frac{du}{dx}+M\frac{du}{dy}+N\frac{du}{dz}=0.$$

Nun aber ist, wie wir sahen, allgemein

$$\frac{d(u)}{dt}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{t}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dt},$$

wo x, y, z als beliebige Functionen einer andern veränderlichen Grösse t betrachtet werden. Substituirt man in diesen Ausdruck, statt $\frac{du}{dx}$ den aus der vorigen Gleichung folgenden Werth dieser Grösse, nemlich $-M\frac{du}{dy}-N\frac{du}{dz}$, so erhält man

$$\left[\frac{d(u)}{dt}=-\frac{dx}{dt}\left(M\frac{du}{dy}+N\frac{du}{dz}\right)+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dt},\right.$$

$$\left.oder\right]$$

$$\frac{d(u)}{dt}=\frac{du}{dy}\left(\frac{dy}{dt}-M\frac{dx}{dt}\right)+\frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{dt}-N\frac{dx}{dt}\right).$$

Wie man sieht, ist dieser Ausdruck $\frac{d(u)}{dt}$ allgemein gleich Null, wenn man zwischen x, y, z eine Abhängigkeit von der Art voraussetzt, dass die beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dt}-M\frac{dx}{dt}=0 \text{ und } \frac{dz}{dt}-N\frac{dx}{dt}=0$$

einzeln Statt finden.

lineären Form $\frac{dz}{dx} + \varphi(x,y)\frac{dz}{dy} = \Psi(x,y)$.

Da diese Gleichungen die drei veränderlichen Grössen x, y und z enthalten, so kann man, vermittelst derselben, zwei Grössen durch die dritte ausdrücken. Substituirt man diesen Werth der zwei Grössen [*in die dritte, ausgedrückt*] in die gegebene Gleichung $u = F(x, y, z) = 0$, so ist u eine Function der dritten Grösse allein. Da nun die Ableitung von u gleich Null seyn soll, so folgt, dass die veränderliche Grösse [*aus* $u = 0$] von selbst wegfallen muss, [*denn wenn die Ableitung einer, von irgend einer veränderlichen Grösse abhängenden Grösse, wie u, Null seyn soll, so ist u, in Bezug auf die veränderliche Grösse, eine Constante und kann sie also gar nicht enthalten*]. Die Grösse u kann also nach der Substitution nur noch Constanten enthalten.

Nun aber müssen die Stammgleichungen der beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dt} - M\frac{dx}{dt} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dt} - N\frac{dx}{dt} = 0,$$

weil sie von der ersten Ordnung sind, zwei willkürliche Constanten enthalten, welche wir durch a und b bezeichnen wollen. Denn wenn man aus diesen beiden Gleichungen z. B. die Grösse z eliminiren wollte, so würde man auf eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung zwischen x und y kommen, in welcher man

$$\frac{dx}{dt} = 1, \text{ oder } \frac{dy}{dt} = 1$$

setzen kann, je nachdem man y als Function von x,

Allgem. Zurückleit. von Gleichung. von der

oder x als Function von y betrachtet; die Stammgleichung in x und y von dieser Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung aber muss nothwendig zwei willkürliche Constanten enthalten. [*Es sey z. B.* $x = t$, *so dass* x *die unabhängig veränderliche Grösse ist und folglich* y *und* z *Functionen von* t *sind, so sind die beiden Gleichungen* $\frac{dy}{dt} - M\frac{dx}{dt} = 0$ *und* $\frac{dz}{dt} - N\frac{dx}{dt} = 0$ *folgende:*

$$\frac{dy}{dx} - M = 0 \text{ und } \frac{dz}{dx} - N = 0.$$

Diese Gleichungen enthalten z *und* $\frac{dz}{dx}$, *denn* M *und* N *enthalten nach der Voraussetzung auch* z. *Man kann also* z *nicht anders eliminiren, als wenn man von den beiden Gleichungen von Neuem die Ableitungen nach* x *nimmt, weil zwei Gleichungen zur Elimination der zwei Grössen* z *und* $\frac{dz}{dx}$ *nicht hinreichen. Nimmt man nun von Neuem die Ableitungen nach* x, *so erhält man noch zwei Gleichungen, also überhaupt vier Gleichungen mit den drei zu eliminirenden Grössen,* z, $\frac{dz}{dx}$ *und* $\frac{d^2z}{dx^2}$, *die sich dann auch daraus wirklich wegschaffen lassen. Das Resultat der Elimination ist eine Gleichung zwischen* x *und* y *mit zwei willkürlichen Constanten, in welcher* y *als Function von* x *beteachtet wird.*]

linearen Form $\frac{dz}{dx} + \varphi(x, y) \frac{dz}{dy} = \Psi(x, y)$.

Hierauf erhält man nun auch den Werth von z, vermöge einer der beiden gegebenen [*Ableitungs-*] Gleichungen $\left[\frac{dy}{dx} - M = 0 \text{ und } \frac{dz}{dx} - N = 0\right]$ in x und y. Es folgt also, dass, wenn man die aus den beiden Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung [*auf die angezeigte Weise*] genommenen Werthe von y und z in x und u substituirt, diese Grösse nur noch die Constanten a und b, ausser denjenigen enthält, die etwa in M und N vorkommen, so dass u blos eine Function von a und b ist, die wir durch

$$[u =]\ \Phi(a, b) = 0$$

bezeichnen wollen.

Die Stammgleichung $u = 0$ reducirt sich also auf

$$[u =]\ \Phi(x, b) = 0,$$

woraus folgt, dass die eine der beiden Constanten a und b eine Function von der andern ist.

Nun aber kann man statt der beiden Constanten a und b, ihre, aus den beiden Stammgleichungen $\left[\text{von } \frac{dy}{dx} - M = 0 \text{ und } \frac{dz}{dx} - N\right]$ folgenden Werthe in x, y, z nehmen, weil sie in diesen Stammgleichungen als willkürliche Constanten vorkommen. Bezeichnet man diese Werthe von a und b durch P und Q, so ist die Stammgleichung der gegebenen Gleichung $\left[\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N\right]$ nunmehr

$$\Phi(a, b) = 0;$$

wo die, durch Φ bezeichnete Abhängigkeit willkür-

lich ist [*weil die Stammgleichung* $u = F(x, y, z) = 0$, *welche die Function* Φ *bestimmt, nicht im voraus gegeben, sondern blos angenommen war.*]

288.

Hieraus folgt ein ganz allgemeines Verfahren, die Stammgleichung einer beliebigen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen drei veränderlichen Grössen x, y, z zu finden, wenn die Ableitungen derjenigen Grösse, die als Function der beiden andern betrachtet wird, nur in einer Abmessung vorkommen, auf die Weise also, dass die gegebene Gleichung von der Form

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N$$

ist, wo M und N beliebige Functionen von x, y, z bedeuten können.

Man setze nemlich die beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dt} - M\frac{dx}{dt} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dt} - N\frac{dx}{dt} = 0,$$

in welchen man auch eine der drei Ableitungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ gleich Eins setzen kann, je nachdem man diese oder jene Grösse als das Element der übrigen, und die beiden andern als abhängig davon betrachten will. Hat man nun, wenn es anging, die beiden Stammgleichungen zu diesen Gleichungen gefunden, so nehme man daraus die Werthe P und Q der beiden Constanten a und b, die darin vorkommen müssen. Dann ist

$$\Phi(P, Q) = 0$$

die verlangte Stammgleichung, aus welcher

$$Q = \varphi P$$

folgt, wo φP irgend eine Function von P bedeutet.

Diese Auflösung ist einfacher und directer, als diejenige in der Theorie der Functionen, Art. 101. [1*ster Theil.*] Sie lässt sich mit gleicher Leichtigkeit auch auf Gleichungen zwischen noch mehreren veränderlichen Grössen anwenden. In den Berliner Mémoiren vom Jahre 1779 zeigte ich blos a posteriori die Allgemeinheit der Methode.

Zurückleitung lineärer Ableitungs-Gleichungen zwischen vier veränderlichen Grössen.

289.

Wir wollen eine ähnliche Gleichung zwischen vier veränderlichen Grössen, von der Form

$$\frac{dz}{dt} + L\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N$$

nehmen, wo L, M, N beliebige Functionen von [*den vier veränderlichen Grössen*] t, x, y, z seyn können.

Bezeichnet man die [*gesuchte*] Stammgleichung dieser Ableitungs-Gleichung durch

$$[u =] \; F(t, x, y, z) = 0,$$

so ist im Allgemeinen die Ableitung derselben

$$\frac{d(u)}{d\eta} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{d\eta} + \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\eta} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\eta} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{d\eta} = 0$$

Zurückleit. lineärer Ableitungs-Gleichung.

[*wenn* η *das Element bedeutet, von welchem alle vier Grössen* t, x, y, z *abhängend angenommen werden*]. Man erhält für jede der drei Grössen t, x, y besonders, eine Ableitungs-Gleichung, welches die drei Gleichungen

$$\frac{du}{dt} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0$$

giebt. [*Diese Gleichungen finden sich auch unmittelbar; denn vermöge der gegebenen Ableitungs-Gleichung hängt nothwendig eine der vier Grössen von den drei übrigen ab, die dann unter einander unabhängig sind. Ist also z. B.* z *die von den drei übrigen Grössen* t, x, y *abhängende Grösse, so müssen die Ableitungen von* u, *nach* t, *nach* x *und nach* y *genommen, einzeln gleich Null seyn; welches die drei Gleichungen giebt.*]

Nimmt man aus diesen Gleichungen die Werthe von $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ [*nemlich* $\frac{dz}{dt} = -\frac{du}{dt} : \frac{dy}{dz}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{du}{dx} : \frac{du}{dz}$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{du}{dy} : \frac{du}{dz}$] und setzt sie in die gegebene Gleichung, so erhält man

$$\left[-\frac{du}{dt} : \frac{du}{dz} - L\frac{du}{dx} : \frac{du}{dz} - M\frac{du}{dy} : \frac{du}{dz} = N \text{ und}\right]$$

nachdem mit $\frac{du}{dz}$ multiplicirt und die Zeichen verwechselt worden,

zwischen vier veränderlichen Grössen.

$$\frac{du}{dt} + L\frac{du}{dx} + M\frac{du}{dy} + N\frac{du}{dz} = 0,$$

woraus

$$\frac{du}{dt} = -L\frac{du}{dx} - M\frac{du}{dy} - N\frac{du}{dz}$$

folgt. Setzt man diesen Werth von $\frac{du}{dt}$ in die Ableitung von u $\left[\frac{d(u)}{d\eta} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{d\eta} + \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\eta} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\eta} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{d\eta} = 0\right]$, so erhält man

$$\left[\frac{d(u)}{d\eta} = -\frac{dt}{d\eta}\left(L\frac{du}{dx} + M\frac{du}{dy} + N\frac{du}{dz}\right) + \frac{dx}{d\eta}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{d\eta}\frac{du}{dy} + \frac{dz}{d\eta}\frac{du}{dz},\ \textit{oder}\right]$$

$$\frac{d(u)}{d\eta} = \frac{du}{dx}\left(\frac{dx}{d\eta} - L\frac{dt}{d\eta}\right) + \frac{du}{dy}\left(\frac{dy}{d\eta} - M\frac{dt}{d\eta}\right) + \frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{d\eta} - N\frac{dt}{d\eta}\right).$$

Nimmt man also zwischen den vier veränderlichen Grössen t, x, y, z eine Abhängigkeit von der Art an, dass die drei Gleichungen

$$\frac{dx}{d\eta} - L\frac{dt}{d\eta} = 0$$

$$\frac{dy}{d\eta} - M\frac{dt}{d\eta} = 0$$

$$\frac{dz}{d\eta} - N\frac{dt}{d\eta} = 0$$

Statt finden, so ist $\frac{d(u)}{d\eta}$ [*wie es seyn soll*] gleich Null und folglich kann alsdann die Stammgrösse u

Zurückleit. lineär. Ableit.-Gleichung. u. s. w.

nur Constanten enthalten. [*Denn vermöge der angenommenen Bedingungs-Gleichungen lassen sich drei von den vier Grössen in die vierte ausdrükken, also lässt sich der Ausdruck von u auf eine Function einer einzigen veränderlichen Grösse bringen. Ein solcher Ausdruck kann aber die eine veränderliche Grösse gar nicht enthalten, wenn seine Ableitung, wie hier, Null seyn soll, weil nur die Ableitung einer Constante Null ist, also kann u nur Constanten enthalten.*]

Nun sind die obigen drei Gleichungen von der ersten Ordnung. Ihre drei Stammgleichungen müssen also drei Constanten enthalten. Durch diese Stammgleichungen können aber drei von den vier Grössen t, x, y, z durch die vierte ausgedrückt werden. Substituirt man also in $u = F(t, x, y, z)$ die Werthe der drei veränderlichen Grössen [*in die vierte ausgedrückt*], so muss die vierte veränderliche Grösse [*wie vorhin bemerkt*] von selbst verschwinden und u kann also nur noch die Constanten a, b, c enthalten, nächst den übrigen Constanten, die etwa in den Ausdrücken L, M, N vorkommen. Nach der Substitution muss also die Grösse $u = F(t, x, y, z)$ nothwendig die Form

$$\Phi(a, b, c)$$

annehmen.

Da nun die drei Stammgleichungen die Werthe von a, b, c in t, x, y, z geben, so kann man diese Gleichungen, wenn man die Werthe von a, b, c durch P, Q, R bezeichnet, auf die Form

$$a = P,\ b = Q,\ c = R$$

bringen.

Die Function $u = F(t, x, y, z)$ muss also nothwendig von der Form $\Phi(P, Q, R)$ seyn, weil nur dieser Ausdruck den drei Gleichungen $P = a$, $Q = b$, $R = c$ entspricht. Also ist die Stammgleichung $u = 0$ nunmehr

$$\Phi(P, Q, R) = 0,$$

woraus

$$R = \varphi(P, Q)$$

folgt, wo φ irgend eine Function von P und Q bezeichnet.

Uebersicht des vorigen.

290.

I. Die Ableitungs-Gleichung zwischen drei veränderlichen Grössen

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N$$

hängt also von den zwei Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung, zwischen den nemlichen veränderlichen Grössen,

$$\frac{dy}{dt} - M\frac{dx}{dt} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dt} - N\frac{dx}{dt} = 0$$

ab, und wenn die Stammgleichungen von diesen durch

$$P = a \text{ und } Q = b$$

bezeichnet werden, wo a und b willkürliche Constanten bedeuten, so ist die Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung:

Uebersicht des

$$Q = \varphi P,$$

wo φP irgend eine Function von P bedeutet.

II. Die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen vier veränderlichen Grössen

$$\frac{dz}{dt} + L\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N$$

hängt von den drei Gleichungen zwischen den nemlichen Grössen

$$\frac{dx}{d\eta} - L\frac{dt}{d\eta} = o, \frac{dy}{d\eta} - M\frac{dt}{d\eta} = o, \frac{dz}{d\eta} - N\frac{dt}{d\eta} = o$$

ab, und wenn

$$P = a, \ Q = b, \ R = c$$

die Stammgleichungen von diesen drei Gleichungen mit den willkürlichen Constanten a, b, c sind, so ist die Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung

$$R = \varphi(P, Q),$$

wo $\varphi(P, Q)$ irgend eine Function von P und Q bedeutet u. s. w.

291.

Auf diese Weise lässt sich die Aufgabe, die Stammgleichungen zu gegebenen Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung zu finden, in welchen eine der veränderlichen Grössen eine Function der zwei oder mehreren übrigen ist, auf die Aufgabe bringen, die Stammgleichungen von Ableitungs-Gleichungen der nemlichen Ordnung, wie die gegebene, zu finden, wenn darin alle veränderliche Grössen Functio-

nen einer einzigen unter ihnen sind. Und in der Analysis betrachtet man [*mit Recht*] die Auflösung einer Aufgabe als geschehen, wenn die Aufgabe auf eine weniger verwickelte auflösbare Aufgabe reducirt ist, obgleich die Auflösung der letztern noch grosse Schwierigkeiten haben kann.

292.

[*Beispiel.*] Um ein einfaches Beispiel zu geben, wollen wir die Grössen L, M, N constant annehmen. In diesem Falle sind:

I. die Stammgleichungen von den beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dt} - M\frac{dx}{dt} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dt} - N\frac{dx}{dt} = 0$$

folgende:

$$y - Mx = a \text{ und } z - Nx = b;$$

also hat die [*gegebene Ableitungs*-] Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N$$

[*weil* $b = \varphi a$ *allgemein die Stammgleichung ist*, 290. *I.*] folgende Stammgleichung:

$$z - Nx = \varphi(y - Mx),$$

wie wir schon weiter oben sahen. [286.]

II. Die drei Gleichungen

$$\frac{dx}{d\eta} - L\frac{dt}{d\eta} = 0,\ \frac{dy}{d\eta} - M\frac{dt}{d\eta} = 0,\ \frac{dz}{d\eta} - N\frac{dt}{d\eta} = 0,$$

haben die Stammgleichungen

$$x - Lt = a,\ y - Mt = b,\ z - Nt = c;$$

Uebersicht des

also hat die [*gegebene Ableitungs-*] Gleichung

$$\frac{dz}{dt} + L\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N,$$

[*weil allgemein* $c = \varphi(a, b)$ *die Stammgleichung ist* (290. *II.*)] die Stammgleichung

$$z - Nt = \varphi(x - Lt, y - Mt).$$

293.

Es ist zu bemerken, dass die Gleichungen

$$P = a, \; Q = b, \; R = c \text{ etc.}$$

in welchen a, b, c willkürliche Constanten sind, jede eine besondere Auflösung der gegebenen Ableitungs-Gleichung enthalten, welches unmittelbar aus der Form der allgemeinen Auflösung

$$\Phi(P, Q) = 0, \text{ oder } \Phi(P, Q, R) = 0$$

folgt. Denn da die durch Φ bezeichnete Abhängigkeits-Form willkürlich ist, so kann man diese Gleichungen immer so verwandeln, dass sie

$$P - a = 0, \; Q - b = 0, \; R - c = 0 \text{ etc.}$$

geben.

Auch ist leicht zu sehen, dass die Gleichung

$$z - Nx = b \; [292. \; I.]$$

der gegebenen Ableitungs-Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = M$$

entspricht; denn sie giebt

$$z = Nx + b,$$

und daraus folgt

$$\frac{dz}{dx} = N \text{ und } \frac{dz}{dy} = 0.$$

vorigen.

Nähme man die andere Gleichung

$$y - Mx = a \quad [292.\ I.],$$

so wäre nicht sogleich zu sehen, wie sie der gegebenen Gleichung genugthun kann, weil z gar nicht darin vorkommt. Da diese Gleichung nur ein Verhältniss zwischen x und y bestimmt, vermöge dessen x Function von y und y Function von x ist, so muss man die gegebene Ableitungs-Gleichung so verwandeln, dass sie, statt Ableitungen von z nach x und y, Ableitungen von x nach y und z, oder von y nach x und z enthält, welches durch die oben angezeigte Substitution angeht.

Wir wollen diese Verwandlung als Beispiel ähnlicher Fälle hier hersetzen.

Man muss nemlich $1 : \frac{dx}{dz}$ statt $\frac{dz}{dx}$ und $-\frac{dx}{dy} : \frac{dx}{dz}$ statt $\frac{dz}{dy}$ setzen. [*Bisher wär z Function von x und y; jetzt soll x Function von y und z seyn. Zunächst ist* $\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = 1$, *woraus* $\frac{dz}{dx} = 1 : \frac{dx}{dz}$ *folgt. Ferner wäre allgemein, wenn x, y, z sämmtlich Functionen irgend einrr vierten Grösse η wären, die Ableitung der von y und z abhängigeu Grösse x,*

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\eta} + \frac{dx}{dz}\frac{dz}{d\eta}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{dz}{d\eta} : \frac{dy}{d\eta} = \frac{dx}{d\eta} : \left(\frac{dy}{d\eta} \cdot \frac{dx}{dz}\right) - \frac{dx}{dy} : \frac{dx}{dz}.$$

Es ist aber

Uebersicht des vorigen.

$$\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{d\eta}=\frac{dz}{d\eta}, \text{ also } \frac{dz}{d\eta}:\frac{dy}{d\eta}=\frac{dz}{dy};$$

mithin ist allgemein

$$\frac{dz}{dy}=\frac{dx}{d\eta}:\left(\frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{dx}{dz}\right)-\frac{dx}{dy}:\frac{dx}{dz}.$$

Nun aber kommt bei der Grösse $\frac{dz}{dy}$, *das heisst, bei der Ableitung von z nach y, die Veränderung von x gar nicht in Betracht, weil x von y unabhängig ist. Also ist* $\frac{dx}{dy}=0$ *und folglich blos*

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{dx}{dy}:\frac{dx}{dz}.$$

Man muss also, wie es im Text heisst, wenn vorher z eine Function von x und y war, und fortan x eine Function von y und z seyn soll,

$$1:\frac{dx}{dz} \text{ statt } \frac{dz}{dx} \text{ und } -\frac{dx}{dy}:\frac{dx}{dz} \text{ statt } \frac{dz}{dy}$$

setzen.] Dieses giebt [*auf die Gleichung* $\frac{dz}{dx}+M\frac{dz}{dy}-N=0$ (286.) *angewandt*, $1:\frac{dx}{dz}-M\frac{dx}{dy}:\frac{dx}{dz}=N$ *und*], wenn man alle Glieder mit $\frac{dx}{dz}$ multiplicirt,

$$1-M\frac{dx}{dy}=N\frac{dx}{dz},$$

wo nunmehr x eine Function von y und z ist.

Nun giebt die obige Gleichung $y-Mx=a$ [292. *I.*]

$x =$

$$x = \frac{y+a}{M},$$

woraus

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{M} \text{ und } \frac{dx}{dz} = 0$$

folgt, welche Ausdrücke ebenfalls der obigen Gleichung genugthun.

Allgemeiner Satz von den willkürlichen Functionen in den Stammgleichungen.

294.

Wir sahen an den obigen Beispielen, dass eine Stammgleichung mit drei veränderlichen Grössen eine willkürliche Function von einer, aus diesen veränderlichen Grössen zusammengesetzten Grösse, eine Stammgleichung mit vier Grössen eine willkürliche Function zweier, aus den veränderlichen Grössen zusammengesetzten Grössen enthält.

Wir wollen jetzt zeigen, dass dieser Satz allgemein ist, von welcher Gestalt auch die gegebene Ableitungs-Gleichung erster Ordnung seyn mag.

Wendet man nemlich die Theorie der Ableitungs-Gleichungen mit zwei veränderlichen Grössen, aus der zwölften Vorlesung, auf Ableitungen mit drei veränderlichen Grössen an, so ist leicht zu sehen, dass man, weil eine Gleichung mit drei veränderlichen Grössen zwei Abgeleitete hat, zwischen den alsdann Statt findenden drei Gleichungen, nach Belieben zwei Constanten wegschaffen und also eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung finden kann, welche

Allgemeiner Satz von den willkürlichen

zwei Constanten weniger enthält, als die Stammgleichung.

Daraus folgt umgekehrt, dass die Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwei Constanten mehr enthalten muss, als die gegebene Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, welche Constanten nothwendigerweise willkürlich sind.

Die Stammgleichung sey z. B. folgende Gleichung mit drei veränderlichen Grössen:

$$z = ax + by,$$

wo z als Function von x und y betrachtet wird, so erhält man, wenn man die beiden Abgeleiteten davon, nach x und y nimmt,

$$\frac{dz}{dx} = a \text{ und } \frac{dz}{dy} = b.$$

Schafft man zwischen diesen drei Gleichungen die Constanten a und b weg, so erhält man die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy},$$

welche also die Stammgleichung

$$z = ax + by$$

mit den beiden willkürlichen Constanten a und b hat.

295.

Es verhält sich aber hier nicht eben so, wie bei den Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, wo man, sobald man eine Stammgleichung mit einer willkürlichen Constante fand, versichert ist, dass

sie die volle Allgemeinheit hat, welcher die gegebene Ableitungs-Gleichung fähig ist. Man kann hier vielmehr durch die Elimination zweier Constanten zwischen der Stammgleichung und ihren Abgeleiteten unendlich viele Stammgleichungen zwischen drei veränderlichen Grössen finden, die alle der nemlichen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung genugthun.

Zum Beispiel, die Gleichung

$$z = ay + \frac{bx^2}{y}$$

hat die beiden Abgeleiteten

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2bx}{y} \text{ und } \frac{dz}{dy} = a - \frac{bx^2}{y^2}.$$

Schafft man zwischen diesen drei Gleichungen die beiden Consianten a und b weg, so erhält man [*wegen* $b = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{y}{2x}$ *und* $a = \frac{dz}{dy} + b\frac{x^2}{y^2} = \frac{dz}{dy} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{2y}$, $z = y\left(\frac{dz}{dy} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{2y}\right) + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{y}{2x} \cdot \frac{x^2}{y}$, *oder* $z = y\frac{dz}{dy} + \frac{1}{2}x\frac{dz}{dz} + \frac{1}{2}x\frac{dz}{dx}$, *oder*]

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy},$$

welches die nemliche Gleichung ist, wie oben [29?].

Man kann auf diese Weise so viele Stammgleichungen als man will, finden, welche alle die nemliche Ableitungs-Gleichung haben. Hat man indessen erst eine Stammgleichung mit zwei willkürlichen Constanten gefunden, so lässt sich daraus weiter der allgemeine Ausdruck aller übrigen, durch ein Verfah-

ren finden, welches demjenigen in der funfzehnten Vorlesung bei den singulairen Stammgleichungen ähnlich ist.

296.

Man nehme z. B. die Stammgleichung zwischen drei veränderlichen Grössen

$$[u =] \, F(x, y, z, a, b) = 0$$

an, welche zwei Constanten a und b enthält, die vermittelst der abgeleiteten Gleichungen weggeschafft werden sollen, so ist klar, dass das Resultat der Elimination das Nemliche bleibt, die Grössen a und b mögen constant, oder veränderlich seyn, wenn nur die Ableitungen in beiden Fällen die nemlichen sind, und Dieses geschieht, wenn die von der Veränderung von a und b herkommenden Glieder, im Fall man a und b als veränderlich betrachtet, für sich allein Null sind.

Sind nun a und b constant, so giebt die Gleichung $u = 0$, wie wir oben sahen, folgende zwei, nach x und y abgeleitete Gleichungen:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

Betrachtet man dagegen a und b als Functionen von x und y, so sind die Ableitungen:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{du}{da}\cdot\frac{da}{dx} + \frac{du}{db}\cdot\frac{db}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}.\frac{dz}{dy} + \frac{du}{da}.\frac{da}{dy} + \frac{du}{db}.\frac{db}{dy} = o,$$

und es ist klar, dass sie in die vorigen übergehen, wenn man *a* und *b* so annimmt, dass

$$\frac{du}{da}\frac{da}{dx} + \frac{du}{db}\frac{db}{dx} = o \text{ und}$$

$$\frac{du}{da}\frac{da}{dy} + \frac{du}{db}\frac{db}{dy} = o$$

ist.

297.

Es ist leicht zu sehen, dass man diesen Gleichungen genugthun kann, wenn man

$$\frac{du}{da} = o \text{ und } \frac{du}{db} = o$$

setzt, welches zwei Gleichungen giebt, aus welchen sich *a* und *b* in *x*, *y* und *z* finden lassen.

Diese Auflösung ist derjenigen ähnlich, durch welche man die singulaire Stammgleichung bei zwei veränderlichen Grössen findet; wie wir Solches in der funfzehnten Vorlesung sahen.

Man kann also auch die Gleichung

$$u = F(x, y, z, a, b) = o,$$

in welcher statt *a* und *b* die aus den Gleichungen

$$\frac{du}{da} = o \text{ und } \frac{du}{db} = o$$

genommenen Werthe von *a* und *b* substituirt werden, singulaire Stammgleichung nennen.

Es giebt aber noch eine allgemeinere Art, die nemlichen Bedingungen zu erfüllen.

298.

Man setze nemlich b sey eine Function von a, die durch φa bezeichnet werden mag, so ist $\frac{db}{dx} = \frac{db}{da} \cdot \frac{da}{dx}$ und $\frac{db}{dy} = \frac{db}{da} \cdot \frac{da}{dy}$. Substituirt man Dieses in die obigen Bedingungs-Gleichungen [296.], so erhält man

$$\left(\frac{du}{da} + \frac{du}{db}\frac{db}{da}\right)\frac{da}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\left(\frac{du}{da} + \frac{du}{db}\frac{db}{da}\right)\frac{da}{dy} = 0,$$

welchen beiden Gleichungen durch die einzige Gleichung

$$\frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0$$

genug gethan wird. Diese eine Gleichung dient zur Bestimmung von a und die Function $b = \varphi a$ bleibt willkürlich.

In der That erhält man, wenn man in die Gleichung $u = F(x, y, z, a, b) = 0$, $b = \varphi a$ setzt,

$$u = F(x, y, z, a, \varphi a) = 0,$$

und es ist leicht zu sehen, dass, wenn

$$\frac{du}{da} = 0$$

ist, die Ableitungen von u nach x und y die nemlichen bleiben, a mag constant seyn, oder veränderlich [*denn wenn a constant ist, so sind die beiden, nach x und y abgeleiteten Gleichungen:*

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = o \text{ und } \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = o.$$

Ist a veränderlich, so kommt noch zur ersten das Glied $\frac{du}{da}\frac{da}{dx}$, *zur zweiten das Glied* $\frac{du}{da}\frac{da}{dy}$ *hinzu. Diese beiden Glieder sind für* $\frac{du}{da} = o$, *Null, also bleiben die abgeleiteten Gleichungen, wenn man* $\frac{du}{da} = o$ *setzt, die nemlichen, a mag constant, oder veränderlich seyn*]. Die durch die Elimination von a und φa zwischen $u = o$ und $\frac{du}{da} = o$ entstehende Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist also auch die nemliche.

Uebrigens ist leicht zu sehen, dass die Gleichung

$$\frac{du}{da} = o$$

nichts anders ist, als die obige $\frac{du}{da} + \frac{du}{db}\frac{db}{da} = o$, wo $b = \varphi a$ ist.

Auf diese Weise erhält man also auch eine Art singulairer Stammgleichungen, die aber allgemeiner sind, als die gegebene Stammgleichung, weil sie eine willkürliche Function enthalten.

Vollständige, allgemeine und singulaire Stammgleichungen.

299.

Wenn man also eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen drei veränderlichen Grössen, wie

Vollständige, allgemeine und

$$[v=]\,f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

hat, so kann man setzen, ihre Stammgleichung sey

$$[u=]\ F(x, y, z, a, b) = 0,$$

wo a und b zwei willkürliche Constanten bedeuten.

Wir wollen diese Gleichung $[u=0]$ vollständige Stammgleichung nennen, wegen der darin vorkommenden zwei Constanten a und b, die nur vermittelst der beiden abgeleiteten Gleichungen weggeschafft werden können. Fielen die Constanten schon durch eine abgeleitete Gleichung, beide von selbst weg, so wären sie nur so viel als eine einzelne Constante und die Stammgleichung wäre nicht vollständig.

Sobald man eine vollständige Stammgleichung gefunden hat, kann man von ihr zu einer andern noch allgemeinern gelangen, die eine willkürliche Function enthält. Man darf zu dem Ende nur

$$b = \varphi a$$

setzen und a aus der Bedingungs-Gleichung

$$\frac{du}{da} = \frac{dF(a, \varphi a)}{da} = 0$$

bestimmen. Wir wollen diese allgemeine Gleichung, um sie von der vorigen zu unterscheiden, allgemeine Stammgleichung nennen.

Endlich giebt die nemliche vollständige Stammgleichung auch noch eine singulaire Stammgleichung, wenn man a und b, vermittelst der beiden Bedingungs-Gleichungen

singulaire Stammgleichungen.

$$\frac{du}{da} = 0 \text{ und } \frac{du}{db} = 0,$$

in x, y und z ausdrückt.

300.

[*Beispiel.*] Wir fanden z. B. oben, dass die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy}$$

die vollständige Stammgleichung

$$z = ax + by$$

hat. Um daraus die allgemeine Stammgleichung zu finden, setze man

$$b = \varphi a$$

und nehme die Ableitungen nach a allein, so erhält man die beiden Gleichungen

$$z = ax + by \text{ und } 0 = a + y\frac{db}{da},$$

zwischen welchen a eliminirt werden muss. Da die Function $\varphi a = b$ willkürlich ist, so kann man ihr verschiedene [*beliebige*] Formen geben und daraus, so viele als man will, verschiedene vollständige Stammgleichungen mit zwei willkürlichen Constanten finden.

Wäre z. B.

$$b = \varphi a = A - \frac{a^2}{4B},$$

so wären die beiden obigen Gleichungen:

$$z = ax + y\left(A - \frac{a^2}{4B}\right) \text{ und } x - y\frac{a}{2B} = 0.$$

Die vollständige Stammgleichung ist

Die zweite giebt $\dot{a} = \frac{2Bx}{y}$. Substituirt man Solches in die erste, so erhält man

$$\left[z = \frac{2Bx^2}{y} + Ay - \frac{4B^2x^2}{y^2} \cdot \frac{y}{4B}, \text{ oder} \right.$$

$$\left. z = 2B\frac{x^2}{y} + Ay - \frac{Ax^2}{y}, \text{ oder} \right]$$

$$z = Ay + \frac{Bx^2}{y},$$

welches die andere Form der Stammgleichung ist, die wir oben fanden. [295.]

Die vollständige Stammgleichung ist nie in der allgemeinen enthalten.

301.

Man könnte auf diese Weise noch so viele andere vollständige Stammgleichungen finden, als man will; aber es ist merkwürdig, dass die anfängliche vollständige Stammgleichung, aus welcher die allgemeine Stammgleichung gefunden wird, niemals in dieser enthalten ist.

So z. B. ist es unmöglich, der Function $b = \varphi a$ einen solchen Werth zu geben, dass die beiden Gleichungen

$$z = ax + by \text{ und } x + y\frac{db}{da} = 0$$

die [*anfängliche*] Gleichung

$$z = Ax + By$$

nie in der allgemeinen enthalten.

mit den beiden willkürlichen Constanten A und B geben.

Denn, angenommen es sey möglich, so müsste, wenn man in die erste den Werth von z substituirt den beiden Gleichungen

$$Ax + By = ax + by \text{ und } x + \frac{db}{da} y = 0$$

genuggethan werden. Die zweite von diesen beiden Gleichungen giebt $x = -y\frac{db}{da}$. Substituirt man Solches in die erste, so ist sie durch y theilbar und giebt $\left[-Ay\frac{dy}{da} + By = -ay\frac{dy}{da} + by, \textit{ oder}\right]$

$$B - A\frac{db}{da} = b - a\frac{db}{da},$$

woraus

$$\frac{db}{da} = \frac{b - B}{a - A}$$

folgt. Dividirt man mit $b - B$, so erhält man

$$\frac{db}{da} : (b - B) = \frac{1}{a - A},$$

in welcher Gleichung beide Glieder vollständige Ableitungen sind. Die Stammgrösse vom ersten Gliede ist $\overset{e}{log}(b - B)$, die Stammgrösse vom zweiten, $\overset{e}{log}(a - A)$. Nimmt man also diese Stammgrössen und fügt eine willkürliche Constante wie $\overset{e}{log}\, k$ hinzu, so erhält man

$$\overset{e}{log}(b - B) = \overset{e}{log}(a - A) + \overset{e}{log}\, k,$$

woraus

Die vollständige Stammgleich. u. s. w.

$$b - B = k(a - A), \text{ oder}$$
$$b = B + k(a - A)$$

folgt. Dieses also wäre die nothwendige Form von b. Sie giebt

$$\frac{db}{da} = k.$$

Substituirt man Dieses in die beiden obigen Gleichungen [*nemlich* $b = B + k(a - A)$ *und* $\frac{db}{da} = k$ *in die Gleichungen* $Ax + By = ax + by$ *und* $x + y\frac{db}{da} = 0$], so erhält man [$Ax + By = ax + (B + k(a - A))y$, *oder*]

$$(a - A)(x + ky) = 0 \text{ und } x + ky = 0,$$

welcher Gleichung nur durch

$$x + ky = 0$$

genug gethan werden kann, woraus [*für die Werthe von* A *und* B] Nichts folgt. [*Der Grund hiervon liegt, wie es scheint, darin, dass die allgemeine Stammgleichung eigentlich nur eine, die vollständige Stammgleichung dagegen nothwendig zwei Constanten enthält, die nicht auf eine gebracht werden können, ohne dass die Gleichung aufhörte, volltändig zu seyn. Deshalb kann die allgemeine Stammgleichung nicht auf die vollständige gebracht werden, oder umfasst mit allen ihren unzähligen Formen diese nicht.*]

Die Stammgleichung mit einer willkürlichen Function, bei drei veränderlichen Grössen, ist nicht die allgemeinste.

302.

Bis jetzt glaubte man, dass jede Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung zwischen drei veränderlichen Grössen mit einer willkürlichen Function so allgemein sey, wie die Gleichung, welcher sie entspricht. Das vorige Beispiel widerlegt Dieses, und wir werden weiter unten das Nemliche allgemein und direct beweisen.

Man kann indessen, in dem obigen Falle, der Stammgleichung noch eine einfachere und allgemeinere Gestalt geben.

Denn nimmt man die beiden Gleichungen

$$z = ax + by \text{ und } x + y\frac{dy}{da} = 0,$$

so sieht man, dass die zweite,

$$\frac{db}{da} = -\frac{x}{y}$$

giebt, woraus folgt, dass a eine Function von $\frac{x}{y}$ ist.

Man setze also

$$a = \Psi\left(\frac{x}{y}\right),$$

so ist

$$b = \varphi a = \varphi\Psi\left(\frac{x}{y}\right) = \Phi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Nun muss zwischen den Functionen $a = \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ und $b = \Phi\left(\frac{x}{y}\right)$ eine Abhängigkeit Statt finden, die von

Die Stammgleichung mit einer Function

der Gleichung

$$\frac{db}{da} = -\frac{x}{y}$$

bestimmt wird.

Denn betrachtet man a als veränderlich und nimmt die Ableitungen nach $\frac{x}{y}$, so geben die Gleichungen $a = \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ und $\varphi a = b = \Phi\left(\frac{x}{y}\right)$,

$$\frac{da}{d\frac{x}{y}} = \frac{d\Psi\left(\frac{x}{y}\right)}{d\frac{x}{y}} \text{ und } \frac{db}{da} \cdot \frac{da}{d\frac{x}{y}} = \frac{d\Phi\left(\frac{x}{y}\right)}{d\frac{x}{y}}.$$

Substituirt man in die zweite, für $\frac{da}{d\frac{x}{y}}$ und $\frac{db}{da}$ ihre Werthe $\left[\frac{d\Psi\frac{x}{y}}{d\frac{x}{y}} \textit{ und } -\frac{x}{y}\right]$, so erhält man die Bedingungs-Gleichung $\left[-\frac{x}{y}\frac{d\Psi\frac{x}{y}}{d\frac{x}{y}} = \frac{d\Phi\frac{x}{y}}{d\frac{x}{y}},\right.$ *oder*$\left.\right]$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{d\Psi\frac{x}{y}}{d\frac{x}{y}} + \frac{d\Phi\frac{x}{y}}{d\frac{x}{y}} = 0.$$

Nun aber giebt die erste der beiden obigen Gleichungen [$z = ax + by$ *(aus der andern hatte man* $\frac{db}{da} = -\frac{x}{y}$ *genommen)*], wenn man die Werthe

ist nicht die allgemeinste.

von a und φa [*nemlich* $\Psi\frac{x}{y}$ und $\Phi\frac{x}{y}$] substituirt,

$$z = x\Psi\frac{x}{y} + y\Phi\frac{x}{y}.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$z = x\left(\Psi\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Phi\frac{x}{y}\right),$$

so ist leicht zu sehen, dass sie sich auf

$$z = x\zeta\frac{y}{x}$$

reducirt [*wo* ζ *ein Functions-Zeichen ist. Denn die ganze Grösse* $\Psi\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Phi\frac{x}{y}$, *in* $z = x\left(\Psi\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Phi\frac{x}{y}\right)$, *ist nur eine Function von* $\frac{x}{y}$ *oder* $\frac{y}{x}$ *und man könnte für* $\frac{y}{x}$ *einen einzelnen Buchstaben setzen.*]

Die Function $\zeta\frac{y}{x}$ bleibt völlig unbestimmt, weil die beiden Functionen $\Psi\frac{x}{y}$ und $\frac{y}{x}\Phi\frac{x}{y}$ nur eine einzige Function von $\frac{y}{x}$ ausmachen, so dass die [*vermöge der Bedingungs-Gleichung* $\frac{x}{y}\cdot\frac{d\Psi\frac{x}{y}}{d\frac{x}{y}} + \frac{d\Phi\frac{x}{y}}{d\frac{x}{y}} = 0$] gefundene Abhängigkeit zwischen diesen Functionen hier unnütz ist.

303.

Diese letzte Auflösung ist genau diejenige, welche man direct durch die, oben für Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung von der Form

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} = N$$

angegebene allgemeine Methode findet. Denn dividirt man die gegenwärtige Gleichung $z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy}$ durch x und vergleicht sie mit der allgemeinen, so ist

$$M = \frac{y}{x}, \; N = \frac{z}{x};$$

also geben die beiden theilweisen Ableitungs-Gleichungen

$$\frac{dy}{dt} - M\frac{dx}{dt} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dt} - N\frac{dx}{dt} = 0 \; [292.]$$

hier

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{x}\cdot\frac{dx}{dt} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dt} - \frac{z}{x}\cdot\frac{dx}{dt} = 0.$$

Die beiden Gleichungen sind, wenn man sie durch x dividirt, vollständige Ableitungs-Gleichungen [*nemlich* $\frac{dy}{dt} : x - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt} = 0$ *und* $\frac{dz}{dt} : x - \frac{z}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt} = 0$] und haben

$$\frac{y}{x} = a \text{ und } \frac{z}{x} = b$$

zu Stammgleichungen [*wie man sich leicht überzeugt, wenn man von diesen Stammgleichungen wiederum*

wiederum die Ableitungen nimmt.] Man erhält also [*nach* 292.]

$$P = \frac{y}{x} \text{ und } Q = \frac{z}{x},$$

woraus [*vermöge* $Q = \varphi P$ (288.)] die Stammgleichung

$$\frac{z}{x} = \varphi \frac{y}{x}$$

folgt, welches mit dem übereinkommt, was wir oben [*in* 302.] fanden. [*Denn es war daselbst* $z = x \zeta \frac{y}{x}$ *oder* $\frac{z}{x} = \zeta \frac{y}{x}$.]

Man sieht auch, dass dieser Ausdruck auch die vollständige Stammgleichung

$$z = ax + by$$

mit umfasst, denn man darf nur $\varphi \frac{y}{x} = a + b \frac{y}{x}$ setzen [*so erhält man* $\frac{z}{x} = a + b \frac{y}{x}$, *oder* $z = ax + by$, *welches die vollständige Stammgleichung ist.*]

Beispiel einer allgemeinen, vollständigen und singulairen Stammgleichung.

304.

Wäre die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$z = x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} + f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)$$

gegeben, wo f die gegebene Form irgend einer, aus

den beiden Ableitungen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ zusammengesetzten Grösse bezeichnet, so findet man leicht die vollständige Stammgleichung mit zwei willkürlichen Constanten a und b, nemlich

$$z = ax + by + f(a, b).$$

Denn nimmt man von dieser Gleichung die beiden Ableitungen nach x und y, so erhält man

$$\frac{dz}{dx} = a \text{ und } \frac{dz}{dy} = b,$$

welches in die Stammgleichung substituirt, die gegebene Ableitungs-Gleichung giebt.

Um nun hier die allgemeine Stammgleichung zu finden, muss man

$$b = \varphi a$$

setzen und a aus der Ableitung [*der Stammgleichung*] nach a allein bestimmen.

Man erhält also zu dem Ende die beiden Gleichungen

$$z = ax + by + f(a, b) \text{ und}$$

$$x + y\frac{db}{da} + \frac{d(f(a, b))}{da} = 0.$$

Um die singulaire Stammgleichung zu finden, müsste man a und b vermittelst der beiden Ableitungen [*der Stammgleichung*] nach a und b wegschaffen. Diese Ableitungen sind

$$x + \frac{df(a, b)}{da} = 0 \text{ und } y + \frac{df(a, b)}{db} = 0.$$

Da diese Elimination von a und b nicht anders aus-

führbar ist, als wenn die Grösse $f(a, b)$ eine bestimmte Form hat, so führe man statt dessen, an die Stelle der veränderlichen Grössen x und y, die beiden veränderlichen Grössen a und b ein; so erhält man, weil

$$x = -\frac{df(a, b)}{da} \text{ und } y = -\frac{df(a, b)}{db}$$

ist [*aus der Stammgleichung* $z = ax + by + f(a, b)$]

$$z = f(a, b) - a . \frac{df(a, b)}{da} - b . \frac{df(a, b)}{db},$$

welches die singulaire Stammgleichung ist.

305.

Es ist leicht zu sehen, dass diese drei Arten von Stammgleichungen wesentlich von einander verschieden sind und dass keine in den beiden andern enthalten seyn, oder sie enthalten könne; denn in der ersten sind die Grössen a und b Constanten, in der zweiten und dritten sind sie von einander verschiedene Functionen der veränderlichen Grössen x, y und z.

Geometrische Bedeutung der vollständigen, allgemeinen und singulairen Stammgleichungen.

306.

Diese Verschiedenheit ist noch sichtbarer, wenn man die verschiedenen krummen Flächen untersucht, welche von diesen verschiedenen Stammgleichungen ausgedrückt werden.

Geometr. Bedeut. der vollständ., allgem.

I. Man setze zu dem Ende zuerst die allgemeine Gleichung einer Ebene:

$$z = ax + by + c.$$

Die Lage dieser Ebene gegen die drei, auf einander senkrechten Ebenen der xy, xz und yz wird durch die Constanten a, b, c bestimmt. Es ist leicht, zu zeigen, dass a die Tangente des Winkels ist, welchen der Durchschnitt der schiefen Ebene und der Ebene der xz, mit der Axe der x macht; b die Tangente des Winkels zwischen dem Durchschnitte der schiefen Ebene mit der Ebene der yz und der Axe der y, und c die Entfernung des Puncts der Axe der z, durch welche die schiefe Ebene geht, von dem Anfangs-Puncte der Coordinaten. Man kann also a, b, c als die Elemente der schiefen Ebene betrachten, weil die Lage der Ebene gegen die Axen der x, y, z davon allein abhängt.

Verbindet man die Gleichung der Ebene mit den beiden Ableitungen der Gleichung nach x und nach y, so lassen sich die Werthe der drei Elemente a, b, c in x, y, z bestimmen, nemlich: $\left[\frac{dz}{dx} = a,\ \frac{dz}{dy} = b,\ also\right]$

$$a = \frac{dz}{dx},\ b = \frac{dz}{dy},\ c = z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy}.$$

Nun ist in der Theorie der Functionen [2*ter Th. Art.* 38.] gezeigt worden, dass die obigen Ausdrücke von a, b, c in Beziehung auf eine Fläche, deren Gleichung in x, y, z gegeben ist, zugleich die Elemente

und singulairen Stammgleichungen.

einer Ebene bezeichnen, welche die Fläche in dem Puncte berührt, dessen Coordinaten x, y, z sind. Hieraus folgt, dass zwei Flächen, welche, für die nemlichen Coordinaten, auch für die Ableitungen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die nemlichen Werthe geben, einander nothwendig in dem Puncte berühren müssen, der jenen Coordinaten entspricht, weil die Flächen beide einerlei berührende Ebene haben.

II. Dieses vorausgeschickt, so bezeichne nun die vollständige Stammgleichung

$$[u =]\ F(x, y, z, a, b) = 0,$$

in welcher a und b willkürliche Constanten sind, eine Fläche, deren Gestalt und Lage von den Constanten abhängt, so, dass wenn man die Constanten verändert, auch die Fläche in eine andere übergeht.

Setzt man nun

$$b = \varphi a$$

und bestimmt a in x, y, z, auf die Weise, dass die beiden Ableitungen [*von* $u = 0$ *nach* x *und* y] die nemlichen bleiben, als wenn a sich nicht änderte, welches die allgemeine Stammgleichung giebt, so ist klar, dass diese Gleichung eine von der vorigen verschiedene Fläche ausdrücken wird, die aber in allen Puncten eben die berührende Ebene hat, als wenn a constant wäre, weil die Werthe der Grössen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die nemlichen bleiben. Die [*durch die allgemeine Stammgleichung ausgedrückte*] Fläche

wird also in allen ihren Puncten von der durch die vollständige Stammgleichung ausgedrückten Fläche berührt werden, wenn dieselbe der Gleichung

$$b = \varphi a$$

genugthut, wo a eine Constante ist, die durch die Gleichung

$$\frac{du}{da} = 0,$$

welche die Bedeutung der allgemeinen Stammgleichung ausdrückt, bestimmt wird. Die Werthe von x, y, z, von welchen a eine Function ist, entsprechen den Berührungs-Puncten der beiden Flächen und sind für die berührenden Flächen, Constanten. [*Ueberall, wo die beiden Flächen: die durch die vollständige Stammgleichung, und die durch die allgemeine Stammgleichung ausgedrückte Fläche zusammentreffen, haben sie einerlei berührende Ebene.*]

III. Betrachtet man nun aber a als constant, so drückt die Gleichung

$$\frac{du}{da} = 0$$

ebenfalls eine Fläche aus und ihr Durchschnitt mit der durch

$$u = F(x, y, z, a, b) = 0$$

ausgedrückten Fläche ist eine, auf dieser letzten gezogene Linie, von welcher folglich jeder Punct ein Berührungs-Punct der beiden Flächen ist. [*Wenn a constant ist, so sind $u = 0$ und $\frac{du}{da} = 0$ nichts anders als zwei Gleichungen zwischen x, y, z und*

. und singulairen Stammgleichungen.

der Constante a. Sie bezeichnen also zwei wesentlich verschiedene Flächen. Schafft man zwischen diesen beiden Gleichungen, der Reihe nach, eine der Coordinaten weg, so erhält man Gleichungen zwischen zwei Coordinaten und der Constante a, die also Gleichungen einer Linie sind, welche der Durchschnitt der beiden Flächen ist. Dass die beiden Flächen in allen Puncten der Durchschnitts-Linie gemeinschaftliche berührende Ebenen haben, folgt aus (II.)]

IV. Hieraus folgt, dass die durch die allgemeine Stammgleichung ausgedrückte Fläche, in der ganzen Ausdehnung einer Linie, von einer der Flächen berührt wird, welche die vollständige Stammgleichung bezeichnet, wenn man darin eine der Constanten, $b = \varphi a$ setzt.

V. Also drückt die vollständige Stammgleichung

$$u = F(x, y, z, a, b) = 0,$$

in welcher a die Constante ist, wenn man den Werth dieser Grösse a sich verändern lässt, eine unendliche Menge von aufeinander folgenden Flächen aus, deren jede eine Berührungs-Linie mit der, durch die allgemeine Stammgleichung bezeichneten Fläche gemein hat, und es ist leicht zu sehen, dass diese Linien nichts anders als die Durchschnitte dieser verschiedenen Flächen sind, so dass die, durch die allgemeine Stammgleichung bezeichnete Fläche selbst, durch alle diese aufeinanderfolgenden Durchschnitte gebildet wird.

Geometr. Bedeut. der vollständ., allgem.

VI. Nun ist klar, dass die Gestalt dieser Flächen von der Function φa abhängt und dass sie nur die, durch die vollständige Stammgleichung $u = F(x, y, z, a, b) = 0$ ausgedrückte Fläche berührt, für welche

$$b = \varphi a$$

ist.

VII. Betrachtet man dagegen a und b als veränderlich und bestimmt die Werthe dieser Grössen aus den beiden Gleichungen

$$\frac{du}{da} = 0 \text{ und } \frac{du}{db} = 0,$$

welches die singulaire Stammgleichung giebt, so wird auch die, durch diese letzte [*singulaire*] Stammgleichung ausgedrückte Fläche, von der Fläche, welche die vollständige Stammgleichung mit den Constanten a und b ausdrückt, berührt, weil auch hier die Werthe der Ausdrücke $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die nemlichen sind, a und b mögen constant oder veränderlich seyn. Der Berührungs-Punct wird durch die beiden Gleichungen

$$\frac{du}{da} = 0 \text{ und } \frac{du}{db} = 0$$

bestimmt, wenn man sie mit der Stammgleichung

$$u = F(x, y, z, a, b) = 0$$

verbindet, so dass für jeden Werth von a und b nur ein bestimmter Berührungs-Punct Statt findet. Hieraus folgt, dass die, durch die singulaire Stammgleichung ausgedrückte Fläche, in jedem Puncte nur von einer der Flächen berührt wird, die die vollständige Stammgleichung

und singulairen Stammgleichungen.

$$u = F(x, y, z, a, b) = 0$$

ausdrückt, dass sie aber auf diese Weise von allen den Flächen berührt wird, welche von $u = 0$ bezeichnet werden, wenn man den darin vorkommenden Grössen a und b beliebige constante Werthe giebt, so dass man diese [*von der vollständigen Stammgleichung ausgedrückte*] Fläche als durch die aufeinander folgenden wechselseitigen Durchschnitte aller der vorhin genannten [*durch die singulaire Stammgleichung bezeichneten*] Flächen mit ihr, entstehend, betrachten kann, wenn man der Reihe nach den Grössen a und b beliebige constante Werthe beilegt. [*Zwei, von der vollständigen und der singulairen Stammgleichung ausgedrückte Flächen können sich nemlich, anders wie zwei, von der vollständigen und der allgemeinen Stammgleichung ausgedrückte Flächen, deshalb nur in einem Puncte berühren, weil es drei Gleichungen* $u = 0$, $\frac{du}{da} = 0$ *und* $\frac{du}{db} = 0$ *sind, die das, was die beiden Flächen für irgend ein a und b gemein haben, bestimmen. Das Resultat der Elimination der Coordinaten zwischen diesen drei Gleichungen giebt nicht Gleichungen einer Linie, sondern Gleichungen eines Puncts. Bei zusammengehörigen Flächen, die der vollständigen und der allgemeinen Stammgleichung entsprechen, sind nur zwei Gleichungen* $u = 0$ *und* $\frac{d(u)}{da} = 0$ *zur Bestimmung dessen, was beiden Flächen gemein ist,*

vorhanden. Deshalb giebt alsdann die Elimination nothwendig eine Linie.]

VIII. Diese Theorie ist, wie man sieht, nichts anders als eine Verallgemeinerung derjenigen in der siebzehnten Vorlesung, für die durch vollständige oder singulaire Stammgleichungen von Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen ausgedrückten Curven.

307.

Die obige vollständige Stammgleichung [304.]

$$[u =]\ z = ax + by + f(a, b)$$

bezeichnet, wie man sieht, eine Ebene, die von zwei Constanten a uud b ahhängt.

Setzt man

$$b = \varphi a \ [\textit{und der Kürze wegen } f(a, b) = c]$$

und bestimmt a aus der Gleichung

$$\frac{d(u)}{da} = x + y\frac{db}{da} + \frac{dc}{da} = 0,$$

um die allgemeine Stammgleichung zu finden, so wird die durch diese Gleichung $\left[x + y\frac{db}{da} + \frac{dc}{da} = 0\right]$ ausgedrückte Fläche, von allen Flächen, welche die Gleichung $z = ax + by + c$ bezeichnet, wenn man a nach und nach alle mögliche Werthe giebt, berührt und entsteht aus den Durchschnitten der beiden Flächen. Diese [*durch die allgemeine Stammgleichung ausgedrückte*] Fläche ist also im weitesten Sinne developpabel [*weil sie aus lauter aufein-*

und singulairen Stammgleichungen.

ander folgenden Linien, oder wenn man will, durch die Bewegung einer Linie, die auch während der Bewegung ihre Gestalt verändern kann, nicht aus Puncten, entstehet.]

Nimmt man dagegen a und b aus den zwei Gleichungen

$$\frac{du}{da} = x + \frac{dc}{da} = 0 \text{ und } \frac{du}{db} = y + \frac{dc}{db} = 0,$$

welches die singulaire Stammgleichung giebt, so wird die durch die singulaire Stammgleichung ausgedrückte Fläche durch die Aufeinanderfolge und Berührung aller der Ebenen gebildet, welche die Gleichung

$$z = ax + by + c$$

ausdrückt, wenn man nach und nach den Grössen a und b alle mögliche verschiedene Werthe beilegt.

Alle diese verschiedenen Flächen aber werden durch die Gleichung

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)$$

ausgedrückt [*weil für alle, die Grössen* $\frac{dz}{dx}$ *und* $\frac{dz}{dy}$, *welche die Lage der berührenden Ebenen ausdrücken, die nemlichen sind, indem die Flächen alle einander berühren, das heisst, in allen Puncten, wo sie zusammentreffen, einerlei berührende Ebenen haben.*]

Man findet in Monges Schriften die Theorie der Bildung der Flächen und der Gleichungen, von

welchen sie ausgedrückt werden, in ihrem ganzen Umfange entwickelt und von besonderen und sinnreichen, dem Verfasser eigenthümlichen Bemerkungen begleitet.

Anwendung auf mehr als drei veränderliche Grössen.

308.

Enthält die gegebene Ableitungs-Gleichung mehr als drei veränderliche Grössen, so kann man auf dieselbe Weise eine Gleichung mit der nemlichen Zahl veränderlicher Grössen und eben so vielen willkürlichen Constanten, weniger eine, für ihre Stammgleichung voraussetzen; denn alsdann giebt eine solche Gleichung so viele Abgeleitete als Constanten und man findet, wenn man vermittelst dieser Abgeleiteten die Constanten eliminirt, die bestimmte Ableitungs-Gleichung erster Ordnung.

Die Gleichung mit den Constanten ist also alsdann die vollständige Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung und man kann aus derselben, durch die Variation der Constanten, andere, mehr oder weniger allgemeine Stammgleichungen finden, nachdem man nemlich eine Constante, oder einige, Functionen der übrigen seyn lässt und ihren Werth aus den, nach diesen übrigen Constanten genommenen abgeleiteten Gleichungen bestimmt.

Endlich erhält man, wenn man gar keine Abhängigkeit zwischen den Constanten annimmt, sondern die Werthe aller, aus den nach ihnen genommenen abgeleiteten Gleichungen bestimmt, die singulaire Stammgleichung; denn durch diese Bestimmung der Constanten ändern sich die abgeleiteten Gleichungen nicht und das Resultat ist folglich das nemliche, als wenn man die Constanten nicht änderte.

309.

So kann die Gleichung

$$[u =] \; F(t, x, y, z, a, b, c) = 0$$

zwischen den vier veränderlichen Grössen t, x, y, z und den drei Constanten a, b, c die vollständige Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen t, x, y, z und den drei [*partiellen*] Ableitungen

$$\frac{dz}{dt}, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$$

seyn, die man erhält, wenn man die Ableitungen aus den; von u, nach t, x, y, genommenen drei abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{du}{dt} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0$$

nimmt und mit Hülfe derselben die drei Constanten a, b, c eliminirt.

Hierauf kann man a, b, c als veränderlich betrachten und z. B.

$$c = \varphi(a, b)$$

setzen. Dieses giebt eine allgemeine Stammgleichung, vermittelst der beiden Ableitungen von u nach a und b, nemlich

$$\frac{du}{da} + \frac{du}{dc} \cdot \frac{dc}{da} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{du}{db} + \frac{du}{dc} \cdot \frac{dc}{db} = 0.$$

Setzt man

$$c = \varphi a \text{ und } b = \Psi a,$$

so erhält man eine andere, weniger allgemeine Stammgleichung, wenn man die Grösse a aus der nach a abgeleiteten Gleichung von u,

$$\frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{da} + \frac{du}{dc} \cdot \frac{dc}{da} = 0$$

bestimmt.

Endlich erhält man, vermöge der drei abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{du}{da} = 0$$

$$\frac{du}{db} = 0$$

$$\frac{du}{dc} = 0$$

die singulaire Stammgleichung.

310.

Man sieht hieraus, dass allgemein jede Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen drei veränder-

lichen Grössen, deren eine als Function der beiden andern betrachtet wird, eine Gleichung zwischen den nemlichen veränderlichen Grössen mit einer willkürlichen Function zur Stammgleichung haben kann; dass jede Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen vier veränderlichen Grössen, deren eine als Function der drei andern betrachtet wird, eine Gleichung zwischen den nemlichen veränderlichen Grössen, mit einer willkürlichen Function von zwei, aus diesen veränderlichen Grössen zusammengesetzten Grössen haben kann; und so weiter. Das Vorkommen von willkürlichen Functionen in den Stammgleichungen und das Verschwinden derselben in den Ableitungs-Gleichungen ist Dasjenige, wodurch sich die Ableitungs-Gleichungen mit mehreren veränderlichen Grössen wesentlich von denen mit zwei veränderlichen Grössen unterscheiden, die nur willkürliche Constanten [*einzelne Grössen*, *nicht Functionen*] enthalten können.

Zurückleitungen beliebiger, nicht blos lineärer Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung zwischen drei veränderlichen Grössen. Schwierigkeiten dabei.

311.

Wir zeigten oben ein directes Verfahren, die Stammgleichung jeder Ableitungs-Gleichung erster Ordnung mit einer beliebigen Zahl veränderlicher

Zurückleitung nicht blos lineärer part. Grössen zu finden, wenn die Ableitungen darin nur in einer Abmessung vorkommen [*also von Ableitungs-Gleichungen, die die Form*

$$L\frac{dv}{dt}+M\frac{dv}{dx}+N\frac{dv}{dy}\ldots=P$$

haben, wo L, M, N.... P, ausser beliebigen Constanten, nur die veränderlichen Grössen t, x, y.... v selbst enthalten, nicht ihre Ableitungen $\frac{dv}{dt}, \frac{dv}{dx} \ldots$] Durch ein einfaches Mittel, welches ich schon vor längerer Zeit (in den Berliner Mémoiren vom Jahre 1772) mittheilte, kann man das Verfahren auf beliebige Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung mit drei veränderlichen Grössen ausdehnen [*also auf Gleichungen, in welchen die Ableitungen auf beliebige Weise vorkommen z. B.* $f(t, x, y, z \ldots v, \frac{dv}{dt}, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy} \ldots \frac{dv}{dz} \ldots) = 0$]. Dann aber stösst man bei Anwendung der Methode auf Schwierigkeiten, welche Denen, die sich dieser Methode bedienten, entgingen und die ich in der Theorie der Functionen, wo in (104. 1ster Theil) von diesem Gegenstande gehandelt wurde, noch nicht ganz lösete, weil ich darüber noch nichts Genügendes gefunden hatte. Ich komme deshalb, um hier Nichts zu wünschen übrig zu lassen, auf diesen Gegenstand zurück.

312.

Man setze, der Kürze wegen,

$$\frac{dz}{dx}=p \text{ und } \frac{dz}{dy}=q,$$

Ableitungs-Gleichungen.

so druckt

$$[v=]\ f(x, y, z, p, q) = 0$$

jede mögliche Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen drei veränderlichen Grössen aus und es ist

$$\frac{dz}{dt} = \left[\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt} =\right] p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt},$$

welcher letzten Gleichung durch eine der unbestimmten Grössen p und q genuggethan werden muss [*weil sie allgemein ohne Rücksicht auf die gegebene Ableitungs-Gleichung Statt findet*] während die andere durch die gegebene Ableitungs-Gleichung bestimmt wird.

Da die Grössen p und q nichts anders seyn können als Functionen von x, y, z, so erhält man, wenn man

$$p = \Psi(x, y, z) \text{ und } q = \varphi(x, y, z)$$

setzt, die Gleichung

$$\frac{dz}{dt} = \Psi(x, y, z)\frac{dx}{dt} + \varphi(x, y, z)\frac{dy}{dt},$$

welche Gleichung nur dann [*ohne bestimmte Abhängigkeit zwischen den veränderlichen Grössen*] eine Stammgleichung haben kann, wenn die, durch Ψ und φ bezeichneten Functionen [*oder die Grössen p und q*] die Bedingung

$$\frac{dp}{dy} + q\frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz}, \text{ oder}$$

$$\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy} + p\frac{dq}{dz} - q\frac{dp}{dz} = 0$$

erfüllen, wie wir dies in der vorigen Vorlesung sahen. [279.]

Zurückleitung nicht blos lineärer, part.

[*Wegen veränderter Zeichen konnte hier Mehreres wegbleiben.*]

Nun hat die gegebene Gleichung $v = o$, folgende drei, nach x, y und z genommene Ableitungs-Gleichungen:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{dv}{dq}\frac{dq}{dx} = o,$$

$$\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dp}\frac{dp}{dy} + \frac{dv}{dq}\frac{dq}{dy} = o,$$

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dp}\frac{dp}{dz} + \frac{dv}{dq}\frac{dq}{dz} = o,$$

vermittelst welcher man die Ableitungen von p oder q eliminiren kann [*nemlich die drei Ableitungen von p, oder von q nach x, y und z, zwischen diesen drei Gleichungen und der Bedingungs-Gleichung, welche die vierte ist.*]

Man eliminire die Ableitungen von q, so geben die erste und die dritte Gleichung:

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{dv}{dx} : \frac{dv}{dq} - \frac{dp}{dx} . \frac{dv}{dp} : \frac{dv}{dq} \text{ und}$$

$$\frac{dq}{dz} = -\frac{dv}{dz} : \frac{dv}{dq} - \frac{dp}{dz} . \frac{dv}{dp} : \frac{dv}{dq} .$$

Substituirt man Dieses in die Bedingungs-Gleichung $\left[\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy} + p\frac{dq}{dz} - q\frac{dp}{dz} = o\right]$, so erhält man

$$\left[- \frac{dv}{dx} : \frac{dv}{dq} - \frac{dp}{dx} . \frac{dv}{dp} : \frac{dv}{dq} - \frac{dp}{dy}\right.$$

$$-p\frac{dv}{dz} : \frac{dv}{dq} - p\frac{dp}{dz} . \frac{dv}{dp} : \frac{dv}{dq} - q\frac{dp}{dz} = o,$$

oder, wenn man mit $\frac{dv}{dq}$ *multiplicirt,*

Ableitungs-Gleichungen.

$$-\frac{dv}{dx}-\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dv}{dp}-\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dv}{dq}$$
$$-p\frac{dv}{dz}-p\frac{dp}{dz}\cdot\frac{dv}{dp}-q\frac{dv}{dq}\frac{dp}{dz}=0,$$

oder]

$$(\text{v}.)\frac{dv}{dx}+p\frac{dv}{dz}+\frac{dv}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{dv}{dq}\cdot\frac{dp}{dy}+\left(p\frac{dv}{dp}+q\frac{dv}{dq}\right)\frac{dp}{dz}=0,$$

wo, wie man sieht, die Ableitungen der unbekannten Grösse p nur in einer Abmessung vorkommen, während die andere Grösse q, vermöge der Gleichung $v=f(x, y, z, p, q)=0$, eine Function von p, x, y und z ist.

Hat man also aus diesen Gleichungen die Functionen p und q bestimmt, so muss die Gleichung

$$\frac{dz}{dt}=p\frac{dx}{dt}+q\frac{dy}{dt}$$

nothwendig eine Stammgleichung haben, welche zugleich die Stammgleichung der gegebenen Gleichung erster Ordnung

$$v=f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)=0$$

ist.

Wir wollen nun die obige Gleichung (v.), welche die Ableitungen von p nach den drei veränderlichen Grössen x, y, z enthält, mit dem Ausdrucke

$$\frac{dz}{dt}+L\frac{dz}{dx}+M\frac{dz}{dy}=N \text{ [289 } und \text{ 292.]}$$

vergleichen, von welchem wir sahen, dass seine Stammgleichung von den drei particulairen Gleichungen

Zurückleitung nicht blos lineärer, part.

$$\boxdot)\begin{cases} \frac{dx}{d\eta} - L\frac{dt}{d\eta} = 0, \\ \frac{dy}{d\eta} - M\frac{dt}{d\eta} = 0, \\ \frac{dz}{d\eta} - N\frac{dt}{d\eta} = 0, \end{cases}$$

abhängt. Dieses giebt, wenn wir die dortigen Grössen t, x, y, z mit den gegenwärtigen x, y, z, p verwechseln [*also den Ausdruck* 289 *und* 292., *wie folgt, schreiben:*

$$\frac{dp}{dx} + L\frac{dp}{dy} + M\frac{dp}{dz} = N$$

und dann denselben mit dem Ausdrucke (∇.), *welcher sich in*

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dv}{dq} : \frac{dv}{dp} + \frac{dp}{dz}\left(p\frac{dv}{dp} + q\frac{dv}{dq}\right) : \frac{dv}{dp}$$
$$= -\left(\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dz}\right) : \frac{dv}{dp}$$

verwandeln lässt, vergleichen:]

$$L = \frac{dv}{dq} : \frac{dv}{dp},$$

$$M = \left(p\frac{dv}{dp} + q\frac{dv}{dq}\right) : \frac{dv}{dp},$$

$$N = -\left(\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dz}\right) : \frac{dv}{dp},$$

so dass also die drei obigen Bedingungs-Gleichungen [$\boxdot$] [*die jetzt, weil* x, y, z, p *statt* t, x, y, z *gesetzt werden müssen, in*

$$\frac{dy}{d\eta} - L\frac{dx}{d\eta} = 0,$$

Ableitungs-Gleichungen.

$$\frac{dz}{d\eta} - M\frac{dx}{d\eta} = 0,$$

$$\frac{dp}{d\eta} - N\frac{dx}{d\eta} = 0$$

übergehen] folgende drei Gleichungen geben:

$$\left[\frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta} \cdot \frac{dv}{dq} : \frac{dv}{dp} = 0,\right.$$

$$\frac{dz}{d\eta} - \left(p\frac{dv}{dp} + q\frac{dv}{dq}\right)\frac{dx}{d\eta} : \frac{dv}{dp} = 0,$$

$$\left.\frac{dp}{d\eta} + \left(\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dz}\right)\frac{dx}{d\eta} : \frac{dv}{dp} = 0, \textit{ oder}\right]$$

$$\frac{dy}{d\eta} \cdot \frac{dv}{dp} - \frac{dx}{d\eta} \cdot \frac{dv}{dq} = 0,$$

$$\frac{dz}{d\eta} \cdot \frac{dv}{dp} - \frac{dx}{d\eta}\left(p\frac{dv}{dp} + q\frac{dv}{dq}\right) = 0,$$

$$\frac{dp}{d\eta} \cdot \frac{dv}{dp} + \frac{dx}{d\eta}\left(\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dz}\right) = 0,$$

Da diese drei Gleichungen nur vier veränderliche Grössen x, y, z, p enthalten, so kann man sie auf eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen bringen. Die Auflösung ist also auf diejenige von Gleichungen dieser Art reducirt.

Angenommen, man hätte die Stammgleichungen der drei Gleichungen gefunden, die nothwendig drei willkürliche Constanten a, b, c enthalten müssen, so kann man daraus die Werthe dieser drei Constanten in x, y, z und p finden. Bezeichnet man sie durch P, Q, R, so erhält man, wie wir oben [*in* 289 *und* 292.] zeigten, auf der Stelle, die Gleichung

$$R = \varphi(P, Q),$$

welche die Stammgleichung der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung (∇.) zwischen x, y, z und p ist. Die Grösse $\varphi(P, Q)$ ist eine willkürliche Function von P und Q.

Verbindet man diese Stammgleichung mit der gegebenen Gleichung

$$v = f(x, y, z, p, q) = 0,$$

so erhält man die Werthe von p und q in x, y, z, die, in

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}$$

substituirt, selbige einer Gleichung zwischen x, y und z fähig machen, welche die gesuchte Stammgleichung ist [*nemlich, wenn man statt t z. B. x annimmt.*]

313.

Da bis hierhin für die Function $\varphi(P, Q)$ keine Bedingung vorhanden ist, so würde folgen, dass die Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen drei veränderlichen Grössen eine willkürliche Function z w e i e r Grössen enthalten könne [*welches daher kommt, dass* (∇.) *eine Gleichung zwischen vier veränderlichen Grössen p, x, y, z ist*] während wir doch oben immer nur willkürliche Functionen e i n e r Grösse fanden. [*Man sehe* 294.] Auch ist ausserdem leicht zu sehen, dass es unmöglich ist, aus einer Gleichung zwischen drei veränderlichen Grössen eine willkürliche Function z w e i e r Grössen, mittelst der abgeleiteten Gleichungen wegzuschaffen.

Ableitungs-Gleichungen.

Diese Schwierigkeit, gestehe ich, beunruhigten mich lange Zeit. Endlich gelang es mir, sie auf folgende Weise zu lösen.

314.

Zuerst bemerke ich, dass, weil den drei Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung:

$$(\triangle)\begin{cases} \frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{dv}{dp}-\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dv}{dq}=0, \\ \frac{dz}{d\eta}\cdot\frac{dv}{dp}-\frac{dx}{d\eta}\left(p\frac{dv}{dp}+q\frac{dv}{dq}\right)=0, \\ \frac{dp}{d\eta}\cdot\frac{dv}{dp}+\frac{dx}{d\eta}\left(\frac{dv}{dx}+p\frac{dv}{dz}\right)=0, \end{cases}$$

nach der Voraussetzung, die drei Gleichungen

$$P=a,\ Q=b,\ R=c$$

mit den drei Constanten a, b, c genugthun, dass, wenn man die Ausdrücke der Werthe von x, y, z in p, aus diesen Gleichungen

$$P=a,\ Q=b,\ R=c$$

nimmt und in die vorigen Gleichungen substituirt, nothwendig identische Gleichungen entstehen müssen [*denn da auf diese Weise die Werthe von x, y, z aus den Stammgleichungen genommen und in die Ableitungs-Gleichungen, die daraus folgen, substituirt werden, so muss sich nothwendig Alles aufheben.*] Die ersten Glieder der entstehenden Gleichungen müssen also nothwendig identisch Null seyn, was auch p, a, b, c seyn mögen. Ueberhaupt würde es, weil die Grössen x, y, z, p als unabhängig be-

trachtet werden, dasselbe seyn, wenn man die Werthe dreier von ihnen, in Functionen von a, b, c und der vierten ausgedrückt, substituirte.

Nun erhält man, wenn man das erste Glied der ersten der drei obigen Gleichungen ($\triangle$) mit q multiplicirt und das Product von dem ersten Gliede der zweiten Gleichung abzieht,

$$\frac{dv}{dp}\left(\frac{dz}{d\eta}-p\frac{dx}{d\eta}-q\frac{dy}{d\eta}\right)=0.$$

Also ist, wenn man die nemlichen Werthe von x, y, z, in p ausgedrückt, in die Grösse $\frac{dz}{d\eta}-p\frac{dx}{dy}-q\frac{dy}{d\eta}$ substituirt, auch dieses Resultat identisch Null.

Statt der veränderlichen Grössen x, y, z kann man, ohne die Allgemeinheit zu vermindern, auch die Grössen a, b, c, als veränderlich betrachtet, einführen [*weil sich a, b, c durch x, y, z ausdrücken lassen*] indem man die nemlichen Ausdrücke von x, y, z in a, b, c [*die aus den Gleichungen $P=a$, $Q=b$, $R=c$ folgen*] beibehält. Alsdann müssen sich, in dem Ausdrucke $\frac{dz}{d\eta}-p\frac{dx}{d\eta}-q\frac{dy}{d\eta}$, die von der Veränderung von p herrührenden Glieder nothwendig aufheben, weil diese nemlichen Ausdrücke den Ausdruck $\frac{dz}{d\eta}-p\frac{dx}{d\eta}-q\frac{dy}{d\eta}$ für constante a, b, c verschwinden machten. Dieser Ausdruck nimmt also alsdann die Gestalt

Ableitungs-Gleichungen.

$$A\frac{da}{d\eta}+B\frac{db}{d\eta}+C\frac{dc}{d\eta}$$

an, wo A, B, C Functionen von a, b, c und p sind: [*Wenn man nemlich zuerst* a, b, c *als constant betrachtet und aus den Gleichungen* $P=a$, $Q=b$, $R=c$, *in welchen* P, Q, R *Functionen von* x, y, z *und* p *sind, die Werthe von* x, y *und* z *in* a, b, c *und* p *nimmt, um sie in* $\frac{dz}{d\eta}-p\frac{dx}{d\eta}-q\frac{dy}{d\eta}$ *zu substituiren, so geht dieser Ausdruck in einen andern über, der nur die Grössen* a, b, c, p *und* $\frac{dp}{d\eta}$ *enthält und zwar* $\frac{dp}{d\eta}$ *nur in einer Abmessung, weil die drei Grössen* $\frac{dx}{d\eta}$, $\frac{dy}{d\eta}$ *und* $\frac{dz}{d\eta}$, *von welchen* $\frac{dp}{d\eta}$ *herkommt, auch nur in einer Abmessung vorhanden sind. Da nun der entstehende Ausdruck, wie oben bemerkt, identisch ist, das heisst, von der Art, dass sich darin Alles aufhebt, so muss sich darin auch Alles, was* $\frac{dp}{d\eta}$ *enthält, aufheben.*

Sollen nun ferner a, b, c *veränderlich seyn, so entstehen, wenn man die Werthe von* $\frac{dx}{d\eta}$, $\frac{dy}{d\eta}$, $\frac{dz}{d\eta}$ *nimmt, auch noch Glieder mit* $\frac{da}{d\eta}$, $\frac{db}{d\eta}$ *und* $\frac{dc}{d\eta}$, *und zwar mit diesen Grössen in einer Abmessung; also wird der Ausdruck* $\frac{dz}{d\eta}-p\frac{dx}{d\eta}-q\frac{dy}{d\eta}$

Zurückleitung nicht blos lineärer, part.

überhaupt die Gestalt $A\frac{da}{d\eta} + B\frac{db}{d\eta} + C\frac{dc}{d\eta} + K\frac{dp}{d\eta}$ *haben. Aber die Glieder mit* $\frac{dp}{d\eta}$, *welche offenbar die nemlichen sind, a, b, c mögen sich verändern, oder nicht, heben sich von selbst auf, also bleibt nur* $A\frac{da}{d\eta} + B\frac{db}{d\eta} + C\frac{dc}{d\eta}$ *übrig, welches, wie oben gesagt, die Gestalt des verwandelten Ausdrucks* $\frac{dz}{d\eta} - p\frac{dx}{d\eta} - q\frac{dy}{d\eta}$ *ist.*]

Die Gleichung $\frac{dz}{d\eta} - p\frac{dx}{d\eta} - q\frac{dy}{d\eta} = 0$ ist also jetzt

$$A\frac{da}{d\eta} + B\frac{db}{d\eta} + C\frac{dc}{d\eta} = 0,$$

und die Bedingung, unter welcher sie einer Stammgleichung fähig seyn soll, ist, wie wir oben [*in* 312.] fanden,

$$c = \varphi(a, b),$$

weil man, wenn man die Werthe von x, y, z in a, b, c, p substituirt,

$$P = a, \quad Q = b, \quad R = c$$

erhält, woraus diese Werthe genommen sind.

Nimmt man hiervon die abgeleiteten Gleichungen [*nemlich von der Bedingungs-Gleichung* $c = \varphi(a, b)$], so erhält man

$$\frac{dc}{d\eta} = \frac{dc}{da} \cdot \frac{da}{d\eta} + \frac{dc}{db} \cdot \frac{db}{d\eta}.$$

Substituirt man Dieses [*in die obige Gleichung*

Ableitungs-Gleichungen.

$A\frac{da}{d\eta} + B\frac{db}{d\eta} + C\frac{dc}{d\eta} = 0$], so erhält man

$$\left(A + C\frac{dc}{da}\right)\frac{da}{d\eta} + \left(B + C\frac{dc}{d\eta}\right)\frac{db}{d\eta} = 0,$$

welche Gleichung nun nothwendig eine Stammgleichung haben muss.

Dieses aber ist wieder nicht anders möglich, als wenn die Grösse p von selbst aus der Gleichung verschwindet, da die Ableitung derselben, $\frac{dp}{d\eta}$ schon verschwunden ist. [*Alle Glieder mit* $\frac{dp}{d\eta}$ *hatten sich nemlich aufgehoben und eine Ableitungs-Gleichung kann keine Stammgleichung haben, wenn darin eine abhängige veränderliche Grösse ohne ihre Ableitung vorkommt.*]

Nachdem p weggefallen ist, enthält die Gleichung blos noch zwei veränderliche Grössen a und b [*man kann darin beliebig* η *etwa gleich* a *setzen*] und hat allemal eine Stammgleichung, vermöge welcher b eine Function von a allein ist, und zwar eine willkürliche Function, weil $\varphi(a, b)$ [$= c$] eine solche willkührliche Function ist.

Die Grössen b und c sind also nothwendig, beide Functionen von a allein, unter der Bedingung, dass sie der Gleichung

$$A\frac{da}{d\eta} + B\frac{db}{d\eta} + C\frac{dc}{d\eta} = 0$$

genugthun.

Zurückleitung nicht blos lineärer, part.

Es sey also

$$b = \Psi a, \quad c = \varphi a.$$

Substituirt man Solches in diese Gleichung, so erhält man

$$\left[A\frac{da}{d\eta} + B\frac{db}{da}\cdot\frac{da}{d\eta} + C\frac{dc}{da}\cdot\frac{da}{d\eta} = 0, \text{ oder}\right]$$

$$A + B\frac{db}{da} + C\frac{dc}{da} = 0,$$

welches das Verhältniss zwischen den beiden Functionen Ψa und φa giebt, von welchen eine unbestimmt bleibt.

Setzt man jetzt wieder statt a, b, c ihre Werthe P, Q, R, so erhält man für die gesuchte Stammgleichung das System der beiden Gleichungen

$$Q = \Psi P \text{ und } R = \varphi P.$$

Eliminirt man zwischen denselben p, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y und z, mit einer willkürlichen Function [φa *oder* Ψa].

Dieses ist die directe und vollständige Auflösung der Aufgabe, die sich aber, wie wir sehen werden, in mehreren Fällen noch vereinfachen lässt.

[*Aus dieser Erklärung der oben bemerkten Schwierigkeit folgt im Wesentlichen, dass die Schwierigkeit daraus entsteht, dass die Rechnung, wenn man bei dem Resultate* $c = \varphi(a, b)$, *oder* $R = \varphi(P, Q)$ *stehen bleibt, gleichsam nicht beendigt ist. Denn obgleich dieses Resultat* $R = \varphi(P, Q)$ *keinesweges unrichtig ist, so ist es dennoch noch nicht das* End-*Resultat, sondern gleichsam nur*

Ableitungs-Gleichungen.

eine Bedingungs-Gleichung, unter welcher die Gleichung $\frac{dz}{d\eta} - p\frac{dx}{d\eta} - q\frac{dy}{d\eta} = 0$ *zur vollständigen Ableitungs-Gleichung wird.*

Die Substitution der aus den drei theilweisen Stammgleichungen $P = a$, $Q = b$, $R = c$ *genommenen Werthe von* x, y, z *in die präsumirte Stammgleichung derjenigen Ableitungs-Gleichung, welche entsteht, wenn man die gegebene Ableitungs-Gleichung* $v = 0$ *mit dem Ausdrucke* $\frac{dz}{d\eta} - p\frac{dx}{d\eta} - q\frac{dy}{d\eta} = 0$, *welcher Statt finden muss, wenn* z *eine Function von* x *und* y *seyn soll, verbindet, war es nemlich, was zu dem Resultate* $R = \varphi(P, Q)$ *führte. Die Substitution eben dieser Werthe von* x, y, z, *ausser in die Stammgleichung, auch noch in die von derselben herkommende theilweise Ableitungs-Gleichungen* ($\triangle$) *war es, was noch nöthig ist, um die nothwendige zweite Bedingung für die Verhältnisse zwischen* a, b, c *zn finden, aus deren Verbindung mit der ersten Bedingung* $c = \varphi(a, b)$ (312.), *dann erst das wirkliche End-Resultat* $c = \Psi a$, $b = \varphi a$ *und* $A + B\frac{db}{da} + C\frac{dc}{da} = 0$ *folgt.*]

315.

[*Beispiel.*] Wir wollen die Ableitungs-Gleichung

$$z = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} \quad [= pq, \text{ so dass } z - pq = 0 \text{ ist}]$$

zum Beispiele nehmen.

Zurückleitung nicht blos lineärer, part.

Hier ist

$$v = f(x, y, z, p, q) = z - pq = 0.$$

Also ist

$$\frac{dv}{dx} = 0, \frac{dv}{dy} = 0, \frac{dv}{dz} = 1, \frac{dv}{dp} = -q, \frac{dv}{dq} = -p$$

und die obigen drei Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung [△. 314.] sind

$$-q\frac{dy}{d\eta} + p\frac{dx}{d\eta} = 0,$$

$$-q\frac{dz}{d\eta} + 2pq\frac{dx}{d\eta} = 0,$$

$$-q\frac{dp}{d\eta} + p\frac{dx}{d\eta} = 0.$$

Nun giebt die Gleichung $z = pq$,

$$q = \frac{z}{p};$$

also gehen die drei Gleichungen in folgende über:

$$z\frac{dy}{d\eta} - p^2\frac{dx}{d\eta} = 0,$$

$$\frac{dz}{d\eta} - 2p\frac{dx}{d\eta} = 0,$$

$$z\frac{dp}{d\eta} - p^2\frac{dx}{d\eta} = 0,$$

wo man eine der Ableitungen $\frac{dx}{d\eta}, \frac{dy}{d\eta}, \frac{dz}{d\eta}, \frac{dp}{d\eta}$ der Einheit gleich setzen kann.

Die erste und dritte Gleichung [*von einander abgezogen*] geben $\left[z\left(\frac{dy}{d\eta} - \frac{dp}{d\eta}\right) = 0, \text{ oder}\right]$

$$\frac{dy}{d\eta} = \frac{dp}{d\eta},$$

Ableitungs-Gleichungen.

woraus die Stammgleichung

$$y = p + a$$

folgt, wenn a eine willkürliche Constante ist.

Die zweite und dritte Gleichung geben [*wenn man die zweite mit $\frac{1}{2}p$ multiplicirt, und vom Producte die dritte abzieht*, $\frac{1}{2}p\frac{dz}{d\eta} - z\frac{dp}{d\eta} = 0$, *oder*]

$$p\frac{dz}{d\eta} = 2z\frac{dp}{d\eta},$$

oder

$$\frac{dz}{d\eta} : z = 2\frac{dp}{d\eta} : p.$$

Hiervon ist die Stammgleichung mit Logarithmen,

$$\overset{e}{log}\, z = \overset{e}{log}\, p^2 + \overset{e}{log}\, b,$$

woraus folgt

$$z = bp^2,$$

wenn b eine willkürliche Constante bedeutet.

Endlich erhält man, wenn man in die erste der drei Gleichungen die [*vorhin gefundenen*] Werthe $\frac{dp}{d\eta}$ von $\frac{dy}{d\eta}$ und bp^2 von z substituirt und durch p^2 dividirt, $\left[bp^2\frac{dp}{d\eta} - p^2\frac{dx}{d\eta} = 0, \textit{ also}\right]$

$$b\frac{dp}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta} = 0,$$

woraus, wenn man die Stammgrösse nimmt,

$$x = bp + c$$

folgt, wo c die dritte willkürliche Constante ist.

Man erhält also, wenn man die Werthe dieser Constanten entwickelt,

Zurückl. nicht blos lineär. part. Abl.-Gleich.

$$a = y - p = P,$$

$$b = \frac{z}{p^2} = Q,$$

$$c = x - \frac{z}{p} = R.$$

Substituirt man nun in die Gleichung

$$\frac{dz}{d\eta} - p\frac{dx}{d\eta} - q\frac{dy}{d\eta} = 0,$$

den Werth $\frac{z}{p}$ von q, so erhält man

$$\frac{dz}{d\eta} - p\frac{dx}{d\eta} - \frac{z}{p}.\frac{dy}{d\eta} = 0.$$

Setzt man hierin ferner, Statt der Grössen x, y, z, die dafür, oben, in p, a, b, c gefundenen Ausdrücke [$x = bp + c$, $y = p + a$, $z = bp^2$] und betrachtet a, b, c als veränderlich [*welches*

$$\frac{dx}{d\eta} = p\frac{db}{d\eta} + \frac{dc}{d\eta} + b\frac{dp}{d\eta},$$

$$\frac{dy}{d\eta} = \frac{dp}{d\eta} + \frac{da}{d\eta},$$

$$\frac{dz}{d\eta} = p^2\frac{db}{d\eta} + 2pb\frac{dp}{d\eta}$$

giebt], so erhält man $\left[\textit{weil } \frac{z}{p} = bp \textit{ ist}\right]$

$$p^2\frac{db}{d\eta} + 2bp\frac{dp}{d\eta} - p^2\frac{db}{d\eta} - p\frac{dc}{d\eta} - bp\frac{dp}{d\eta} - bp\frac{dp}{d\eta}$$
$$- bp\frac{da}{d\eta} = 0,$$

welches, wenn man weglässt, was sich aufhebt, [*und durch p dividirt*]

$\frac{dc}{d\eta}$

Ableitungs - Gleichungen.

$$\frac{dc}{d\eta} + b\frac{da}{d\eta} = 0$$

giebt.

Setzt man nun

$$b = \Psi a, \; c = \varphi a,$$

so giebt $\left[\frac{dc}{d\eta} + b\frac{da}{d\eta} = 0,\right.$ *die Gleichung* $\frac{d\varphi a}{da} \cdot \frac{da}{d\eta}$ $\left. + b\frac{da}{d\eta} = 0, \textit{ oder}\right]$

$$\frac{d\varphi a}{da} + \Psi a = 0; \text{ oder}$$

$$\Psi a = -\frac{d\varphi a}{da}.$$

Man hat also [*vermöge* $c = \varphi a$ *und* $b = \Psi a = -\frac{d\varphi a}{da}$] das System der beiden Gleichungen

$$R = \varphi P \text{ und } Q = -\frac{d\varphi P}{dP},$$

oder [*weil* $a = y - p$, $b = \frac{z}{p^2}$, $c = x - \frac{z}{p}$ *war*]

$$x - \frac{z}{p} = \varphi(y - p) \text{ und } \frac{z}{p^2} = -\frac{d\varphi(y-p)}{d(y-p)},$$

zwischen welchen beiden Gleichungen man p eliminiren muss. Die Function φ bleibt unbestimmt. [*Nachdem p eliminirt worden, erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z mit der unbestimmten Function φ, welche die Stammgleichung der gegebenen Ableitungs - Gleichung* $z = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}$ *ist.*]

Schwierigkeiten bei dem

316.

Hier ist eine wichtige Bemerkung nöthig. Wenn man nemlich zwei Stammgleichungen mit zwei willkürlichen Constanten, wie z. B. oben,

$$y = p + a \text{ und } z = bp^2$$

gefunden hat, so könnte man glauben, dass, wenn man p eliminirt und also eine Stammgleichung mit zwei willkürlichen Constanten aufstellt, selbige die vollständige Stammgleichung der gegebenen sey, aus welcher man die allgemeine Stammgleichung mit einer willkürlichen Function finden könne.

Solches würde hier

$$z = b(y - a)^2$$

geben. Es ist aber leicht zu sehen, dass diese Gleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung

$$z = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}$$

nicht genugthut, denn sie giebt

$$\frac{dz}{dx} = 0.$$

Eben so würde es sich verhalten, wenn man sich, um p wegzuschaffen, der zweiten und dritten Gleichung $\left[b = \frac{z}{p^2} \textit{ und } c = x - \frac{z}{p}\right]$ bediente. Dieses würde $\left[p^2 = \frac{b}{z} = \left(\frac{x - c}{z}\right)^2, \textit{ oder}\right]$

$$z = \frac{(x - c)^2}{b}$$

geben, woraus wieder

$$\frac{dz}{dy} = 0$$

folgt.

Wendet man dagegen die erste und die dritte Gleichung $\left[a = y - p \textit{ und } c = x - \frac{z}{p}\right]$ an, so erhält man $\left[p = y - a = \frac{z}{x - c}, \textit{ oder}\right]$

$$z = (x - c)(y - a).$$

Dieses giebt

$$\frac{dz}{dx} = y - a \text{ und } \frac{dz}{dy} = x - c,$$

welche Ausdrücke der gegebenen Ableitungs-Gleichung $\left[z = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}, \textit{ wie leicht zu sehen}\right]$ allerdings genug thun.

317.

Die Erklärung dieser Art von Sonderbarkeit liegt in der obigen Gleichung

$$\frac{dc}{d\eta} + b\frac{da}{d\eta} = 0 \text{ [315.]}$$

Diese zeigt, dass die beiden Grössen a und c zugleich constant seyn können $\left[\textit{weil dann } \frac{dc}{d\eta} = 0 \textit{ und } \frac{da}{d\eta} = 0 \textit{ ist}\right]$ und dass folglich die beiden Gleichungen

$$P = a \text{ und } R = c$$

zugleich Statt finden, so dass man, wenn man p wegschafft, eine Gleichung zwischen x, y, z und den beiden willkürlichen Constanten a und c erhält, die also

wirklich die vollständige Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung ist. Dagegen würde der Gleichung nicht Genüge geschehen, wenn man a und b, oder b und c constant annähme [*weil dieses nur* $\frac{da}{d\eta} = 0$, *oder* $\frac{dc}{d\eta} = 0$ *giebt und also der Gleichung* $\frac{dc}{d\eta} + b\frac{da}{d\eta} = 0$ *nicht genugthut*], so dass also die beiden Gleichungen

$$P = a \text{ und } Q = b, \text{ oder } Q = b \text{ und } R = c$$

der gegebenen Ableitungs-Gleichung hier nicht genugthun.

318.

Uebrigens kann man auch die vollständige Stammgleichung durch eine der obigen Gleichungen allein finden. Denn sie giebt den Werth von p in x, y, z mit einer willkürlichen Constante, und da dieser Werth der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen x, y, z und p genugthut, so macht er die Gleichung

$$\frac{dz}{d\eta} - p\frac{dx}{d\eta} - q\frac{dy}{d\eta} = 0$$

einer Stammgleichung fähig. Man darf also nur diese Stammgleichung suchen und derselben eine willkürliche Constante hinzufügen, so erhält man auch die vollständige Stammgleichung mit zwei Constanten.

Oder man kann auch aus der gefundenen Gleichung den Werth von p in x, y, z nehmen, und da $p = \frac{dz}{dx}$ ist, die Stammgleichung so suchen, als

vorigen Beispiele.

wenn blos z und x veränderlich wären. Diese Gleichung kann alsdann eine willkürliche Function von y enthalten, die sich leicht aus der gegebenen Ableitungs-Gleichung bestimmen lässt, und da diese von der ersten Ordnung ist, so muss die Function von y, nothwendig, wenigstens eine willkürliche Constante enthalten, so dass man ebenfalls eine vollständige Stammgleichung mit zwei willkürlichen Constanten erhält.

319.

Wir wollen z. B. in dem obigen Falle die Gleichung $P = a$, nemlich

$$y - p = a$$

nehmen.

I. Sie giebt [*erstlich*]

$$p = y - a$$

und weil $q = \frac{z}{p}$ ist [*vermöge der gegebenen Ableitungs-Gleichung* $z = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} = pq$,] so ist

$$q = \frac{z}{y - a}.$$

Substituirt man Dieses in die Gleichung $\frac{dz}{d\eta} - p\frac{dx}{d\eta} - q\frac{dy}{d\eta} = 0$, so erhält man

$$\frac{dz}{d\eta} - (y - a)\frac{dx}{d\eta} - \frac{z}{y - a}\frac{dy}{d\eta} = 0.$$

Diese Gleichung, durch $y - a$ dividirt, [*also die Gleichung* $\frac{dz}{d\eta} : (y - a) - \frac{dx}{d\eta} - \frac{z}{(y - a)^2} \cdot \frac{dy}{d\eta} = 0$]

Schwierigkeiten bei dem

hat zur Stammgleichung:

$$\frac{z}{y-a} - x + c = 0,$$

wo c die neue willkürliche Constante ist.

[*Denn nimmt man hiervon wieder die Ableitung, so erhält man*

$$\frac{dz}{d\eta} : (y-a) - \frac{z}{(y-a)^2} \cdot \frac{dy}{d\eta} - \frac{dx}{d\eta} = 0,$$

wie vorhin.]

Diese Gleichung ist die nemliche, welche wir durch die Elimination der Grösse p fanden.

II. Die nemliche Gleichung $p = y - a$ [*von welcher hier die Rechnung ausging*] giebt [*zweitens*] wenn man statt p seinen Werth $\frac{dz}{dx}$ setzt,

$$\frac{dz}{dx} = y - a.$$

Da hier von z nur die Ableitung nach x vorkommt, so erhält man wenn man y als unveränderlich betrachtet, folgende Stammgleichung davon:

$$z = (y-a)(x-Y),$$

wo Y irgend eine Function von y bedeutet [*denn die Ableitung von* $z = (y-a)(x-Y)$ *nach* x *ist, weil* y *constant ist,* $\frac{dz}{dx} = y - a$].

Dieser Ausdruck giebt, wenn man die Ableitungen nach x und y nimmt,

$$\frac{dz}{dx} = y - a \text{ und } \frac{dz}{dy} = x - Y - (y-a)\frac{dY}{dy}.$$

vorigen Beispiele.

Setzt man Solches in die gegebene Ableitungs-Gleichung $z = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}$, so erhält man

$$(y-a)(x-Y) = (y-a)(x-Y) - (y-a)^2 \frac{dY}{dy},$$

woraus

$$\frac{dY}{dy} = 0,$$

also

$$Y = c$$

folgt, wenn c die neue willkürliche Constante bedeutet.

Die Stammgleichung $[z = (y-a)(x-Y)]$ is also, wie vorhin,

$$z = (y-a)(x-c).$$

III. Nachdem man diese **vollständige** Stammgleichung gefunden, darf man nur, um die **allgemeine** Stammgleichung zu haben,

$$c = \varphi a$$

setzen und die Ableitung nach a allein nehmen. Solches giebt

$$z = (y-a)(x-c) \text{ und } 0 = -(x-c) - (y-a)\frac{dc}{da};$$

zwischen welchen beiden Gleichungen a zu eliminiren ist.

Um diese Gleichungen gegen die, oben durch das allgemeine Verfahren gefundene Gleichungen zu halten, darf man sie nur auf die Form

$$c = x - \frac{z}{y-a} \text{ und } \frac{dc}{da}\left[= -\frac{x-c}{y-a}\right] = -\frac{z}{(y-a)^2}$$

bringen. Da a weggeschafft werden soll, so kann man statt dessen eine beliebige andere Grösse setzen

Ableitungs-Gleichungen mit mehreren

Setzt man statt a seinen Werth $y-p$, so erhält man $\left[c=x-\frac{z}{p} \text{ und } -\frac{dc}{da}=\frac{z}{p^2}, \textit{ also}\right]$ die nemlichen Ausdrücke wie oben [315. *am Ende. Denn es war daselbst* $c=\varphi a=\varphi(y-p)$]. Aus diesen Ausdrücken muss dann p eliminirt werden.

Ableitungs-Gleichungen mit mehreren veränderlichen Grössen höherer Ordnungen.

320.

Die Theorie der Ableitungs-Gleichungen höherer Ordnungen mit mehreren veränderlichen Grössen ist noch sehr unvollkommen.

Wenn diese Gleichungen eine Stammgleichung von einer um Eins niedrigeren Ordnung haben, so kann man sie, als aus einer vollständigen Stammgleichung dieser niedrigern Ordnung mit zwei willkürlichen Constanten entstanden, betrachten, wie wir solches bei den Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung zeigten. Und wenn man auf irgend eine Weise diese Stammgleichung kennt, so kann man daraus, nach dem obigen Verfahren, die singulaire und allgemeine Stammgleichung finden. Aber, wie bekannt, giebt es, von der zweiten Ordnung an, unzählige Gleichungen, welche keine Stammgleichung erster Ordnung, demungeachtet aber eine Urgleichung ohne Ableitungen haben. Wir wollen in kein weiteres Detail über diesen Gegenstand eingehen, da uns solches zu weit führen würde. Wir verweisen wegen dieser Glei-

chungen auf die bekannten Lehrbücher der Differential-Rechnung.

[*Ueber die Zurückleitung von Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Zahl von veränderlichen Grössen sehe man auch die Abhandlung von Pfaff in den Memoiren der mathematischen Classe der Academie zu Berlin, aus den Jahren* 1814 *und* 1815. *unter dem Titel: „methodus generalis, equationes differentiarum particularum, nec non equationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis inter quotcunque variabiles complete integrandi. Diese sinnreiche Abhandlung enthält eine Fortsetung und Erweiterung der obigen, diesen Gegenstand betreffenden Untersuchungen* ***Lagrange's.***]

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Von den Bedingungs-Gleichungen, an welchen sich erkennen lässt, ob eine Function zwischen mehreren veränderlichen Grössen, von einer beliebigen Ableitungs-Ordnung, eine vollständige Ableitung sey. Analogie dieser Bedingungs-Gleichungen mit denen der isoperimetrischen Aufgabe. Geschichte dieser Aufgabe. Variations-Methode.

Bedingungs-Gleichungen für unbekannte Stammgrössen.

Begriff dieser Bedingungs-Gleichungen.

321.

Alle Functionen einer einzelnen veränderlichen Grösse mit Ableitungen können als vollständige Ableitungen betrachtet werden. Denn wenn sie nicht unmittelbar Stammgrössen haben, so kann man dergleichen durch Reihen finden, wenn man entweder

die gegebenen Ableitungs-Functionen in Reihen nach Potenzen der veränderlichen Grösse auflöset und von den einzelnen Gliedern der Reihe die Stammgrössen nimmt, oder den allgemeinen Ausdruck der zwölften Vorlesung anwendet. [*Es giebt noch mancherlei andere, zu diesem Zwecke führende Mittel. Man findet in der achten Abhandlung im ersten Bande der mathematischen Aufsätze des Uebersetzers eine Sammlung dreizehn verschiedener Verfahren, die Stammgrössen gegebener Functionen einer veränderlichen Grösse, Näherungs-Weise zu finden.*]

Bei Functionen von mehr als einer veränderlichen Grösse verhält es sich anders; und obgleich nach den Regeln der Ableitung der Functionen leicht zu finden ist, ob eine aus verschiedenen Ableitungen zusammengesetzte Function einer gegebenen Stammgrösse angehört, wie wir solches in der neunzehnten Vorlesung sahen, so ist doch zuweilen nicht so leicht zu sehen, ob eine gegebene Function eine vollständige Ableitung einer unbekannten Stammgrösse sey. Dieser Gegenstand hat die Analysten fast seit der Erfindung der Differential-Rechnung beschäftigt. Sie haben allgemeine Kennzeichen gesucht, an welchen sich sehen lasse, ob eine gegebene Function von beliebiger Ableitungs-Ordnung die vollständige Ableitung einer Function von einer um Eins, oder überhaupt niedrigern Ordnung seyn könne. Diese Kennzeichen sind in der Differential-Rechnung unter dem Namen der Bedingungen der Integrabilität bekannt und Euler, und Condorcet haben die-

selben auf allgemeine und elegante Ausdrücke gebracht.

Bedingungs-Gleichungen für Ableitungen von lineärer Form.

322.

Um diese Ausdrücke auf die einfachste Weise zu finden, fange ich damit an, eine Function V von verschiedenen veränderlichen Grössen x, y, z *etc.* und deren Ableitungen für den Fall zu untersuchen, wenn eine der veränderlichen Grössen z. B. z und ihre Ableitungen $\frac{dz}{d\eta}$, $\frac{d^2z}{d\eta^2}$ *etc.* blos in einer Abmessung vorkommen, so dass also die Function die Form

$$V = Nz + P\frac{dz}{d\eta} + Q\frac{d^2z}{d\eta^2} + R\frac{d^3z}{d\eta^3} \ldots .$$

hat, wo N, P, Q, R.... Functionen von x, y.... und deren Ableitungen [*nach* η] sind, aber kein z weiter enthalten.

Es ist leicht, alsdann die Bedingung zu finden, unter welcher eine Function von dieser Gestalt, unabhängig von irgend einem Verhältnisse der Grösse z zu den übrigen Grössen, eine vollständige Ableitung ist.

Bekanntlich ist die Ableitung des Products zweier beliebigen Grössen z. B. Pz, folgende:

$$\frac{d(Pz)}{d\eta} = P\frac{dz}{d\eta} + z\frac{dP}{d\eta}$$

Ableitungen von lineärer Form.

[*wegen der veränderlichen Zeichen nicht wörtlich*].

Also ist

$$P\frac{dz}{d\eta}=\frac{d(Pz)}{d\eta}-z\frac{dP}{d\eta}.$$

Auf dieselbe Weise ist

$$Q\frac{d^2z}{d\eta^2}=\frac{d\left(Q\frac{dz}{d\eta}\right)}{d\eta}-\frac{dz}{d\eta}\cdot\frac{dQ}{d\eta}$$

und

$$\frac{dQ}{d\eta}\cdot\frac{dz}{d\eta}=\frac{d\left(z\frac{dQ}{d\eta}\right)}{d\eta}-z\frac{d^2Q}{d\eta^2},$$

also

$$Q\frac{d^2z}{d\eta^2}=\frac{d\left(Q\frac{dz}{d\eta}\right)}{d\eta}-\frac{d\left(\frac{dQ}{d\eta}z\right)}{d\eta}+z\frac{d^2Q}{d\eta^2}.$$

Ferner findet man

$$R\frac{d^3z}{d\eta^2}=\frac{d\left(R\frac{d^2z}{d\eta^2}\right)}{d\eta}-\frac{d\left(\frac{dR}{d\eta}\frac{dz}{d\eta}\right)}{d\eta}+\frac{d\left(\frac{d^2R}{d\eta^2}z\right)}{d\eta}-z\frac{d^3R}{d\eta^3}$$

u. s. w.

Substituirt man Dieses in den gegebenen Ausdruck von V, so erhält man

$$[V=Nz$$

$$+\frac{d(Pz)}{d\eta}-z\frac{dP}{d\eta}$$

$$+\frac{d\left(Q\frac{dz}{d\eta}\right)}{d\eta}-\frac{d\left(z\frac{dQ}{d\eta}\right)}{d\eta}+z\frac{d^2Q}{d\eta^2}$$

$$+\frac{d\left(R\frac{d^2z}{d\eta}\right)}{d\eta}-\frac{d\left(\frac{dz}{d\eta}\cdot\frac{dR}{d\eta}\right)}{d\eta}+\frac{d\left(z\frac{d^2R}{d\eta^2}\right)}{d\eta}-z\frac{d^3R}{d\eta^3}$$

.

und] wenn man die Glieder ordnet,

$$V = \left(N - \frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2Q}{d\eta^2} - \frac{d^3R}{d\eta^3} + \ldots\right)z$$

$$+ \frac{d(Pz)}{d\eta} - \frac{d\left(z\frac{dQ}{d\eta}\right)}{d\eta} + \frac{d\left(z\frac{d^2R}{d\eta^2}\right)}{d\eta} - \ldots$$

$$+ \frac{d\left(\frac{dz}{d\eta}Q\right)}{d\eta} - \frac{d\left(\frac{dz}{d\eta}\cdot\frac{dR}{d\eta}\right)}{d\eta} + \ldots$$

$$+ \frac{d\left(\frac{d^2z}{d\eta^2}R\right)}{d\eta} - \ldots$$

Da in diesem Ausdrucke alle Glieder, ausser denjenigen in der ersten Zeile, die mit z multiplicirt werden sollen, schon vollständige Ableitungen sind, so müssen, im Fall V eine vollständige Ableitung seyn soll, nun auch noch diese, in z multiplicirte Glieder, nemlich

$$\left(N\frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2Q}{d\eta^2} - \frac{d^3R}{d\eta^3} + \ldots\right)z\ [= Bz]$$

ebenfalls eine vollständige Ableitung ausmachen.

Nun aber ist leicht zu sehen, dass solches, so lange man kein Verhältniss zwischen z und den übrigen veränderlichen Grössen festsetzt, unmöglich ist; woraus folgt, dass jene Glieder aus dem Ausdrucke von V verschwinden müssen, welches die Bedingung

$$[B =]\ N - \frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2Q}{d\eta^2} - \frac{d^3R}{d\eta^3} + \ldots = 0$$

giebt, welche Gleichung also identisch Statt finden muss, wenn die Function V, allgemein genommen,

einer Stammgrösse fähig seyn soll. [*Es könnte auch $Bz =$ Const. oder gleich einer bestimmten Function von η seyn. Auch dann wäre die Stammgrösse allgemein möglich.*] Wird diese Bedingung erfüllt, so ist die Stammgrösse von V, wie leicht zu sehen,

$$\left(P - \frac{dQ}{d\eta} + \frac{d^2R}{d\eta^2} \ldots\right) z$$

$$+ \left(Q - \frac{dR}{d\eta} + \ldots\right) \frac{dz}{d\eta}$$

$$+ (R - \ldots) \frac{d^2z}{d\eta^2} \text{ etc.}$$

323.

Allgemein findet in dem Falle, wenn in V eine der veränderlichen Grössen und ihre Ableitungen nur in einer Abmessung vorkommen, in Beziehung auf diese veränderliche Grösse immer die nemliche Bedingungs-Gleichung für die Existenz der Stammgrösse, ohne dass eine Abhängigkeit zwischen den veränderlichen Grössen nöthig wäre, Statt, wie gross auch die Zahl der veränderlichen Grössen seyn mag.

Bedingungen für beliebige Ableitungen mit zwei veränderlichen Grössen.

324.

Nachdem wir den Fall, in welchem die gegebene Ableitung nach einer der veränderlichen Grössen von lineärer Form ist, aufgelöset haben, wollen wir die

Bedingungen für beliebige Ableitungen

Aufgabe von den Bedingungs-Gleichungen für eine beliebige Form der gegebenen Functionen auf jenen einfachen Fall zu bringen suchen.

I. Man nehme an, eine Function v von x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ von beliebiger Form sey die vollständige Ableitung einer Function u von einer um Eins niedrigern Ordnung, ohne dass irgend eine bestimmte Abhängigkeit zwischen x und y Statt finden dürfe [*so dass also*

$$\frac{du}{dx} = v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$$

ist. Statt U, V im Original habe ich u und v gesetzt] so ist klar, dass wenn man in v und u, $y + \omega$, wo ω irgend eine unbestimmte Function von x bedeutet, statt y und also $\frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx}$ statt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dx^2}$ statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ *etc.* setzt, v nicht aufhört, die vollständige Ableitung von u zu seyn, weil diese Ableitung nicht von dem Werthe von y abhängt. [*Da nemlich vorausgesetzt wird, dass u die Stammgrösse von v seyn soll, ohne dass irgend eine bestimmte Abhängigkeit zwischen x und y Statt finden dürfe, so bleibt u die Stammgrösse von v, wenn auch die wechselseitige Abhängigkeit der Grössen y und x sich verändert, das heisst: auch dann, wenn sich der Werth von y verändert, ohne dass ein Gleiches mit x geschieht. Dieses ist der Grund, weshalb man y + ω statt*

statt x setzt, ohne den Werth von x zu verändern.] Also ist u, auch noch nach der Substitution von $y + \omega$ statt y, und nach der Entwickelung der Grösse nach Potenzen und Producten von ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$, die Stammgrösse von v.

II. Man bezeichne die Gesammtheit der Glieder der Entwickelung von u, welche die Grössen ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ nur in einer Abmessung enthalten, durch $\overset{1}{u}$, die Gesammtheit der Glieder, welche diese Grössen in zwei Abmessungen enthalten, durch $\overset{2}{u}$ etc.

Eben so bezeichne man die Gesammtheit der Glieder der Entwickelung von v, welche die Grössen ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ nur in einer Abmessung enthalten, durch $\overset{1}{v}$, die Gesammtheit der Glieder, welche diese Grössen in zwei Abmessungen enthalten, durch $\overset{2}{v}$ etc.

Alsdann giebt die Entwickelung von u nothwendig Folgendes:

$$u + \overset{1}{u} + \overset{2}{u} + \overset{3}{u} \ldots.$$

und die Entwickelung von v:

$$v + \overset{1}{v} + \overset{2}{v} + \overset{3}{v} \ldots.$$

[*Dieses wird weiter unten, wo die Entwickelung wirklich erfolgt, noch deutlicher.*] Diese letzte Reihe soll also die vollständige Ableitung der ersten seyn.

Bedingungen für beliebige Ableitungen

III. Es ist aber leicht zu sehen, dass jedes Glied der zweiten Reihe, einzeln die Ableitung eines ähnlichen [*dieselben Abmessungen von* $\omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots$ *enthaltenden*] Gliedes der ersten Reihe seyn muss, so lange die Grössen $\omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots$ unbestimmt bleiben sollen. Denn wenn z. B. das Glied $\overset{1}{v}$ diese Grössen nur in einer Abmessung enthält, so können selbige auch in der Stammgrösse dieses Gliedes nur in einer Abmessung vorkommen. Also kann nur allein $\overset{1}{u}$ die Stammgrösse von $\overset{1}{v}$ seyn. Eben so verhält es sich mit den Gliedern $\overset{2}{v}$ und $\overset{2}{u}$, in welchen die Grössen $\omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots$ in zwei Abmessungen vorkommen, u. s. w. [*Da nemlich* $\omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d\ \omega}{dx^2} \ldots$ *z. B. in* $\overset{1}{u}$ *und* $\overset{1}{v}$ *nur in einer Abmessung vorkommen sollen, so kann* $\overset{1}{u}$ *nur von der Form*

$$N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots$$

und $\overset{1}{v}$ *nur von der Form*

$$n\omega + p\frac{d\omega}{dx} + q\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots$$

seyn, wo $N, P, Q \ldots n, p, q \ldots$ *weiter kein* ω *enthalten.* $\overset{2}{u}$ *und* $\overset{2}{v}$ *werden die Form*

$$N'\omega^2 + N''\omega \, . \frac{d\omega}{dx} + P'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \ldots \text{ und}$$

mit zwei veränderlichen Grössen.

$$n'\omega^2 + n''\omega \cdot \frac{d\omega}{dx} + p'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \ldots\ldots$$

haben u. s. w.

Nun nehme man z. B. von $\overset{1}{u}$ *die erste Ableitung, so erhält man*

$$\frac{d\overset{1}{u}}{dx} = \frac{dN}{dx}\omega + N\frac{d\omega}{dx} + \frac{dP}{dx}\cdot\frac{d\omega}{dx} + P\cdot\frac{d^2\omega}{dx^2}\ldots\ldots,$$

oder

$$\frac{d\overset{1}{u}}{dx} = \frac{dN}{dx}\omega + \left(N + \frac{dP}{dx}\right)\frac{d\omega}{dx} + \left(P + \frac{dR}{dx}\right)\frac{d^2\omega}{dx^2}\ldots\ldots,$$

wo, wie man sieht, ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ *wieder überall nur in einer Abmessung vorkommen. Da nun unter allen den Gliedern* $\overset{1}{v}$, $\overset{2}{v}$, $\overset{3}{v}$.... *von* v, *nur allein* $\overset{1}{v}$ *die Grössen* ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ *in einer Abmessung enthält, so kann nur* $\overset{1}{v}$ *allein die Ableitung von* $\overset{1}{u}$ *und folglich umgekehrt, nur* $\overset{1}{u}$ *die erste Stammgrösse von* $\overset{1}{v}$ *seyn u. s. w.]*

Die Grösse $\overset{1}{v}$ muss also [*wenn dazu, unabhängig von irgend einem Verhältnisse zwischen* x, y *und* ω, *eine Stammgrösse* $\overset{1}{u}$ *existiren soll*], nothwendig für sich, unabhängig von irgend einem Verhältnisse zwischen x, y und ω, eine vollständige Ableitung seyn.

IV. Da nun $\overset{1}{v}$ derjenige Theil der Entwickelung von v ist, welcher ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ nur in

Bedingungen für beliebige Ableitungen

einer Abmessung enthält, so kann diese Grösse nur von der Form

$$v = N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} + R\frac{d^3\omega}{dx^3} \dots$$

seyn, wo N, P, Q.... Functionen von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$...., ohne ω sind. Die Aufgabe ist also darauf reducirt, die Bedingungen zu finden, welche Statt finden müssen, wenn eine Function von dieser Form allgemein eine vollständige Stemmgrösse seyn soll.

V. Dieser Fall ist aber der obige [322.] und es ist klar, dass man, wenn man ω an die Stelle des dortigen z [*und* x *statt* η] setzt, die übrigen Bezeichnungen aber beibehält, folgende Bedingungs-Gleichung erhält:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \dots = 0,$$

welche, weil sie unabhängig von jedem Verhältnisse zwischen x und y Statt finden soll, identisch erfüllt werden muss.

VI. Wird diese Bedingungs-Gleichung erfüllt, so ist die Stammgrösse von $\overset{1}{v}$:

$$[\overset{1}{u} =] \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \dots\right)\omega$$
$$+ \left(Q - \frac{dR}{dx} - \dots\right)\frac{d\omega}{dx}$$
$$+ (R - \dots)\frac{d^2\omega}{dx^2} \dots$$

mit zwei veränderlichen Grössen.

VII. Hat man nun aber erst das erste Glied $\overset{1}{u}$ von der Entwickelung der Stammgrösse u gefunden, so kann man daraus die Werthe aller übrigen Glieder $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$.... nach der neunzehnten Vorlesung finden, wenn man die Grössen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.... als eben so viele unabhängige Grössen betrachtet.

Denn

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$$

geht, wenn man $y + \omega$ statt y setzt, in

$$F\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots\right)$$

über, und wenn man diese Grössen nach Potenzen und Producten von ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$.... entwickelt, so erhält man

$$u + \omega\frac{du}{dy} + \frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2}\cdot\frac{du}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}\omega^2\frac{d^2u}{dy^2} + \omega\frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dy\, d\frac{dy}{dx}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^2u}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2} \ldots$$

$$+ \frac{1}{2.3}\omega^3\cdot\frac{d^3u}{dy^3} + \tfrac{1}{2}\omega^2\frac{d\omega}{dx}\frac{d^3u}{dy^2\, d\frac{dy}{dx}} \ldots$$

Also ist

$$\overset{1}{u} = \omega\frac{du}{dy} + \frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2}\cdot\frac{du}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \ldots$$

$$\overset{2}{u} = \tfrac{1}{2}\omega^2 \frac{d^2u}{dy^2} + \omega\frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{d^2\omega}{dy\,d\frac{dy}{dx}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\cdot\frac{d^2u}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}\ldots$$

$$\overset{3}{u} = \frac{1}{2.3}\omega^3\frac{d^3u}{dy^3} + \tfrac{1}{2}\omega^2\cdot\frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{d^3u}{dy^2\,d\frac{dy}{dx}}\ldots$$

etc. [*Nemlich* $\overset{1}{u}$ *ist die Gesammtheit der Glieder, welche* ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ *nur in einer Abmessung enthalten,* $\overset{2}{u}$ *ist die Gesammtheit der Glieder, welche diese Grössen nur in zwei Abmessungen enthalten u. s. w.*]

VIII. Oben [*in VI.*] fanden wir den Werth von $\overset{1}{u}$. [*Er war*

$$\overset{1}{u} = \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\ldots\right)\omega$$

$$+ \left(Q - \frac{dR}{dx}\ldots\right)\frac{d\omega}{dx}$$

$$+ (R - \ldots)\frac{d^2\omega}{dx^2}\ldots]$$

Vergleicht man die Glieder dieses Ausdrucks [*mit den vorigen in VII. nemlich die Coefficienten von* ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$], so erhält man

$$\frac{du}{dy} = P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots$$

$$\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} = Q - \frac{dR}{dx} + \ldots$$

$$\frac{du}{d\frac{d^2y}{dx^2}} = R - \ldots \text{ etc.}$$

mit zwei veränderlichen Grössen.

IX. Da man auf diese Weise alle die Ableitungen erster Ordnung der Grösse u, nach $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ gefunden hat, so kann man daraus weiter, nach den gewöhnlichen Ableitungs-Regeln, die Ableitungen der zweiten und folgenden Ordnungen, von u, nach den nemlichen Grössen, und folglich die Werthe der folgenden Glieder der Entwickelung von $u : \overset{2}{u}, \overset{3}{u}$ *etc.* finden [*weil dieselben, wie man in (VII.) sieht, aus solchen Ableitungen zusammengesetzt sind.*]

X. Nun war ferner

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right) = u$$

und

$$F\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots\right) = u+\overset{1}{u}+\overset{2}{u}+\overset{3}{u} \ldots$$

Also ist

$$F\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots\right) - F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$$

$$= \overset{1}{u}+\overset{2}{u}+\overset{3}{u} \ldots$$

folglich ist jetzt die Differenz der beiden Functionen $F\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx} \ldots\right)$ und $F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$ bekannt, wenigstens durch Reihen. [*Denn die Grössen N, P, Q, aus welchen* $\overset{1}{u}$ *zusammengesetzt ist, rühren nicht von der noch unbekannten Stammgrösse u, sondern von der gegebenen Ableitung v her, weil*

Bedingungen für beliebige Ableitungen

$$N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots = v$$

ist. (IV.) Also lässt sich $\overset{1}{u}$ *gänzlich aus der gegebenen Grösse v berechnen, folglich auch, zu Folge (IX.) die gesammte Differenz* $\overset{1}{u} + \overset{2}{u} + \overset{3}{u} \ldots$]

XI. Man setze

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$$

von welcher Grösse

$$u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$$

die Stammgrösse seyn soll, so ist auch

$$F\left(x, y + \omega, \frac{dy}{dx}, \frac{d\omega}{dx} \ldots\right)$$

die Stammgrösse von

$$f\left(x, y + \omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right). \; [I.]$$

Also ist die Stammgrösse von

$$f\left(x, y + \omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right) - f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$$

[*weil solche die gefundene Grösse*

$$F\left(x, y + \omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right) - F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$$

ist] bekannt.

XII. Aus dem bisher gefundenen folgt.

Erstlich, dass eine beliebige Function von der Form

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right),$$

unabhängig von jedem Verhältnisse zwischen x und y, nicht anders eine Stammgrösse haben kann, als wenn die obige Bedingungs-Gleichung

$$[B=]\ N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots = 0\ [V.]$$

von selbst erfüllt wird [*denn ohne dass könnte die Stammgrösse* $\overset{1}{u}$ *zu dem einzelnen Theile* $\overset{1}{v}$ *von* $f\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right)$ *nicht existiren, und weil die übrigen Theile* $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u} \ldots$ *von* $F\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right)$ *von u abhängen (IX.) auch die Grösse* $F\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right)$ *selbst nicht, mithin auch nicht die Stammgrösse* $u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$ *von* $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$, *welche beide Grössen von* $F\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right)$ *und* $f\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right)$ *einzelne Fälle sind, nemlich diejenigen, wo* $\omega = 0$ *ist, welchen Werth von* ω *man nehmen kann, weil* ω *jeden beliebigen Werth haben darf.*]

Zweitens, dass, sobald die Bedingungs-Gleichung [*V.*] erfüllt wird, die Function

$$f\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right) - f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$$

nothwendig eine Stammgrösse haben muss, was auch

ω seyn mag [*und zwar die Stammgrösse*

$$F\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}\ldots\right)-F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\ldots\right)].$$

XIII. Nun setze man

$$\omega = -y,$$

[*welches angeht, weil* ω *eine* ***willkürliche*** *Function von* x *ist*,] so reducirt sich die Grösse $f\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}\ldots\right)$ auf fx [*weil alsdann alle die Grössen* $y+\omega$, $\frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}$ *etc. Null sind.*] Diese Grösse fx hat allemal eine Stammgrösse, weil sie nur von einer einzelnen veränderlichen Grösse x abhängt. Also hat auch alsdann die Grösse $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\ldots\right)$ nothwendig eine Stammgrösse. [*Denn, wie bewiesen, hat die* ***gesammte*** *Grösse*

$$f\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}\ldots\right)-f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\ldots\right)$$

nothwendig eine Stammgrösse, wenn die Bedingungs-Gleichung $B = 0$ *(V.) erfüllt wird, für jeden beliebigen Werth von* ω. *Wie so eben gezeigt, hat der erste Theil derselben für* $\omega = -y$ *allemal eine Stammgrösse; also hat auch nothwendig der andere Theil* $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\ldots\right)$, *wenn die Bedingungs-Gleichung erfüllt wird, eine Stammgrösse, weil das Ganze eine Stammgrösse hat.*]

XIV. Nun wurde angenommen, dass

mit zwei veränderlichen Grössen.

$$N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2}$$

die ersten Glieder der Entwickelung der gegebenen Ableitung v sind, wenn man darin $y+\omega$ statt y, $\frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}$ statt $\frac{dy}{dx}$ *etc.* setzt [*I. II. IV.*], das heisst, die ersten Glieder der Entwickelung der Grösse $f\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}\ldots.\right)$. Man erhält also [*weil, wenn man diese Grösse entwickelt,*

$$f\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}\ldots.\right) =$$

$$v + \omega.\frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dx}.\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2}.\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\ldots.$$

$$+\,\omega^2.\frac{d^2v}{dy^2} + \tfrac{1}{2}\,\omega\,\frac{d\omega}{dx}.\frac{d^2v}{dy\,d\frac{dy}{dx}}\ldots.$$

ist, wenn man denjenigen Theil dieser Entwickelung, welcher $\omega, \frac{d\omega}{dx}\ldots.$ *nur in einer Abmessung enthält, mit der vorausgesetzten Grösse*

$$N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2}\ldots.$$

vergleicht]

$$N = \frac{dv}{dx},\; P = \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}},\; Q = \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\; etc.,$$

so dass also nun die Bedingungs-Gleichung

$$\left[B = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3}\ldots.\;(V.)\right]$$

folgende ist:

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \frac{d^3\frac{dv}{d\frac{d^3y}{dx^3}}}{dx^3} \ldots = 0.$$

[*Diese Bedingungs-Gleichung also muss von selbst erfüllt werden, wenn die gegebene Grösse* $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$, *ohne dass eine bestimmte Abhängigkeit zwischen* x *und* y *Statt findet, eine Stammgrösse haben soll.*]

325.

Diese Bedingungs-Gleichung ist die nemliche, welche Euler zuerst, auf indirectem Wege, durch Grösste und Kleinste fand und welche Condorcet späterhin in seiner Integral-Rechnung bewiesen hat.

Wir haben hier nicht allein gezeigt, dass die gegebene Ableitung nur dann eine Stammgrösse haben kann, [324. *XII. Erstlich*] wenn die Bedingungs-Gleichung erfüllt wird, wie Euler und Condorcet fanden, sondern auch, dass die Ableitung, wenn die Bedingungs-Gleichung erfüllt wird, nothwendig eine Stammgrösse haben muss [324. *XII. Zweitens*] was, wie es scheint, noch zu beweisen übrig blieb; denn der Beweiss, welchen man in dem funfzehnten Bande der Petersburger neuen Commentarien findet, ist so verwickelt, dass sich seine Richtigkeit und Allgemeinheit schwer übersehen lässt.

Bedingungs-Gleichungen für beliebige Ableitungen mit mehreren abhängigen Grössen.

326.

Enthalten die gegebenen Ableitungen nicht blos die veränderlichen Grössen x, y, nebst den Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ der letzteren, sondern ausserdem noch eine andere unbestimmte Function z von x mit ihren Ableitungen $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}$ *etc.*, so darf man nur in Beziehung auf diese zweite abhängige Grösse eben so verfahren, wie mit der Grösse y, welches dann eine Bedingungs-Gleichung giebt, die derjenigen, welche sich auf y bezieht, ganz ähnlich ist.

Man erhält also, wenn eine beliebige Function von der Form

$$[v=]\, f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots\ldots\right)$$

eine vollständige Ableitung einer Function von einer um Eins niedrigern Ordnung, unabhängig von jedem bestimmten Verhältnisse zwischen x und y [*und* z] seyn soll, die beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \frac{d^3\frac{dv}{d\frac{d^3y}{dx^3}}}{dx^3} \ldots\ldots = 0$$

und

$$\frac{dv}{dz} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dz}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2z}{dx^2}}}{dx^2} - \frac{d^3\frac{dv}{d\frac{d^3z}{dx^3}}}{dx^3} \ldots\ldots = 0.$$

Und, umgekehrt, wenn diese beiden Bedingungs-Gleichungen von selbst erfüllt werden, ist man versichert, dass die gegebene Ableitung v nothwendig eine vollständige Ableitung ist, welche Functionen auch y und z [*von* x] seyn mögen.

Bedingungs-Gleichungen, wenn das Element der gegebenen Ableitung selbst abhängig ist.

327.

Ehe wir weiter gehen ist hier Folgendes zu bemerken.

Als wir die Bedingungen suchten, unter welchen eine beliebige Function v von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ von selbst eine vollständige Ableitung ist, betrachteten wir y als eine Function von x, obgleich dieselbe noch unbekannt war. Es wurde angenommen, dass die gegebene Grösse v die Ableitungen der Grösse x selbst [*z. B. nach einer andern veränderlichen Grösse* t, *also die Grössen* $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$] nicht enthalte. Denn nach der siebenten Vorlesung kann man, wenn x die unabhängig veränderliche Grösse ist, ihre erste Ableitung gleich 1 und alle folgenden gseich Null setzen.

Will man nun, der grössern Allgemeinheit wegen (was immer angeht und besonders bei Aufgaben in der Mechanik nothwendig ist) die veränderlichen

der gegebenen Ableit. selbst abhängig ist.

Grössen x und y als Functionen einer dritten veränderlichen Grösse t betrachten, so enthält alsdann jede Ableitung von einer beliebigen Ordnung der Grössen x und y, auch noch die Ableitungen dieser Grössen selbst.

In der siebenten Vorlesung haben wir die Verwandlungen gezeigt, welche nöthig sind, wenn man in eine gegebene Grösse, in welche $\frac{dx}{dt} = 1$ gesetzt worden, die Ableitungen von x wieder einführen will. Hier ist blos zu bemerken, dass wenn die gegebene Function [*z. B.* v] als erste Ableitung einer andern Function [u] der nemlichen veränderlichen Grössen betrachtet wird, dieselbe nur mit $\frac{dx}{dt}$ multiplicirt werden darf. Denn es sey v eine Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, wo $\frac{dx}{dt} = 1$ gesetzt worden und es werde angenommen, dass v die erste Ableitung einer andern Function u sey, so ist nach der Voraussetzung $\frac{du}{dx} = v$. Um nun hier die Voraussetzung $\frac{dx}{dt} = 1$ zurückzunehmen, muss man statt der ersten Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{du}{dx}$ ihre Werthe $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ und $\frac{du}{dt} : \frac{dx}{dt}$, statt der zweiten Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Grösse $\frac{d\left(\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\right)}{dt} : \frac{dx}{dt}$ u. s. w. setzen, wie wir

Bedingungs-Gleich., wenn das Element

in der siebenten Vorlesung sahen. Alsdann ist
$\frac{du}{dt}:\frac{dx}{dt}=v$, woraus

$$\frac{du}{dt}=v\frac{dx}{dt}$$

folgt. [*Denn es ist z. B.* $\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$, *also*
$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$; *ferner ist* $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ *und*
$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}.\frac{dx}{dt}$, *also* $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$, *oder* $\frac{d^2y}{dx^2}=$
$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}:\frac{dx}{dt}$, *folglich, weil vorhin* $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$
war, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}\right)}{dt}:\frac{dx}{dt}$ *u. s. w.*]

328.

I. Wäre nun irgend eine Function [v] von
$x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ gegeben, und man verlangte die Bedingungs-Gleichung, unter welcher diese Function eine vollständige Ableitung ist, so erhält man, wenn man diese Function durch

$$v=f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \ldots y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} \ldots\right),$$

und der Kürze wegen

$\frac{dv}{dx}$

der gegebenen Ableit. selbst abhängig ist.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dx}{dt}}}{dt} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2x}{dt^2}}}{dt^2} - \ldots\text{ durch } X$$

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dt}}}{dt} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dt^2}}}{dt^2} - \ldots\text{ durch } Y$$

bezeichnet, vermöge dessen, was oben [*in* 326.] für den Fall [*der beiden Grössen y und z*], wenn die Grössen, wie hier x und y, von einander unabhängig sind, bewiesen worden, die beiden Gleichungen

$$X = 0 \text{ und } Y = 0,$$

welches die gesuchten Bedingungs-Gleichungen sind.

II. Soll nun y ferner eine Function von x seyn [*bis jetzt wurde y in diesem Artikel als unabhängig von x betrachtet*], so muss, wenn man deshalb statt $y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$ *etc.* $y = \varphi x$ und die Ableitungen davon $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}$ *etc.* setzt, die gegebene Function blos die Form $\frac{dx}{dt}.Fx$ haben, eben als wenn man darin $\frac{dx}{dt} = 1$ setzte. [*Denn wenn y eine Function von x seyn soll, so ist auch die ganze Grösse* $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$ *eine Function von x und folglich, weil man sie sich als die Ableitung irgend einer andern Grösse u vorstellt,* $\frac{du}{dx} = v$. *Nimmt man nun an, x sey*

Bedingungs-Gleich., wenn das Element

eine Function von t, also t statt x die unabhängig veränderliche Grösse, so muss man statt der Ableitung von u nach x, welche v ist, die Ableitung von u nach t als gegeben annehmen, weil jetzt auch die Stammgrösse nach t genommen werden soll. Diese Ableitung $\frac{du}{dt}$ *; ist gleich* $\frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, *oder gleich* $v\frac{dx}{dt}$, *also nimmt die vorausgesetzte erste Ableitung von u die Form* $v\frac{dx}{dt}$, *und wenn zugleich y als Function von x betrachtet wird, die Form* $\frac{dx}{dt}.Fx$ *an.*] Setzt man nun in diese Function $\left[\frac{dx}{dt}.Fx\right]$ $x+\zeta$ statt x [*wo* ζ *eine beliebige Function von t bedeutet*] und entwickelt solche, nimmt aber nur auf die Glieder mit einer Abmessung von ζ $\left[\frac{dz}{dt}\ldots\right]$ Rücksicht, so erhält man

$$\left[\frac{d(x+\zeta)}{dt}F(x+\zeta) = \left(\frac{dx}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\right)F(x+\zeta) = \left(\frac{dx}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\right)\left(Fx+\zeta\frac{dFx}{dx}\ldots\right) = \frac{dx}{dt}Fx + \frac{dx}{dt}.\zeta.\frac{dFx}{dx}+\frac{d\zeta}{dt}Fx+\zeta.\frac{d\zeta}{dt}\frac{dFx}{dx}\ldots,\right.$$

wo *schon das vierte Glied, wie alle übrigen, nicht mehr in Betracht kommt, weil z. B. jenes vierte Glied schon* $\zeta, \frac{d\zeta}{dt}\ldots$ *nicht mehr in einer, sondern in zwei Abmessungen, nemlich das Product* $\zeta.\frac{d\zeta}{dt}$ *enthält, also*]

der gegebenen Ableit. selbst abhängig ist.

$$\frac{dx}{dt} Fx + \frac{dx}{dt} . \zeta . \frac{dFx}{dx} + \frac{d\zeta}{dt} Fx.$$

In diesem Ausdrucke machen die Glieder, welche ζ enthalten [*nemlich das zweite und dritte, zusammen*] eine vollständige Ableitung aus, deren Stammgrösse [*wie leicht zu sehen*]

$$\zeta . Fx$$

ist, was auch der Werth von ζ seyn mag.

III. Es folgt also, dass wenn man in die gegebene Function v, in welcher y als Function von x betrachtet wird, $x + \zeta$ statt x setzt, und nach ζ entwickelt, die Glieder, welche nur die erste Abmessung von ζ und dessen Ableitungen enthalten, zusammen eine vollständige Ableitung ausmachen [*nemlich, wie man so eben sahe, die Grösse* $\frac{dx}{dt} \zeta \frac{dFx}{dx} + \frac{d\zeta}{dt} Fx$] was auch ζ seyn mag. Wenn aber nun $y = \varphi x$ gesetzt wird, so geht solches, wenn man $x + \zeta$ statt x setzt $\left[in\ \varphi x + \zeta \frac{d\varphi x}{dx} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{d^2 \varphi x}{dx^2} \ldots . \right]$ und wenn man nur auf die Glieder Rücksicht nimmt, die ζ [*und seine Ableitungen*] in einer Abmessung enthalten, in

$$\varphi x + \zeta \frac{d\varphi x}{dx}$$

über. Setzt man also der Kürze wegen

$$\zeta \frac{d\varphi x}{dx} = \omega,$$

so kann man $y + \omega$ statt ω setzen, während x in $x + \zeta$ übergeht.

Bedingungs-Gleich., wenn das Element

IV. Substituirt man dieses $\left[in\ v = fx, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \ldots\ y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} \ldots\right]$, entwickelt, und nimmt nur auf die Glieder Rücksicht, welche ζ [*und seine Ableitungen*] nur in einer Abmessung enthalten, so erhält man

$$(\nabla.)\left\{\begin{array}{l} \zeta\frac{dv}{dx} + \frac{d\zeta}{dt}\cdot\frac{dv}{d\frac{dx}{dt}} + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\cdot\frac{dv}{d\frac{d^2x}{dt^2}}\ldots \\ + \omega\frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{dv}{d\frac{dy}{dt}} + \frac{d^2\omega}{dt^2}\cdot\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dt^2}}\ldots \end{array}\right.$$

V. Diese Grösse ist, vermöge dessen, was oben [*in* 322.] bewiesen, nur dann eine vollständige Ableitung, wenn es die Grösse

$$(\Delta.)\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dx}{dt}}}{dt} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2x}{dt^2}}}{dt^2}\ldots\right)\zeta \\ + \left(\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dt}}}{dt} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dt^2}}}{dt^2}\ldots\right)\omega \end{array}\right.$$

ist. [*Um solches einzusehen, muss man die Grösse* $(\nabla.)$ *mit der Grösse* $Nz + P\frac{dz}{d\eta} + Q\frac{d^2z}{d\eta^2}\ldots$ *vergleichen und das Verfahren von* (322.) *auf jede der beiden Reihen der Grösse* (∇) *anwenden.*]

VI. Die Grösse (Δ) aber ist nichts anders als

$$X\zeta + Y\omega \text{ (I.)}.$$

der gegebenen Ableit. selbst abhängig ist.

Setzt man hierin für ω seinen Werth $\zeta \frac{d\varphi x}{dx}$ (III.), so erhält man

$$\left(X + Y\frac{d\varphi x}{dx}\right)\zeta$$

und es ist klar, dass diese Grösse, unabhängig von dem Werthe von ζ, welcher unbestimmt bleiben soll, keine vollständige Ableitung seyn kann. Die Grösse muss also verschwinden und man erhält die identische Gleichung

$$X + Y\frac{d\varphi x}{dx} = 0.$$

Da aber $y = \varphi x$ ist, so ist allgemein $\frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ [*woraus* $\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ *folgt*]. Substituirt man diesen Werth von $\frac{d\varphi x}{dx}$, so erhält man die identische Gleichung [$X + Y\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = 0$, *oder*]

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} = 0.$$

VII. Hieraus folgt, dass die Bedingungs-Gleichung $X = 0$, welche man erhält, wenn man auf die Grösse x und ihre Ableitungen [*nach* t] Rücksicht nimmt, und die Bedingungs-Gleichung $Y = 0$, welche sich auf die Grösse y bezieht, identisch die nemlichen sind; denn setzt man in die so eben gefundene Gleichung, $X = 0$, so erhält man von selbst auch $Y = 0$.

VIII. Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass

Bedingungs-Gleich., wenn das Element

für eine aus drei veränderlichen Grössen x, y, z und ihren Ableitungen [*etwa nach t*] zusammengesetzte Grösse, die identische Gleichung

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}=0$$

Statt findet, wo Z die Grösse

$$\frac{dv}{dz}-\frac{d\frac{dv}{d\frac{dz}{dt}}}{dt}+\frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2z}{dt^2}}}{dt^2}-\ldots$$

bedeutet, so dass in diesem Falle die Bedingungs-Gleichung $X=0$ in den beiden Bedingungs-Gleichungen $Y=0$ und $Z=0$ mit inbegriffen ist.

[*Das Resultat ist also nunmehr folgendes. Wenn eine Grösse* $v=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\right)$ *gegeben ist, in welcher y als unbestimmte Function von x betrachtet wird, so muss, wie oben gezeigt, die Bedingungs-Gleichung*

$$\frac{dv}{dy}-\frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx}+\frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2}-\ldots=0$$

Statt finden. Will man nun in der nemlichen Grösse v, ohne sie sonst zu verändern, nicht sowohl y als Function von x, sondern vielmehr x als Function einer neuen Grösse t, und y als Function der nemlichen Grösse t betrachten, so müssen zuerst, in so fern auf die anfängliche Abhängigkeit der Grössen y und x von einander

der gegebenen Ableit. selbst abhängig ist.

nicht Rücksicht genommen ist, allerdings die beiden, der vorigen ähnliche Bedingungs-Gleichungen

$$X = 0 \text{ und } Y = 0$$

erfüllt werden (I.). Wird dagegen zugleich auf die anfängliche Abhängigkeit zwischen x und y Rücksicht genommen, so fallen die beiden Bedingungs-Gleichungen in die eine

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} = 0$$

zusammen, woraus folgt, dass die eine neue Bedingungs-Gleichung $X = 0$, welche man dadurch zu erhalten scheint, dass man x nicht mehr unabhängig veränderlich seyn, sondern von t abhängen lässt, wirklich keine neue Bedingungs-Gleichung, sondern vielmehr in der anfänglichen Gleichung $Y = 0$ mit enthalten ist, weil aus $X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} = 0$, wenn $Y = 0$ gesetzt wird, von selbst $X = 0$ folgt, so dass also $Y = 0$ die Bedingungs-Gleichung $X = 0$ schon mit enthält. Eben so enthalten, bei drei veränderlichen Grössen x, y, z, die beiden nothwendigen Bedingungs-Gleichungen $Y = 0$ und $Z = 0$ die dritte $X = 0$, die noch hinzuzukommen scheint, wenn man x nicht mehr unabhängig veränderlich seyn, sondern von einer neuen Grösse t abhängen lässt, schon mit.]

IX. Daraus folgt, dass man bei der gegenwärtigen Aufgabe auf die Ableitungen der unabhängig

veränderlichen Grösse [*etwa* x *nach* t] und auf die daraus entstehende Bedingungs-Gleichung keine Rücksicht nehmen darf.

[*Der Beweis möchte noch etwas dunkel seyn und das Weglassen der Glieder mit höhern Abmessungen des Wachsthums der veränderlichen Grössen seine Schwierigkeiten haben. Der Satz scheint indess auch ohne besondern Beweis unmittelbar zu folgen. Denn wenn z. B. die Grösse* $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$ *von der Art seyn soll, dass sie ohne bestimmte Abhängigkeit der Grösse* y *von* x *eine Stammgrösse hat, so ist es offenbar dasselbe, man mag die Grösse* x *als unabhängig veränderlich oder als abhängig von einer neuen Grösse* t *betrachten. Das letzte ist eine blos willkürliche Verwandlung des Ausdrucks, die auf die* E x i s t e n z *der Stammgrösse keinen Einfluss haben kann und auch diese Stammgrösse wird die nemliche bleiben. Zu der Bedingungs-Gleichung, unter welcher* v *eine vollständige Ableitung ist, kann also dadurch, dass man* x *und* y *willkürlich noch von* t *abhängen lässt, nichts Neues hinzukommen. Verlangt man indessen einen besondern Beweis, so ist es wohl besser und deutlicher, die Glieder mit höhern Abmessungen des Wachsthums der veränderlichen Grössen nicht wegzulassen, sondern die Rechnung ganz durchzuführen. In der Variations-Rechnung, wo ein ganz*

ähnlicher Gegenstand vorkommt, ist solches noch nothwendiger.]

Bedingungen für Ableitungen höherer Ordnungen.

329.

Soll die Grösse v eine vollständige Ableitung zweiter Ordnung seyn, so muss die Stammgrösse von $\overset{1}{v}$, nemlich $\overset{1}{u}$, selbst noch wieder eine Stammgrösse haben. Nun ist

$$\overset{1}{u} = p\omega + q\frac{d\omega}{dx} + r\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots,$$

wenn man der Kürze wegen

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots = p$$

$$Q - \frac{dR}{dx} + \ldots = q$$

$$R - \ldots = r \text{ etc.}$$

setzt [324. *VI.*] und wenn man das obige Verfahren für $\overset{1}{v}$ wiederholt, ist leicht zu sehen, dass die Bedingung, unter welcher $\overset{1}{u}$ als eine vollständige, von dem Werthe von ω unabhängige Stammgrösse betrachtet werden kann, durch die Gleichung

$$p - \frac{dq}{dx} + \frac{d^2r}{dx} - \ldots = 0$$

ausgedrückt wird. [*Denn oben in* (324.) *war*

$$v = N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots$$

Bedingungen für Ableitungen

und die Bedingung, unter welcher diese Grösse, unabhängig von ω, *eine Stammgrösse hat, war*

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\ldots = 0 \text{ (324. V.)}.$$

Hier ist eine ganz ähnliche Grösse

$$\overset{1}{u} = p\omega + q\frac{d\omega}{dx} + r\frac{d^2\omega}{dx^2}\ldots\ldots$$

gegeben. Man darf also, um die Bedingungs-Gleichung zu finden, unter welcher diese neue Grösse einer Stammgrösse fähig ist, nur $N, P, Q\ldots\ldots$ *mit* $p, q, r\ldots\ldots$ *verwechseln. Dieses giebt die obige Bedingungs-Gleichung*

$$p - \frac{dq}{dx} + \frac{d^2r}{dx^2} - \ldots\ldots = 0].$$

Setzt man in diese Bedingungs-Gleichung statt $p, q, r\ldots\ldots$ die obigen Ausdrücke dieser Grössen, so erhält man

$$\Big[P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\ldots$$
$$- \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\ldots$$
$$+ \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\ldots = 0, \textit{ oder}\Big]$$

$$P - 2\frac{dQ}{dx} + 3\frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\ldots = 0.$$

Soll also eine Function von der Form

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\right)$$

eine vollständige Ableitung zweiter Ordnung seyn,

höherer Ordnungen.

das heisst, eine vollständige Ableitung von einer Ableitung, unabhängig von jedem Verhältnisse zwischen x und y, so erhält man für y, ausser der ersten Bedingungs-Gleichung

$$\left[\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \frac{d^3\frac{dv}{d\frac{d^3y}{dx^3}}}{dx^3} \ldots = 0.\right.$$

(324. *XIV.*] noch folgende zweite Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} - 2.\frac{d\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx} + 3.\frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^3y}{dx^3}}}{dx^2} - \ldots = 0.$$

Eine gleiche zweite Bedingungs-Gleichung nach z müsste erfüllt werden, wenn die gegebene Function auch noch z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ enthielte.

330.

Auf dieselbe Weise würde man, wenn die gegebene Grösse eine vollständige Ableitung **dritter Ordnung** seyn sollte, folgende dritte Bedingungs-Gleichung für y finden:

$$\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} - 3.\frac{d\frac{dv}{d\frac{d^3y}{dx^3}}}{dx} + 6.\frac{d^2\frac{dv}{d^2\frac{d^4y}{dx^4}}}{dx} - \ldots = 0$$

u. s. w.

Bedingung., wenn die Ableit. unentwickelt,

[*Allgemein müssen, wenn die gegebene Grösse* $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right)$ *eine vollständige Ableitung der mten Ordnung seyn soll, m Bedingungs-Gleichungen Statt finden, die man erhält, wenn man in den Ausdruck*

$$\frac{dv}{d\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}} - m\frac{d\frac{dv}{d\frac{d^my}{dx^m}}}{dx} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}}}{dx^2} \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{m.(m+1)\ldots n}{1.2\ldots(n-m+1)}\frac{d^{n-m+1}\frac{dv}{d\frac{d^ny}{dx^n}}}{dx^{n-m+1}},$$

für m, der Reihe nach alle ganze Zahlen von 1 bis m setzt. Man sehe deshalb den ersten Band des „Versuchs über die Rechnung mit veränderlichen Grössen" S. 438. etc. Aehnliches findet Statt für andre, etwa in v vorkommende abhängige Grössen z etc.]

Bedingungen, wenn die Ableitung unentwickelt, durch eine Gleichung gegeben ist.

331.

Nimmt man endlich an, zur Bestimmung einer unbekannten Stammgrösse *u* sey blos eine Gleichung von irgend einer Ordnung zwischen *u*,

durch eine Gleichung gegeben ist.

x und y und den Ableitungen von u und y, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gegeben [*die Ableitung* $v = \frac{du}{dx}$ *von u sey also nicht, wie oben, entwickelt, sondern unentwickelt und mit x, y, u und den höhern Ableitungen* $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$ *von u verbunden, gegeben seyn*] und man verlange die Bedingungen, unter welchen u, unabhängig von jedem Verhältnisse zwischen x und y, eine Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$ *etc.* seyn könne, so kann auch dann noch die Aufgabe nach den nemlichen Grundsätzen und auf dieselbe Weise aufgelöset werden.

I. Es sey z. B.

$$V = \left[f\left(x, y, u, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2} \ldots = \right]o\right.$$

die gegebene Gleichung, in welcher u als Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ betrachtet wird, so würde man, wenn man überall $y + \omega$ statt y, und also $\frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx}$ statt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dx^2}$ statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ *etc.* setzte (wo die Grösse ω, eine unbestimmte Function von x ist) und V alsdann nach Potenzen und Producten von ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ entwickelte, statt V, [*wie in* 324. *I.*] eine Grösse von der Form

Bedingung., wenn die Ableit. unentwickelt,

$$V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} \ldots.$$

erhalten, welche die einzelnen Gleichungen

$$V = 0,\ \overset{1}{V} = 0,\ \overset{2}{V} = 0 \ldots.$$

giebt. Denn stellt man sich vor, es würde in V, statt u, sein [*noch unbekannter, aber durch die gegebene Gleichung* $V = 0$ *bestimmter*] Werth in x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt, so würde die Gleichung $V = 0$ offenbar identisch erfüllt werden müssen, [*weil man dann in dieselbe nur den nemlichen Werth von* u, *der daraus genommen ist, zurück substituirte*] die Identität würde also auch noch Statt finden, wenn man $y + \omega$ statt y, $\frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx}$ statt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dx^2}$ statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ *etc.* setzte und die Grösse nach ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ entwickelte. Da nun aber diese Grössen von x und y unabhängig seyn sollen, so ist klar, dass jedes Glied $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$ der entwickelten Gleichung

$$V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} \ldots. = 0,$$

welches die nemlichen Abmessungen von ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ enthält, identisch gleich Null seyn muss. [*Denn wäre es anders, so würde, gegen die Voraussetzung, y von* ω, *vermöge der gegebenen Gleichung, abhängen.*]

durch eine Gleichung gegeben ist.

II. Man bezeichne von den verschiedenen Gliedern des entwickelten Ausdrucks der [*noch unbekannten Stamm-*] Grösse u [*der entsteht, wenn man statt der Grösse* y, *von welcher* u *abhängt*, $y+\omega$, *statt* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}$ *etc. setzt*] die Gesammtheit derjenigen, welche die Grössen ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ *etc.* nur in einer Abmessung enthalten, durch $\overset{1}{u}$, die Gesammtheit der Glieder, welche die Grössen ω, $\frac{d\omega}{dx}$ *etc.* nur in zwei Abmessungen enthalten, durch $\overset{2}{u}$ u. s. w. [*so dass also, wenn man* $y+\omega$ *statt* y, $\frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}$ *statt* $\frac{dy}{dx}$ *etc. setzt*,

$$u \text{ in } u+\overset{1}{u}+\overset{2}{u}+\overset{3}{u}\ldots.$$

$$\frac{du}{dx} \text{ in } \frac{du}{dx}+\frac{d\overset{1}{u}}{dx}+\frac{d\overset{2}{u}}{dx}+\frac{d\overset{3}{u}}{dx}\ldots.$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ in } \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2\overset{1}{u}}{dx^2}+\frac{d^2\overset{2}{u}}{dx^2}+\frac{d^2\overset{3}{u}}{dx^2}\ldots.$$

etc. übergeht], so erhält man [*weil alsdann die gegebene Grösse* $V=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\ldots.\, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\ldots.\right)$ *in* $\overset{1}{V}+\overset{2}{V}+V\ldots. = f\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx}\ldots.\, u+\overset{1}{u}\ldots.\, \frac{du}{dx}+\frac{d\overset{1}{u}}{dx}\ldots.\right)$ *übergeht*]

Bedingung., wenn die Ableit. unentwickelt,

$$\overset{1}{V} = \overset{1}{u}\frac{dV}{du} + \frac{d\overset{1}{u}}{dx}\frac{dV}{d\frac{du}{dx}} + \frac{d^2\overset{1}{u}}{dx^2}\frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\ldots$$

$$+\,\omega\frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2}\cdot\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\ldots$$

[*Aehnliches erhält man für* $\overset{2}{V}$, $\overset{3}{V}$ *etc.*]

III. Nun ist klar, dass die Function $\overset{1}{u}$ nur von der Form

$$\overset{1}{u} = N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2}\ldots$$

seyn kann, wo N, P, $Q\ldots$ Functionen von x, y, $\frac{dy}{dx}$ *etc.* bedeuten. Nimmt man also hiervon die Ableitungen, um $\frac{d\overset{1}{u}}{dx}$, $\frac{d^2\overset{1}{u}}{dx^2}$ *etc.* zu finden, so erhält man

$$\frac{d\overset{1}{u}}{dx} = \frac{dN}{dx}\omega + \left(N + \frac{dP}{dx}\right)\frac{d\omega}{dx} + \left(P + \frac{dQ}{dx}\right)\frac{d^2\omega}{dx}\ldots$$

$$\frac{d^2\overset{1}{u}}{dx^2} =$$

$$\frac{d^2N}{dx^2}\omega + \left(2\frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{d\omega}{dx} + \left(N + 2\frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\right)\frac{d^2\omega}{dx}\ldots$$

etc.

IV. Substituirt man diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck von $\overset{1}{V}$, so erhält man, entwickelt, diejenige Gleichung $\overset{1}{V} = 0$, welche, unabhängig von den

durch eine Gleichung gegeben ist.

den unbestimmt bleibenden Grössen ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ Statt finden muss, [*nemlich*

$$\overset{1}{V} = \left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots\right)\frac{dV}{du}$$

$$+\left(\frac{dN}{dx}\omega + \left(N + \frac{dP}{dx}\right)\frac{d\omega}{dx} + \left(P + \frac{dQ}{dx}\right)\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots\right)\frac{dV}{d\frac{d\omega}{dx}}$$

$$+\left(\frac{d^2N}{dx^2}\omega + \left(2\frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{d\omega}{dx}\right.$$

$$\left. + \left(N + 2\frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\right)\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots\right)\frac{dV}{d\frac{d^2\omega}{dx^2}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+\left(\frac{dV}{dy}\omega + \frac{dV}{d\frac{dy}{dx}}\frac{d\omega}{dx} + \frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots\right) = 0]$$

Setzt man also die Coefficienten der Grössen ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ [*weil diese Grössen von den übrigen Grössen unabhängig sind*] einzeln gleich Null, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{dV}{dy} + N\frac{dV}{du} + \frac{dN}{dx} \cdot \frac{dV}{d\frac{du}{dx}} + \frac{d^2N}{dx^2}\frac{dV}{d\frac{d^2u}{dx^2}} \ldots = 0$$

$$\frac{dV}{d\frac{dy}{dx}} + P\frac{dV}{du} + \left(N + \frac{dP}{dx}\right)\frac{dV}{d\frac{du}{dx}} + \left(2\frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{dV}{d\frac{d^2u}{dx^2}}$$

$$\ldots = 0$$

Bedingung., wenn die Ableit. unentwickelt,

$$\frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}} + Q\frac{dV}{du} + \left(P + \frac{dQ}{dx}\right)\frac{dV}{d\frac{du}{dx}}$$
$$+ \left(N + 2\frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\right)\frac{dV}{d\frac{d^2u}{dx^2}} \ldots\ldots = 0$$

etc.

V. Aus diesen Gleichungen darf man nur noch die Grössen *N*, *P*, *Q* eliminiren, so findet man eine oder mehrere Gleichungen, welche die gesuchten Bedingungs-Gleichungen sind. Denn, wie leicht zu sehen, kann die Zahl der Grössen *N*, *P*, *Q* nie grösser seyn, als die Zahl der Grössen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, weniger der Zahl der Grössen $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ *etc.*, weil in der gegebenen Gleichung [$v = 0$] die höchste Ableitung von u keine höhern Ableitungen von y enthalten kann, als in der gegebenen Gleichung selbst vorkommen. [*Stellt man sich nemlich vor, aus der gegebenen Gleichung*

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\ldots \frac{d^my}{dx^m}, u, \frac{du}{dx} \ldots\ldots \frac{d^nu}{dx^n}\right) = 0$$

sey die Stammgrösse u gefunden, so ist dazu eine n mal wiederholte Zurückleitung nöthig gewesen. Jede solche Zurückleitung erniedrigt den Ordnungs-Zeiger der höchsten Ableitung von y um Eins, also kann die Stammgrösse u die Ableitungen von y nur noch von der m — n ten Ordnung enthalten, also nur von der Form

durch eine Gleichung gegeben ist.

$$u = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{m-n}y}{dx^{m-n}}\right)$$

seyn. Von der nemlichen Ordnung kann auch nur $\overset{1}{u}$ *in (III.) also nur*

$$\overset{1}{u} = N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots . Z\frac{d^{m-n}\omega}{dx^{m-n}}$$

seyn (III.) weil die Ableitungen von ω von derselben Ordnung sind, wie von y, indem y + ω statt y gesetzt wird. Also kann die Zahl der Grössen N, P, Q.... nicht grösser seyn, als m — n, das heisst, nicht grösser als die Zahl der Grössen y, $\frac{dy}{dx}$ *...., weniger der Zahl der Grössen* $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$ *....]*

VI. Man setze z. B. die gegebene Gleichung sey von der Form

$$V = f\left(u, \frac{du}{dx}, x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

so kann man hier blos

$$\overset{1}{u} = N\omega + P\frac{d\omega}{dx}$$

setzen, welches die drei Gleichungen:

$$\frac{dV}{dy} + N\frac{dV}{du} + \frac{dN}{dx}\cdot\frac{dV}{d\frac{du}{dx}} = 0$$

$$\frac{dV}{d\frac{dy}{dx}} + P\frac{dV}{du} + \left(N + \frac{dP}{dx}\right)\frac{dV}{d\frac{du}{dx}} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}} + P\frac{dV}{d\frac{du}{dx}} = 0$$

giebt. Die letzte dieser drei Gleichungen giebt P, darauf die zweite N, und die erste giebt, wenn man N und $\frac{dN}{dx}$ substituirt, die Bedingungs-Gleichung, welche erfüllt werden muss, wenn die Grösse v, in der gegebenen Gleichung $V = o$, unabhängig von irgend einem Verhältnisse zwischen x und y, eine Function von x, y und $\frac{dy}{dx}$ soll seyn können.

Es ist leicht, dieses Verfahren auf eine beliebige Zahl von veränderlichen Grössen und Gleichungen auszudehnen. [*Man sehe über diesen Gegenstand auch den Versuch über die Rechnung mit veränderlichen Grössen*, 1*ster Band*, *S*. 454.]

Beispiele zu den obigen verschiedenen Fällen.

332.

Wir wollen an einigen Beispielen den Gebrauch dieser Bedingungs-Gleichungen zeigen.

I. Es sey zuerst die Function erster Ordnung

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

gegeben, so ist die Bedingungs-Gleichung, unter welcher v eine vollständige Ableitung ist:

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} = o.$$

Wenn diese Gleichung identisch seyn soll, so darf

verschiedenen Fällen.

das zweite Glied keine Ableitungen von y höherer Ordnung enthalten, als das erste $\frac{dv}{dy}$. Dieses erste Glied kann aber nur $\frac{dy}{dx}$ enthalten; also kann die Grösse $\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}$, deren erste Ableitung das zweite Glied giebt, nicht $\frac{dy}{dx}$ [*sondern nur* y] enthalten, weil sonst im zweiten Gliede $\frac{d^2y}{dx^2}$ vorkommen würde. Daraus folgt, dass die gegebene Grösse v nur allein von der Form

$$v = \Psi(x, y) + \frac{dy}{dx}\varphi(x, y) = 0$$

seyn kann. Nimmt man unter diesen Umständen die Ableitungen nach y, so erhält man

$$\frac{dv}{dy} = \frac{d\Psi(x, y)}{dy} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\varphi(x, y)}{dy} \text{ und}$$

$$\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = \varphi(x, y);$$

also ist jetzt die allgemeine Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{d\Psi(x, y)}{dy} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\varphi(x, y)}{dy} - \frac{d(\varphi(x, y))}{dx} = 0.$$

Nun aber ist

$$\frac{d(\varphi(x, y))}{dx} = \frac{d\varphi(x, y)}{dx} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\varphi(x, y)}{dx};$$

also reducirt sich die Bedingungs-Gleichung auf

$$\frac{d\Psi(x, y)}{dy} - \frac{d\varphi(x, y)}{dx} = 0,$$

Beispiele zu den obigen

wie wir solches auf einem andern Wege, schon in der neunzehnten Vorlesung fanden.

II. Wäre $\frac{dx}{dy}$ nicht 1 [*oder x nicht unabhängig veränderlich*], so würde die gegebene Function

$$\frac{dx}{d\eta}\Psi(x,y)+\frac{dy}{d\eta}\varphi(x,y)=0$$

seyn. Man hätte also, in Beziehung auf x, die Bedingungs-Gleichung

$$\frac{dv}{d\eta}-\frac{d\frac{dv}{d\frac{dx}{d\eta}}}{d\eta}=0,$$

welche

$$\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{d\Psi(x,y)}{dx}+\frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{d\varphi(x,y)}{d\eta}-\frac{d\Psi(x,y)}{d\eta}=0$$

giebt. Da aber

$$\frac{d\Psi(x,y)}{d\eta}=\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{d\Psi(x,y)}{dx}+\frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{d\varphi(x,y)}{dy}$$

ist, so erhält man

$$\frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{d\varphi(x,y)}{dy}-\frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{d\Psi(x,y)}{dy}=0, \text{ oder}$$

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx}-\frac{d\Psi(x,y)}{dy}=0;$$

wie oben.

III. Man setze, die gegebene Ableitung v sey von der zweiten Ordnung, also

$$v=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{dy^2}{dx^2}\right),$$

verschiedenen Fällen.

so ist die Bedingungs-Gleichung, wenn v eine vollständige Ableitung seyn soll,

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\,\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\,\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} = 0.$$

Es ist klar, dass wenn diese Gleichung identisch seyn soll, der Ausdruck von $\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}$ kein $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthalten kann, weil sonst die zweite Ableitung davon $\frac{d^4y}{dx^4}$ geben würde, folglich dieses Glied mit den vorigen, die nur y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^3}$ enthalten, sich nicht aufheben könnte.

Die gegebene Function v kann also nur von der Form

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^2y}{dx^2}\,\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

seyn [*wo der Kürze wegen*

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = p \text{ und } \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = q$$

seyn mag, so dass also

$$v = p + q\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

ist.] Dieses giebt, mit dem allgemeinen Ausdrucke $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ verglichen,

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2},$$

Beispiele zu den obigen

$$\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = \frac{dp}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{dq}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} = q;$$

also ist die obige Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d\frac{dp}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} - \frac{d\left(\frac{dq}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}$$

$$+ \frac{d^2(q)}{dx^2} = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{d(q)}{dx} = \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dq}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2},$$

also

$$\frac{d^2(q)}{dx^2} = \frac{d\frac{dq}{dx}}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}.$$

Substituirt man Dieses, so ist die Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d\frac{dp}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d\frac{dq}{dx}}{dx} + \frac{d\left(\frac{dq}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0.$$

Man setze, der Kürze wegen,

$$-\frac{dp}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = r,$$

welche Grösse r dann eine bekannte Function von $x, y, \frac{dy}{dx}$ ist, welche drei Grössen darin nur vorkommen, so ist die Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy}\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d(r)}{dx} = 0.$$

Nun aber ist

$$\frac{d(r)}{dx} = \frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dr}{d\frac{dy}{dx}}\cdot\frac{d^2y}{dx^2},$$

also reducirt sich die Bedingungs-Gleichung auf

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dr}{dx} + \left(\frac{dq}{d} + \frac{dr}{d\frac{dy}{dx}}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dr}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

Es ist klar, dass hier die Grösse $\frac{d^2y}{dx^2}$ in den [*übrigen*] Ableitungen nach x und y nicht vorkommt, weil sie in p, q und r nicht enthalten ist. Damit also die Gleichung identisch sey, müssen nothwendig die mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ multiplicirten Glieder für sich selbst verschwinden. Also zerfällt die Bedingungs-Gleichung in folgende zwei:

$$\frac{dq}{dx} + \frac{dr}{d\frac{dy}{dx}} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dr}{dx} + \frac{dr}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

welche einzeln Statt finden müssen, wenn die gegebene Function v eine vollständige Ableitung seyn soll.

Beisp. zu den obigen verschied. Fällen.

IV. Man setze, um ein einzelnes Beispiel zu geben, es sey

$$v = \frac{dy}{dx} : y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 : y^2 + x\,\frac{d^2y}{dx^2} : y,$$

so ist hier

$$p = \frac{dy}{dx} : y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 : y^2 \text{ und } q = \frac{x}{y}.$$

Dieses giebt

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{dy}{dx} : y^2 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 : y^2,$$

$$\frac{dp}{d\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y} - 2x\,\frac{dy}{dx} : y^2,$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{y},$$

$$\frac{dq}{dy} = -\frac{x}{y^2},$$

$$r = \frac{1}{y} - x\,\frac{dy}{dx} : y^2 - \frac{1}{y^2} + 2x\,\frac{dy}{dx} : y^2 = x\,\frac{dy}{dx} : y^2,$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{dy}{dx} : y^2,$$

$$\frac{dr}{dy} = -2x\,\frac{dy}{dx} : y^3,$$

$$\frac{dr}{d\frac{dy}{dx}} = \frac{x}{y^2}.$$

Also sind hier die beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$-\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2} = 0$$

$$-\frac{dy}{dx} : y^2 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 : y^3 + \frac{dy}{dx} : y^2 - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 : y^3 = 0,$$

welche, wie man sieht, von selbst erfüllt werden. In der That hat die gegebene Grösse v [*unabhängig von dem Verhältnisse zwischen x und y*] eine Stammgrösse. Sie ist

$$[u =]\ x\frac{dy}{dx} : y.$$

Die höchste Ableitung darf immer nur in einer Abmessung vorkommen.

333.

Es ist leicht, allgemein zu zeigen, dass die Bedingungs-Gleichung

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\dfrac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\dfrac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots = 0$$

nicht anders identisch seyn kann, als wenn die höchste der Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$, welche in der gegebenen Function $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$ befindlich ist, nur in einer Abmessung vorkommt, damit sie in der Ableitung, die man nach dieser höchsten Ableitung selbst nimmt, verschwinden könne. Daraus folgt, dass die gegebene Grösse v, wenn sie von der nten Ableitungs-Ordnung wäre, nicht anders eine vollständige Ableitung seyn kann, als wenn sie die Form

Die höchste Abl. darf nur in ein. Abm. vork.

$$\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) + \frac{d^n y}{dx^n}\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

hat, welches mit dem, was wir in der dreizehnten Vorlesung fanden, übereinstimmt. [*Denn enthält* v *die Ableitung* $\frac{d^n y}{dx^n}$ *anders als in einer Abmessung, so würde die Ableitung von* v, *nach* $\frac{d^n y}{dx^n}$, *noch* $\frac{d^n y}{dx^n}$ *enthalten, also, da von der Ableitung von* $\frac{d^n y}{dx^n}$ *die nte Ableitung im letzten Gliede genommen wird, die Ordnung der Ableitung auf* $2n$ *steigen, welches in keinem andern Gliede der Fall ist, indem die Ableitungen in dem vorletzten Gliede nur auf die Ordnung* $2n-1$, *in den übrigen Gliedern nur auf noch niedrigere Ordnungen steigen, so, dass dann die* $2n$*te Ableitung sich nicht identisch würde aufheben können.*]

334.

Ferner lässt sich zeigen, dass, so wie für Ableitungen zweiter Ordnung die Bedingungs-Gleichung in zwei Gleichungen zerfällt, die mit einander Statt finden müssen, für die dritte Ordnung drei einzelne Bedingungs-Gleichungen entstehen, für die vierte vier u. s. w.

Beispiel an einer unentwickelt gegebenen Ableitung.

335.

Um endlich ein Beispiel einer Function zu geben, die nur unentwickelt, durch eine Gleichung gegeben ist, wollen wir die Gleichung

$$\frac{du}{dx} - \Psi(u, x, y) - \frac{dy}{dx}\varphi(u, x, y) = 0$$

annehmen, und die Bedingungen suchen, die erfüllt werden müssen, wenn u eine Function von x und y seyn soll.

Vergleicht man diese Gleichung mit dem allgemeinen Ausdrucke derselben

$$V = f\left(u, \frac{du}{dx}, x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

so ist [*wenn, der Kürze wegen,* $\Psi(u, x, y) = p$ *und* $\varphi(u, x, y) = q$ *gesetzt wird*]

$$f\left(u, \frac{du}{dx}, x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \frac{du}{dx} - p - q\frac{dy}{dx}.$$

Dieses giebt

$$\frac{dV}{du} = -\frac{dp}{du} - \frac{dq}{du}\cdot\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dV}{d\frac{du}{dx}} = 1,$$

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dV}{d\frac{dy}{dx}} = -q.$$

Da die gegebene Gleichung kein $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthält, so ist

$$\frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}} = 0$$

und die dritte obige Bedingungs-Gleichung [331. *VI.*] giebt hier sogleich:

$$P = 0,$$

wodurch sich die beiden ersten Bedingungs-Gleichungen auf

$$-\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dy}\frac{dy}{dx} - N\left(\frac{dp}{du} + \frac{dq}{du}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{dN}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$-q + N = 0$$

reduciren.

Die letzte giebt

$$N = q.$$

Setzt man Dieses in die erste und verwechselt die Zeichen, so erhält man

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dp}{du} + \frac{dq}{du}\cdot\frac{dy}{dx}\right)q - \frac{dq}{dx} = 0.$$

Nun ist

$$\frac{d(q)}{dx} = \frac{dq}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dq}{dx} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

und die gegebene Gleichung giebt

$$\frac{du}{dx} = p + q\frac{dy}{dx}.$$

Substituirt man Dieses und lässt weg, was sich aufhebt, so erhält man folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{du} \cdot q - \frac{dq}{dx} - \frac{dq}{du} \cdot p = 0,$$

welches die nemliche Gleichung ist, die wir oben in der neunzehnten Vorlesung [*in* 278.] als Bedingung fanden, unter welcher die gegebene Ableitungs-Gleichung mit drei veränderlichen Grössen, einer Stammgleichung zwischen diesen veränderlichen Grössen fähig ist.

Von der isoperimetrischen Aufgabe.

336.

Die so eben abgehandelten Aufgaben von den Bedingungs-Gleichungen, wenn eine gegebene Function mehrerer veränderlichen Grössen, unabhängig von dem Verhältnisse zwischen den veränderlichen Grössen, eine Stammgrösse haben soll, steht in naher Verbindung mit einer wichtigeren Aufgabe, welche die Analysten seit einem Jahrhunderte beschäftigte, nemlich mit der berühmten isoperimetrischen Aufgabe, die in ihrem ganzen Umfange genommen, darin besteht:

> die Gleichungen zu finden, welche zwischen bestimmten veränderlichen Grössen Statt finden müssen, wenn die unbekannte Stammgrösse zu einer gegebenen Function jener veränderlichen Grössen und ihrer Ableitungen, ein Maximum oder Minimum seyn soll.

Geschichte der

337.

Die nemlichen Gleichungen dienen zur Auflösung beider Aufgaben, nur mit dem Unterschiede, dass sie, bei der ersten, identisch Statt finden und also von selbst erfüllt werden müssen, bei der zweiten hingegen die Bedingungs-Gleichungen zwischen den veränderlichen Grössen der Aufgabe für die Existenz des Maximi oder Minimi sind.

Man wird den Grund dieser Uebereinstimmung der Resultate in der weiter unten folgenden Analyse der isoperimetrischen Aufgabe sehen.

Wir wollen die Untersuchung dieses Gegenstandes mit einer kurzen Geschichte der verschiedenen Bemühungen der Mathematiker des vorigen Jahrhunderts um die allgemeine Auflösung, anfangen, welche Bemühungen nach und nach zu der, unter dem Namen: „Variations-Rechnung" bekannten Methode, führten.

Geschichte der isoperimetrischen Aufgabe.

338.

Die Aufgaben von Grössten und Kleinsten, waren den Alten nicht unbekannt. Wir besitzen ein ganzes Buch des Apollonius, welches fast ausschliesslich von den grössten nnd kleinsten Linien handelt, die aus gegebenen Puncten nach Bogen der Kegelschnitte gezogen werden können.

Des Apollonius Verfahren besteht darin, zu beweisen, dass jede andere grade Linie aus dem nemlichen

isoperimetrischen Aufgabe.

lichen Puncte nach dem Kegelschnitte gezogen, im Falle des Maximi kleiner, im Falle des Minimi grösser ist, als die für diesen Fall gefundene Linie. Bei diesem Verfahren blieben, nach Apollonius, alle Diejenigen, welche blos durch die Geometrie Aufgaben von Grössten oder Kleinsten auflösen wollten.

339.

Fermat war, wie wir in der achtzehnten Vorlesung sahen, der Erste, welcher ein directes und analytisches Verfahren zur Auflösung solcher Aufgaben zeigte, das hernach durch den Algorithmus der Differential-Rechnung vereinfacht und verallgemeinert worden ist. Dieses Verfahren besteht, wie bekannt, darin, das Differential oder die erste Ableitung der Function, welche ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll, gleich Null zu setzen, indem man die unbekannte Grösse, nach welcher die Function den grössten oder kleinsten Werth haben soll, als veränderlich betrachtet. Wir haben in der Theorie der Functionen die Grundsätze und den Gang dieser Methode in ihrer ganzen Allgemeinheit abgehandelt.

340.

Man kann sagen, dass man den bedeutendsten Theil der Analysis der Theorie der Curven verdankt. Die Ausmittelung der grössten oder kleinsten Ordinaten krummer Linien oder Flächen gab der Aufgabe von den Maximis und Minimis ihre Entstehung. Aber bald erhob man sich zu Aufgaben einer neuen

und schwierigeren Art. Es kam darauf an, die Curven selbst zu finden, in welchen bestimmte Functionen, in ihrer ganzen Ausdehnung, zwischen gegebenen Grenzen, vor allen anderen möglichen Curven [*zwischen den nemlichen Grenzen*] Grösste oder Kleinste sind, z. B. die Curve zu finden, welche, unter gegebenen Bedingungen, den grössten Raum einschliesst, oder welche, durch Umdrehung um eine feste Linie, zwischen gegebenen Grenzen den grössten Körper beschreibt etc. Die Mechanik lieferte die erste Aufgabe dieser Art. Newton suchte zuerst die Curve, welche durch Umdrehung um ihre Axe einen Körper beschreibt, der, wenn er sich in einer flüssigen Masse, nach der Richtung seiner Axe bewegt, den kleinsten Widerstand findet und er hat, ohne Beweis, einen Ausdruck gegeben, nach welchem sich die Curve durch ihre Tangente construiren lässt und welcher gleichsam die Differential-Gleichung der Curve ist.

341.

Vorzüglich aber von der berühmten Aufgabe der Brachystochrone, oder der Linie des schnellsten Falles, welche Johann Bernoulli im Jahre 1693 vorlegte, datirt sich die Entdeckung einer für diese Art von Untersuchungen insbesondere passenden Rechnung.

Nach Art der Differential-Rechnung, welche die Curven als Vielecke von unendlich vielen Seiten annimmt, betrachtet man zwei auf einander folgende Seiten der gesuchten Curve und sucht ihre Lage ge-

gen einander, unter der Bedingung, dass die bestimmte Function ein Maximum oder Minimum sey, indem man nur den Winkel zwischen den beiden, auf einander folgenden, unendlich-kleinen Seiten sich verändern lässt. Auf diese Weise ist die Aufgabe von der gewöhnlichen Art, und die Schwierigkeit besteht blos darin, sie in der Differential-Form auszudrücken. Auf diese Weise fand man, dass die Curve des schnellsten Falles diejenige ist, in welcher der Sinus des Winkels welchen eine ihrer unendlich-kleinen Seiten mit der Verticale macht, sich wie die Geschwindigkeit verhält, die wiederum im Verhältnisse der Quadratwurzel der Höhe steht, von welcher der Körper herabfällt. Drückt man diese Bedingung durch eine Differential-Gleichung aus, so findet man, dass die Curve eine Cycloide ist. Eben so fand man, dass der runde Körper, welcher in einer Flüssigkeit den kleinsten Widerstand findet, durch Umdrehung einer Curve entsteht, welche die von Newton in der Anmerkung zum fünf und dreissigsten Satze des zweiten Theils seiner „Principia“ angegebene Eigenschaften hat. Man wendete späterhin die nemliche Methode auf verwickeltere Aufgaben an, wie z. B. die isoperimetrischen Aufgaben sind, bei welchen es darauf ankommt, unter allen möglichen Curven von demselben Perimeter, oder von derselben Länge, diejenigen zu finden, welche zwischen gegebenen Grenzen den grössten oder kleinsten Raum einschliessen, oder die grössten oder kleinsten Körper beschreiben, oder eine Curve von der Art, dass, wenn man auf

ihrer Axe eine zweite Curve beschreibt, deren Ordinaten beliebige Functionen der Ordinaten und Bogen der ersten Curve sind, die Fläche, welche die zweite Curve einschliesst, ein Maximum oder Minimum ist. Die Schwierigkeiten dieser Aufgabe, verbunden mit der Berühmtheit, welche sie durch die Untersuchungen der beiden Brüder Bernoulli, und durch die Untersuchungen von Tailor und Euler erhielten, haben ihnen einen eigenen Namen gegeben. Man nannte alle Aufgaben, bei welchen es darauf ankommt, Curven zu finden, die irgend eine Eigenschaft des Grössten oder Kleinsten haben, sey es mit, oder ohne die Bedingung der Gleichheit der Länge der Curven-Bogen, isoperimetrische Aufgaben.

342.

Wenn man eine solche Bedingung in Rechnung bringen will, so ist es nicht hinreichend, eine einzelne Ordinate zu verändern, wie, wenn ein absolutes Maximum oder Minimum verlangt wird. Man muss alsdann vielmehr zwei unbestimmte Grössen zugleich verändern, sowohl in dem Ausdrucke, welcher ein Maximum oder Minimum geben soll, als in demjenigen, welcher constant bleiben soll, und darauf die Resultate dieser Veränderungen, oder die der beiden Ausdrücke, wie in den gewöhnlichen Aufgaben von den Grössten und Kleinsten, bei welchen irgend eine besondere Bedingung zwischen den veränderlichen Grössen Statt findet, einzeln gleich Null setzen.

isoperimetrischen Aufgabe.

Johann Bernoulli glaubte, in einem Mémoire, welches zur Auflösung der von seinem Bruder Jacob Bernoulli vorgelegten isoperimetrischen Aufgabe bestimmt war, und sich in der Sammlung der Academie der Wissenschaften von 1706 befindet, dass sich der Bedingung des Grössten und Kleinsten und des Isoperimetrismus zugleich genugthun lasse, wenn man nur zwei Elemente oder Seiten der Curve betrachte und die Abscissen und Ordinaten, welche dem Winkel zwischen den beiden Seiten entsprechen, zugleich verändere, so dass ihre Summe constant bleibe. In der That könnte die Aufgabe, wenn sie sich auf unendliche Grössen bezöge, auf diese Weise aufgelöset werden. Hier aber macht das Unendlich-Kleine, dass die Endgleichung identisch ist und folglich Nichts giebt. Johann Bernoulli kam auf ein anderes Resultat und glaubte die Aufgabe aufgelöset zu haben, aber seine Rechnung ist unrichtig und verstösst gegen die Grundsätze der Differential-Rechnung.

343.

Jacob Bernoulli war der Erste, welcher die Nothwendigkeit einsahe, bei solchen Aufgaben drei auf einander folgende Seiten der Curve, welche den Winkeln zwischen diesen Seiten entsprechen, in Betracht zu ziehen. Hierauf gründet sich seine Auflösung der isoperimetrischen Aufgabe unter dem Titel: „analysis magni problematis isoperimetrici,“ welche zu Basel im Jahre 1701 und in den Leipziger Actis von eben dem Jahre herauskam. Derselbe

Grundsatz hat nachher zu der Tailorschen Auflösung in dessen „methodus incrementorum," ferner zu derjenigen von Johann Bernoulli in den Mémoiren der Academie der Wissenschaften von 1718 und zur Eulerschen Auflösung im siebenten und achten Bande der ältern Petersburger Commentarien gedient.

Durch die Betrachtung eines unendlich kleinen Theils der Curve, als Zusammensetzung zweier oder dreier graden Linien, kommen die Aufgaben auf die gewöhnliche Analysis zurück und die Schwierigkeit besteht blos darin, die Aufgabe durch die Substitution der durch Differenzen ausgedrückten, auf einander folgenden Abscissen und Ordinaten, so in Differential-Gleichungen zu bringen, dass man, nach dem Gesetze der Homogeneïtät der unendlich kleinen Grössen, nur Glieder einerley Ordnung beibehält. Aber die Resultate, welche man auf diese Weise findet, haben selten eine allgemeine und auf alle Aufgaben dieser Art anwendbare Gestalt. Auch giebt es Fälle, wo es nicht hinreicht, einen unendlich kleinen Theil der Curve in Betracht zu ziehen, weil die bestimmte Eigenschaft des Maximi und Minimi für die ganze Curve Statt finden kann, ohne für jeden unendlich kleinen Theil derselben zu gelten. Dergleichen Fälle sind die, wenn die Differential-Function, deren Integral ein Maximum oder Minimum seyn soll, selbst noch eine Integral-Function enthält, sobald diese letzte Integral-Function, nach den Bedingungen der Aufgabe, nicht etwa einen constanten Werth hat. Z. B. wenn die Function, deren Integral ein Maximum

oder Minimum seyn soll, nicht blos von den Abscissen und Ordinaten und ihren Differentialen, sondern auch noch von dem Curven-Bogen abhängt, der, wie bekannt, nur durch eine Integral-Function ausgedrückt werden kann. In einem solchen Falle würde die Auflösung, welche man blos durch Betrachtung eines unendlich kleinen Theils der Curve fände, nicht richtig seyn, sobald die Länge des Curven-Bogens nicht, wie bei der isoperimetrischen Aufgabe, unveränderlich angenommen wird.

Um so mehr ist es bei der Rechnung nicht erlaubt, blos einen kleinen Theil der Curve in Betrachtung zu ziehen, wenn die Differential-Function blos durch eine, im Allgemeinen nicht integrable Differential-Gleichung, von einer gegebenen Grösse abhängt. Deshalb ist selbst die Eulersche Auflösung des Problems von der Brachystochrone, in einem Mittel, dessen Widerstand eine Function der Geschwindigkeit ist, in dem siebenten Bande der ältern Petersburger Commentarien und in dem zweiten Bande der Mechanik, als unrichtig zu betrachten. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man diese Auflösung mit derjenigen in Eulers Werke von 1744 unter dem Titel „methodus inveniendi lineas curvas, maximi minimique proprietate gaudentes" (Art. 46.) vergleicht.

344.

In diesem letzten Werke war es, wo Euler eine allgemeine und vollständige Auflösung der isoperimetrischen Aufgabe gab. Um die Bedingungen des

Maximi und Minimi zu finden, begnügt sich Euler, eine einzelne Ordinate der Curve zu verändern. Er findet daraus den Differential-Werth des Ausdrucks, welcher ein Maximum oder Minimum seyn soll und zwar durch Substitution der successiven Differenzen auf einander folgender Ordinaten, statt der Differentiale der Ordinaten, und der der ganzen Ausdehnung der Curve entsprechenden Summe der Elemente, statt der Integral-Ausdrücke. Seine Rechnung ist auf diese Weise weitläuftig, besonders wegen der unendlichen Reihen, welche vorkommen, wenn die gegebene Function verschiedene Integrale enthält, deren Summe bestimmt werden muss, wenn man richtige Resultate haben will. Man kann aber die Geschicklichkeit, mit welcher der Verfasser diese Schwierigkeiten überwindet und zuletzt einfache, allgemeine und elegante Resultate findet, nicht genug bewundern. Sein Werk ist ausserdem, auch wegen der Menge und Schönheit der Beispiele sehr schätzbar, und es giebt vielleicht keines, welches Denen, die sich in der Integral-Rechnung üben wollen, mehr zu empfehlen wäre.

345.

Bis hierher hatte man die Aufgaben, bei welchen die Veränderung einer Ordinate hinreicht, verschieden von denjenigen behandelt, bei welchen die Veränderung zweier oder mehrerer aufeinander folgender Ordinaten nöthig ist.

Euler bemerkte zuerst, dass alle Aufgaben dieser Art auf einerlei Rechnung gebracht werden kön-

nen, weil wegen der Gleichförmigkeit, die zwischen den, auf verschiedene Puncte einer und derselben Curve sich beziehenden Operationen, Statt finden muss, sobald man das Resultat der Variation einer Ordinate fand, der nemliche Ausdruck, auf die unmittelbar folgende Ordinate bezogen, auch das Resultat der Variation dieser Ordinate geben muss u. s. w.

Diese Bemerkung führte Euler auf einen schönen, und für diesen Gegenstand sehr wichtigen Satz, nemlich, dass man nur, wenn es darauf ankommt eine Curve zu finden, die nur unter allen solchen Curven, welche eine oder mehrere bekannte, gleiche Eigenschaften haben, irgend eine Eigenschaft des Maximi oder Minimi besitzen soll, zu dem Ausdrucke der Eigenschaft des Maximi oder Minimi die Ausdrücke der andern bekannten Eigenschaften, nachdem jeder derselben durch einen willkürlichen und constanten Coefficienten, multiplicirt worden, addiren und dann nur die Curve suchen darf, für welche dieser zusammengesetzte Ausdruck, unter allen möglichen Curven, ein Grösstes oder Kleinstes giebt.

346.

Bezeichnet man nemlich, mit Euler, die unendlich kleine Zunahme der Ordinate y durch $n\nu$, oder blos durch ν, und durch $P\nu$ den Differential-Werth der unbestimmten Integral-Formel $\int z\,dx$, welche ein Maximum oder Minimum seyn soll, so ist $P'\omega$ der Differential-Werth dieser Formel, der von dem In-

cremente ω der folgenden Ordinate y' herkommt, wenn man annimmt, dass P' das bedeutet, was aus P wird, wenn y in y' übergeht und dass alle andere veränderliche Grössen auf die Ordinate y' bezogen werden.

Eben so würde $P''\pi$ der Differential-Werth des nemlichen Ausdrucks seyn, der von dem Incremente π der folgenden Ordinate y'' herkommt, wenn P'' das ist, was aus P wird, wenn y in y'' übergeht u. s. w.

Betrachtet man nun die Ordinaten y, y', y'' *etc.* nach den Grundsätzen der Differential-Rechnung, als einander unendlich nahe, so ist

$$y' = y + dy,\ y'' = y + 2dy + d^2y \text{ etc.}$$

also auch

$$P' = P + dP,\ P'' = P + 2dP + d^2P$$

[*Genügende Gründe, worauf dergleichen Behauptungen der Differential-Rechnung beruhen, möchten wohl schwer anzugeben seyn.*]

Lässt man sich also zwei, auf einander folgende Ordinaten y und y' zugleich verändern, so ist der Differential-Werth von $\int z\,dx$,

$$Pv + (P + dP)\,\omega$$

Lässt man drei, auf einander folgende Ordinaten y, y', y'' sich verändern, so ist der Differential-Werth von $\int z\,dx$,

$$Pv + (P + dP)\,\omega + (P + 2dP + d^2P)\,\pi$$

u. s. w.

isoperimetrischen Aufgabe.

Eben so würde es sich mit allen ähnlichen Ausdrücken verhalten.

Für Curven also, für welche der Ausdruck $\int z dx$ ein absolutes Maximum oder Minimum seyn soll, erhält man, wenn man nur eine Ordinate sich verändern lässt, die Gleichung $Pv = 0$, welche $P = 0$ giebt.

Für Curven, für welche $\int Z dx$, unter allen andern Curven, die mit jener eine gemeinschaftliche, durch die Function $\int Y dx$ ausgedrückte Eigenschaft haben, nur ein relatives Maximum oder Minimum seyn soll, erhält man, wenn man den, der Veränderung ω von y entsprechenden Differential-Werth von $\int Y dx$ durch Qv bezeichnet, zwei Ordinaten sich verändern lässt und den Differential-Werth der Grössen $\int Z dx$ und $\int Y dx$ gleich Null setzt, die Gleichungen

$$Pv + (P + dP)\omega = 0,$$
$$Qv + (Q + dQ)\omega = 0,$$

welche [$PQv + (PQ + QdP)\omega = 0$ *und* $QPv + (QP + PdQ)\omega = 0$, *also*, *Eins vom Andern abgezogen*, $QdP\omega - PdQ\omega = 0$, *oder*]

$$\frac{dP}{P} - \frac{dQ}{Q} = 0$$

geben, wovon das Integral [$\overset{e}{log}\, P - \overset{e}{log}\, Q = \overset{e}{log}\, a$, *oder*]

$$P + aQ = 0$$

ist, wo a eine willkürliche Constante bedeutet.

Diese Gleichung ist, wie man sieht, die nemliche, welche man für das absolute Maximum oder Minimum des Ausdrucks $\int Z dx + a \int Y dx$ finden würde, wenn man nur eine Ordinate sich verändern liesse.

Sollte der Ausdruck $\int Z dx$ in einer derjenigen Curven ein Grösstes oder Kleinstes seyn, in welcher zwei andern Ausdrücke $\int Y dx$ und $\int X dx$ die nemlichen Werthe behalten, so wäre hier ein Fall, in welchem man drei auf einander folgende Ordinaten verändern und die Differential-Werthe der entstehenden Ausdrücke einzeln gleich Null setzen müsste.

Bezeichnet man durch $R v$ den von dem Incremente v herkommenden Differential-Werth von $\int Y dx$, so würde man die drei Gleichungen

$$P v + (P + dP)\omega + (P + 2dP + d^2 P)\pi = 0,$$
$$Q v + (Q + dQ)\omega + (Q + 2dQ + d^2 Q)\pi = 0,$$
$$R v + (R + dR)\omega + (R + 2dR + d^2 R)\pi = 0,$$

oder

$$P(v + \omega + \pi) + dP(\omega + 2\pi) + d^2 P\pi = 0,$$
$$Q(v + \omega + \pi) + dQ(\omega + 2\pi) + d^2 Q\pi = 0,$$
$$R(v + \omega + \pi) + dR(\omega + 2\pi) + d^2 R\pi = 0,$$

haben. Eliminirt man zwei der Grössen v, ω, π, so verschwindet die dritte von selbst, und man erhält eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung zwischen den drei veränderlichen Grössen P, Q, R, deren vollständiges Integral folglich drei willkürliche Constanten enthält. Aber, ohne das Integral zu ent-

isoperimetrischen Aufgabe.

wickeln, ist leicht zu sehen, dass eine Integral-Gleichung von der Form

$$P + aQ + bR = 0$$

den drei obigen Gleichungen genugthut, was auch der Werth der Coefficienten a, b seyn mag, in so fern sie nur Constanten sind. Denn, multiplicirt man die zweite Gleichung mit a, die dritte mit b und addirt die Producte zur ersten, so erhält man, vermöge der vorausgesetzten, eine identische Gleichung [*nemlich die Gleichung*

$$\begin{aligned} &P(\nu + \omega + \pi) + dP(\omega + 2\pi) + d^2P\pi = 0 \\ &+ aQ(\nu + \omega + \pi) + adQ(\omega + 2\pi) + ad^2Q\pi = 0 \\ &+ bR(\nu + \omega + \pi) + bdR(\omega + 2\pi) + bd^2R\pi = 0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist Alles von selbst Null, wenn

$$P + aQ + bR = 0$$

vorausgesetzt wird; denn diese Voraussetzung giebt zugleich

$$dP + adQ + bdR = 0 \text{ und}$$
$$d^2P + ad^2Q + bd^2R = 0;$$

also ist die entstehende Gleichung identisch.] Da nun diese [*vorausgesetzte*] Gleichung [$P + aQ + bR = 0$] zwei willkürliche Constanten a und b enthält, so folgt, dass sie nothwendig das vollständige Integral der gegebenen Gleichung zweiter Ordnung ist. Zugleich sieht man, dass sie keine andere ist, als die, welche das absolute Grösste oder Kleinste des Ausdrucks

$$\int Z dx + a\int Y dx + b\int X dx = 0$$

giebt.

Geschichte der

347.

Uebrigens ist zu bemerken, dass bei den ersten Auflösungen des isoperimetrischen Problems, welche die Bernoulli's, Tailor und Euler selbst gaben, der Differential-Werth des Ausdrucks $\int Z dx$, der unter allen isoperimetrischen Curven ein Grösstes, oder Kleinstet seyn soll, nicht die Form

$$Pv + P'\omega$$

hat, wenn die Function Z den Curven-Bogen s enthält, welches der obigen Eulerschen Theorie entgegen ist.

Man erhält, zum Beispiele, in der Tailorschen Auflösung, welche eine der einfachsten ist, wenn man sich der obigen Bezeichnungen bedient und

$$dZ = L\,dx + M\,dx + N\,dy,$$

und der Kürze wegen, $\frac{dy}{dx} = q$ setzt, folgenden Differential-Ausdruck:

$$(N + Lq)\,dx \,.\, v + (N' + L''q)\,dx \,.\, \omega,$$

welcher von den Veränderungen v und ω der Ordinaten y und y' in den drei Elementen $Zdx + Z'dx + Z''dx$ herkommt, die die einzigen sind, auf welche Tailor Rücksicht nimmt.

Dieser Ausdruck ist aber nicht der des vollständigen Differentials der Integral-Formel $\int Z\,dx$; denn zu Folge der genauen Ausdrücke in dem Eulerschen Werke giebt die Veränderung v der Ordinate y, in dem Ausdrucke $\int Z dx$, allein den Differential-Werth

isoperimetrischen Aufgabe.

$$(N\,dx - d(H - \int L\,dx)\,q)\,v,$$

wo H der, einer gegebenen Abscisse a entsprechende Werth von $\int L\,dx$ ist, für welchen $\int Z\,dx$ ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll, so dass für die beiden gleichzeitigen Veränderungen v und ω, der wahre Differential-Werth

$$(N\,dx - d(H - \int L\,dx)\,q)\,v$$
$$+ (N'\,dx - d(H - \int L\,dx)\,q')\,v$$

ist. Man sieht hieraus, dass Tailors Differential-Ausdruck ein unrichtiges Resultat geben würde, wenn man ihn anwenden wollte, die Curve zu finden, in welcher $\int Z\,dx$, unter allen möglichen Curven, ein Grösstes oder Kleinstes ist, in welchem Falle es hinreichend wäre, auf die Variation einer Ordinate Rücksicht zu nehmen. Denn setzt man diesen Differential-Werth gleich Null und auch ω gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$N + Lq = 0,$$

während Eulers Auflösung

$$N(dx - d(H - \int L\,dx)\,q) = 0$$

giebt, welche Gleichung die richtige ist.

348.

In dem Falle der Isoperimeter kommt es jedoch, dass die beiden Auflösungen übereinstimmen. Denn alsdann ist der Bogen s, das heisst, der Ausdruck $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ oder $\int \sqrt{(1 + p^2)}\,dx$, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt, die gemeinschaftliche Eigenschaft der

Curven; also hat man überdem die Gleichung $\int Y dx$, oder $Y = \sqrt{(1 + p^2)}$, deren Differential-Werth, zugleich mit demjenigen von $\int Z dx$, Null seyn soll.

Vermöge der Construction der Tailorschen Analyse ist aber nun der Differential-Werth dieses Ausdrucks

$$-v\,dq - \omega\,dq' = 0,$$

und nach den Ausdrücken im Eulerschen Werke, ist $v\,dq$ der, der Variation v entsprechende Differential-Werth, so dass man für die beiden Variationen v und ω ebenfalls

$$-v\,dq - \omega\,dq' = 0$$

erhält. Nach Tailor also muss man in diesem Falle die beiden Gleichungen

$$(N + Lq)\,v + (L' + L'q'')\,\omega = 0 \text{ und}$$

$$v\,dq + \omega\,dq' = 0$$

haben, welche, wenn man v und ω eliminirt,

$$(N + Lq)\,dq = (N' + L'q'')\,dq,$$

oder, wenn man $N + dN$ statt N', $L + dL$ statt L', $dq + d^2q$ statt dq' und $q + 2dq + d^2q$ statt q'' setzt, und weglässt, was sich aufhebt,

$$N d^2q + Lq\,dq'' - dN\,dq - dLq\,dq - 2L\,dq''$$
$$- 2dL\,dq'' - L\,dq\,dq'' - dL\,dq\,dq'' = 0$$

geben. Die drei letzten Glieder aber sind von der dritten Ordnung, die beiden ersten nur von der zweiten.

isoperimetrischen Aufgabe.

zweiten. Lässt man also die drei letzten gegen die übrigen, als unendlich klein, weg, so erhält man blos die Gleichung zweiter Ordnung:

$$Nd^2q + Lq\,d^2q - dN\,dq - dLq\,dq - 2L\,d^2q = 0,$$

wie bei Tailor.

Nach Euler würden die beiden Gleichungen

$$(N\,dx - d(H - \int L\,dx)\,q)\,v$$

$$+ (N'\,dx - d(H - \int' L\,dx)\,q')\,\omega = 0 \text{ und}$$

$$v\,dq + \omega\,dq' = 0$$

seyn. Nun ist

$$d(H - \int L\,dx)\,q = -Lq\,dx + (H - \int L\,dx)\,dq$$

$$\text{und } d(H - \int L'\,dx)\,q' = -L'q'\,dx + (H - \int L'\,dx)\,dq'$$

$$= -L'q'\,dx + (H - \int L\,dx)\,dq'$$

$$- L\,dx\,dq',$$

weil

$$\int L'\,dx = \int L\,dx + L'\,dx$$

ist. Bemerkt man nun noch, dass $q' + dq' = q''$ ist, so giebt die erste Gleichung:

$$((N + Lq)\,dx - (H - \int L\,dx)\,dq)\,v$$

$$+ ((N' + L'q')\,dx - (H - \int L'\,dx)\,dq')\,\omega = 0,$$

welches sich, vermöge der zweiten, auf

$$(N + Lq)\,v + (N' + L'q')\,\omega = 0$$

reducirt, und das Nemliche ist, wie bei Tailor. Da nun die beiden anderen Gleichungen ebenfalls übereinstimmen, so ist das Resultat nothwendig das nemliche.

Betrachtet man, in der That, nach dem Eulerschen Satze nur die Variation v allein, so erhält man die Gleichung

$$N\,dx - d(H - \int L\,dx)\,q - a\,dq = 0,$$

wo a eine willkürliche Constante ist.

Diese Gleichung ist das erste Integral des Tailorschen Ausdrucks; denn reducirt man sie auf

$$N\,dx - (H + a - \int L\,dx)\,dq + Lq\,dx = 0,$$

differentiirt sie, nachdem sie mit dq dividirt worden und schafft die Nenner weg, so erhält man die Tailorsche Gleichung.

349.

Ueber die Bernoullische und Eulersche Auflösungen, in dem sechsten und achten Bande der ältern Petersburger Commentarien, liesse sich Aehnliches sagen. Bei dem jetzigen Zustande der Analysis aber sind diese Discussionen von keinem Nutzen mehr, weil sie nur auf Methoden sich beziehen, welche vergessen sind und einfachern und allgemeineren Platz gemacht haben. Sie können indessen noch für Diejenigen einiges Interesse haben, welche den Fortschritten der Analysis nachspüren wollen, so wie, um zu sehen, wie aus besondern, indirecten und verwickelten Methoden allmälig einfachere und allgemeinere entstehen. [*Es ist in der That merkwürdig, dass die Entwickelung der menschlichen Erkenntniss, sowohl im Ganzen als bei Individuen, fast immer den Weg vom Schweren zum Leichten und vom Verwickelten zum Ein-*

isoperimetrischen Aufgabe.

fachen nimmt, anstatt dass es umgekehrt seyn zu müssen scheint. Auch die Mathematik: durch welche grosse Schwierigkeiten hat sie sich nicht, von der Finsterniss des Mittel-Alters her, nachdem die Wissenschaften anfingen, wiedergeboren zu werden, hindurch arbeiten müssen! Wie viel Geistes-Kräfte sind nicht aufgerieben worden durch selbstgeschaffene Hindernisse, die aus jener Eigenthümlichkeit der Gedanken-Entwickelung hervorgingen, welche namentlich in der Mathematik auch die nachtheilige Idee erzeugten, dass sich diese Wissenschaft überall nur synthetisch construiren, also gleichsam das Allgemeine, unmathematisch genug, nur aus dem Besondern ableiten lasse. Wie manche scharfsinnige Werke erschöpften nicht gleichsam die Kraft des Lesers, wie des Verfassers, an einzelnen Fällen und Rechnungen, ehe sich der, vielleicht sehr einfache Begriff des Gegenstandes aus seinen Umgebungen hervorarbeitete und das Wesentliche desselben klar wurde! Man sollte denken, in der Mathematik wenigstens könne dieses Uebel nicht Statt finden. Der Gang der Forschungen ist in der That sonderbar. Man scheut die Abstraction, als sey sie von Allem das Schwierigste und zerarbeitet sich über das weit schwierigere Besondere, während man doch gleichzeitig, umgekehrt, in die spitzfindigste, hyperallgemeine Metaphysik, die zu Nichts führt, hinüber zu schweifen, keineswegest fürchtet. Sonderbare Widersprüche, selbst in der

reinsten Vernunft-Wissenschaft! Die Gewohnheit, beim Besondern und Einzelnen stehen zu bleiben und die Abstraction und das Allgemeine zu meiden, auf der einen, und die Gewohnheit, über die Grenzen der Erkenntniss hinaus, in die Methaphysik hinüber zu irren und kostbare Kräfte an ein Nichts zu verschwenden, auf der andern Seite, scheinen in der That die Haupt-Hindernisse, besonders des Fortschreitens der Mathematik gewesen zu seyn und sind es vielleicht noch. Auch auf dem Wege der Forschung ist wahrscheinlich die Mittelstrasse die beste. Lagrange ist unstreitig in dieser Kunst des Forschens, ein bis jetzt unerreichtes Muster.]

350.

Das oben angeführte Eulersche Werk würde bei Aufgaben, die sich auf Curven beziehen, welche irgend eine Eigenschaft des Grössten oder Kleinsten haben sollen, nichts zu wünschen übrig gelassen haben, wenn ihm eine, dem Geiste der Differential-Rechnung angemessene Rechnungs-Form zur Grundlage gedient hätte. Aber die Zerlegung der Differentiale und Integrale in ihre ersten Elemente, deren sich der Verfasser bedient, zerstört den Mechanismus des Calculs und beraubt ihn seiner vorzüglichsten Vorzüge, der Einfachheit und Allgemeinheit seines Algorithmus.

Es war also noch übrig, zu finden, wie sich die Differential-Rechnung, dieser Art von Aufgaben, die wesentlich für sie gehören, aneignen lasse, und die-

isoperimetrischen Aufgabe.

selben aufzulösen, ohne sich von dem einfachen und gleichförmigen Gange der Rechnung zu entfernen. Dieser Gegenstand ist durch die, in dem zweiten Bande der Mémoiren der Turiner Academie bekannt gemachte Variations-Rechnung [*durch Lagrange*] erreicht worden. Da diese Methode in den meisten, seitdem erschienenen Lehrbüchern der Differential-Rechnung vorgetragen ist, so werden wir uns begnügen, hier blos die Grundzüge derselben anzugeben.

351.

Sie besteht darin, die y in der Integral-Formel mit x und y, welche ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll, durch eine gewöhnliche, aber auf eine andere, von dem gewöhnlichen Zeichen d verschiedene Caracteristik δ sich beziehende Differentiation zu verändern, [*dies ist wohl nicht ganz deutlich, denn die Veränderung geschieht wirklich nicht durch gewöhnliche Differentiation*] den Werth des Differentials der gegebenen Formel nach dem neuen Zeichen δ zu bestimmen, das Zeichen δ hinter die Zeichen d und $\int$ zu setzen, wenn es vor denselben steht, und hernach durch theilweise Integration die Differentiale von δy unter dem Zeichen $\int$ wegzuschaffen.

Es sey zum Beispiel der Ausdruck $\int Z$ gegeben, welcher ein Grösstes oder Kleinstes zwischen gegebenen Grenzen seyn soll, in welchem Z eine gegebene Function von x, y, dy, d^2y *etc.* ist. Man setze dx constant, so ist $\delta \int Z$ der Differential-Werth, wel-

cher, für das Grösste oder Kleinste, Null gleich seyn soll. Also ist

$$\delta \int Z = o,$$

welche Gleichung sich sogleich in

$$\int \delta Z = o,$$

verwandeln lässt.

Angenommen, man differentiirte auf die gewöhnliche Weise, aber nach δ und erhielte, wenn man nur die y, dy *etc.* sich verändern liesse,

$$dZ = N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y \ldots,$$

so hätte man die Gleichung

$$\int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y \ldots = o.$$

Nun aber lässt sich $\int P d\delta y$ statt $\int P\delta dy$ setzen und man erhält, wenn man theilweise integrirt, $P\delta y - \int dP\delta y$.

Eben so lässt sich $\int Q\delta d^2y$ in $\int Q d^2\delta y$ verwandeln, welches, wenn man theilweise integrirt, $Q d\delta y - dQ\delta y + \int d^2Q\delta y$ giebt, u. s, w.

Fügt man also diesen Integralen irgend eine Constante K hinzu, so erhält man die Gleichung

$$P\delta y + Qd\delta y - dQ\delta y + \ldots + K$$
$$+ \int (N - dP + d^2Q - \ldots)\delta y = o.$$

Da alle Differentiale von δy unter dem Zeichen $\int$ weggefallen sind, so kann dieser Theil der Grösse links nicht weiter reducirt werden. Soll also die Gleichung unabhängig von δy Statt finden, so muss zunächst der Coefficient von δy, unter dem Zeichen $\int$, Null seyn, welches die Gleichung

$$N - dP + d^2Q \ldots = o$$

isoperimetrischen Aufgabe.

giebt, die, unbeschränkt, für alle Werthe von x und y, zwischen den nemlichen Grenzen Statt finden muss.

Diese Gleichung ist, mit andern Zeichen, die nemliche, welche zuerst Euler für das Grösste oder Kleinste der Integral-Formel $\int Z\,dx$ fand. Euler setzt $\frac{dq}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$ *etc.* und Z gleich einer Function von $x, y, p, q \ldots$, so dass man durch die Differentiation

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq \ldots$$

erhält. Er lässt hierauf die Ordinate y um die unendlich kleine Linie $n\nu$ sich verändern, indem er den Ausdruck $\int Z\,dx$ als den Ausdruck der Oberfläche einer neuen Curve betrachtet, deren Ordinate Z ist. Er findet alsdann für den Differential-Werth dieser Oberfläche den Ausdruck

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right) n\nu,$$

woraus er die Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0$$

zieht, die mit der obigen übereinstimmt.

Unsre Methode giebt ferner die unbestimmte Gleichung

$$(P - dQ \ldots)\delta y + Q\,d\,\delta y \ldots + K = 0,$$

welche innerhalb der Grenzen Statt finden muss, zwischen welchen der Ausdruck $\int Z\,dx$ ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll.

Man bezeichne die Werthe von y, P, Q...., an der ersten Grenze, wo z. B. $x = a$ ist, durch y_0, P_0, Q_0 *etc.*, dieselben Grössen an der zweiten Grenze, wo $x = b$ ist, durch y_1, P_1, Q_1 *etc.*, so erhält man die beiden Gleichungen

$$(P_0 - dQ_0 + \ldots.)\,\delta y_0 + Q_0\, d\delta y_0 \ldots. + K = 0$$
$$(P_1 - dQ_1 + \ldots.)\,\delta y_1 + Q_1\, d\delta y_1 \ldots. + K = 0,$$

die erste giebt den Werth der Constante K. Substituirt man dieselbe in die zweite Gleichung, so erhält man

$$(P_1 - dQ_1 \ldots.)\,\delta y_1 + Q_1\, d\delta y_1 \ldots.$$
$$-(P_0 - dQ_0 \ldots.)\,\delta y_0 + Q_0\, d\delta y_0 \ldots. = 0,$$

welche Gleichung zur vollständigen Auflösung der Aufgabe noch erfüllt werden muss.

Betrachtet man die Werthe von y_0, y_1, eben so wie diejenigen von $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{dy_1}{dx}$ *etc.* als gegeben, so sind ihre Variationen gleich Null und alle Glieder der obigen Gleichung verschwinden von selbst. Dieses ist der Fall bei der Eulerschen Analyse.

Sind alle diese Werthe, oder blos einige, unbestimmt, oder sind Verhältnisse zwischen ihnen durch die Bedingungen der Aufgabe gegeben, so muss man, nachdem man die Variationen, welche Null seyn sollen, weggelassen und die übrigen auf die möglichst kleinste Zahl gebracht hat, die zurückbleibenden Variationen dadurch wegschaffen, dass man ihre Coefficienten gleich Null setzt, welches eben so viele Gleichungen giebt, denen man vermittelst der willkürlichen Constanten, die die verschiedenen Integratio-

isoperimetrischen Aufgabe.

nen in die Gleichung der Aufgabe einführten, genugthun muss. Man sehe hierüber den zweiten und vierten Band der Turiner Mémoiren und die verschiedenen Werke über die Integral-Rechnung, in welchen diese Theorie vorgetragen wird.

[*Besonders aber wird solches in der folgenden Vorlesung deutlicher. Dieselbe ist eine höchst wichtige Zugabe zu diesem Werke, welche in den „Séances des ecoles normales“ noch nicht vorhanden war.*]

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Fortsetzung der vorigen.

Die Variations-Rechnung, auf Functionen gegründet.

Erklärung der Variations-Rechnung.

352.

Die auf den Gebrauch und die Verbindung der beiden, auf verschiedene Differentiationen sich beziehenden Zeichen *d* und *δ* gegründete Variations-Methode würde nichts zu wünschen übrig lassen, wenn sie nicht, wie die Differential-Rechnung, auf der Vorstellung vom Unendlich-Kleinen beruhete. Um sie mit der Functions-Rechnung zu verbinden, ist es nöthig, sie aus einem andern Gesichts-Puncte zu betrachten. Ich habe dieses zwar schon in der Theorie der Functionen gethan, will aber den Gegenstand hier abermals vornehmen, um ihn noch directer und allgemeiner abzuhandeln.

353.

Wenn eine gegebene Function mehrerer veränderlichen Grössen und ihrer Ableitungen, den in der

Variations-Rechnung.

vorigen Vorlesung gefundenen Bedingungs-Gleichungen nicht entspricht, so hat sie nicht anders eine Stammgrösse, als wenn zwischen den veränderlichen Grössen so viele bestimmte Verhältnisse Statt finden, dass nur noch eine Grösse unbestimmt bleibt. Und die hierher gehörenden Aufgaben von den Grössten und Kleinsten bestehen darin, diejenigen unter jenen Verhältnissen zu finden, für welche die entstehende Stammgrösse, zwischen gegebenen Grenzen, das heisst, zwischen gegebenen Werthen der unbestimmt bleibenden veränderlichen Grösse, ein Grösstes oder Kleinstes ist.

Man sieht, dass eine solche Aufgabe nothwendig davon abhängt, dass die Stammgrösse nicht anders als mit einem bestimmten Verhältnisse zwischen den veränderlichen Grössen Statt findet. Denn gäbe es allgemein eine Stammgrösse mit den verschiedenen veränderlichen Grössen und ihren Ableituugen von bestimmter Form, so wäre sie nur noch eines grössten oder kleinsten Werthes der gewöhnlichen Art, nach jeder einzelnen, als unabhängig betrachteten veränderlichen Grösse und ihren Ableitungen fähig.

[*In diesen wenigen Worten liegt eine deutliche und vollständige Erklärung der Variations-Methode.*

Die bisherige Anwendung dieser Rechnung besteht vorzüglich darin, die Grössten oder Kleinsten von Functionen beliebiger veränderlicher Grössen zu finden, wenn diese Functionen nicht

Erklärung der

unmittelbar, *sondern nur Ableitungen derselben gegeben sind. Es sey z. B. die Ableitung* $\frac{du}{dx} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ *von u gegeben, worin y als abhängig von x betrachtet wird, so ist die Aufgabe die, das Grösste und Kleinste der noch unbekannten, zu* $\frac{du}{dx}$ *gehörigen Stammgrösse u zu finden.*

Bei einer solchen Aufgabe finden nun offenbar zwei verschiedene Fälle Statt.

Nemlich, wie die vorige Vorlesung zeigte, hat entweder die gegebene Ableitung eine Stammgrösse, ohne dass ein bestimmtes Verhältniss zwischen den veränderlichen Grössen vor der Zurückleitung nothwendig wäre, folglich für jedes beliebige unbestimmte Verhältniss; oder sie hat nur dann eine Stammgrösse, wenn ein solches bestimmtes Verhältniss zuvor angenommen wird. Z. B. die Ableitung $\frac{du}{dx} = f(2y^2 - ax)\frac{dy}{dx} + 2cx - ay$ *hat allgemein, für jedes beliebige Verhältniss zwischen x und y, ohne dass vor der Zurückleitung ein solches Verhältniss bestimmt werden dürfte, eine Stammgrösse; selbige ist* $u = y^3 - ayx + cx^2 + Const.$, *woraus, wie man sieht, für das Verhältniss zwischen x und y Nichts folgt, vielmehr bleibt dieses Verhältniss völlig willkürlich. Hingegen die Ableitung* $\frac{du}{dx} = y + 2x\frac{dy}{dx} - ax$ *hat auf keine Weise eine solche Stammgrösse. Es*

Variations-Rechnung.

existirt keine Stammgrösse zu $y + 2x\frac{dy}{dx} - ax$ *anders, als wenn vor der Zurückleitung, willkürlich, irgend ein bestimmtes Verhältniss zwischen* x *und* y *angenommen wird. Z. B. wenn man* $y = x^2$ *setzte, so wäre* $\frac{du}{dx} = x^2 + 4x^2 - ax = 5x^2 - ax$, *wovon die Stammgrösse* $u = \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + Const.$ *oder auch* $u = \frac{5}{3}xy - \frac{1}{2}ay + b$ *ist, wo aber zwischen* x *und* y *vorher das Verhältniss* $y = x^2$ *bestimmt wurde.*

Wenn nun ein Grösstes oder Kleinstes der Grösse u *verlangt wird, so kann, im ersten Falle, offenbar nicht etwa die Frage seyn, welches Verhältniss zwischen* x *und* y *einen grössten oder kleinsten Werth von* u *gebe, weil die Stammgrösse für jedes beliebige Verhältniss zwischen* x *und* y *existirt und folglich nur noch die Frage seyn kann, welche Werthe der in der Stammgrösse vorkommenden veränderlichen Grössen dem grössten oder kleinsten Werthe von* u *entsprechen. Z. B. in dem obigen Falle* $\frac{du}{dx} = (2y^2 - ax)\frac{dy}{dx} + 2cx - ay$, *in welchem, für jedes beliebige Verhältniss zwischen* x *und* y, *die Stammgrösse* $u = y^3 - ayx + cx^2$ *ist, und folglich dieselbe schon eine ganz bestimmte Form hat, kann nur noch die Frage seyn, welche Werthe von* x *und* y *das grösste oder kleinste* u *geben. Man findet sie bekanntlich, wenn man, in so fern etwa weiter keine bestimmte Bedingungs-Gleichung zwischen*

x und y vorhanden ist, sondern die Grössen x und y unabhängig von einander seyn sollen, blos die ersten Ableitungen von u, nach x und nach y nimmt und selbige gleich Null setzt, woraus die Werthe von x und y folgen, die dem grössten oder kleinsten Werthe von u entsprechen. Dieses Verfahren giebt in dem Falle des Beispiels $\frac{du}{dx} = -ay + 2cx = 0$ *und* $\frac{du}{dx} = 3y^2 - ax = 0$, *also* $2cx - ay = 0$ *und* $3y^2 - ax = 0$, *woraus* $y = \sqrt{(\frac{1}{3}ax)}$ *und* $2cx = a\sqrt{(\frac{1}{3}ax)}$, *also* $4c^2x^2 = \frac{1}{3}a^3x$ *und* $x = \frac{a^3}{12c^2}$ *und folglich* $y = \sqrt{\left(\frac{a^4}{36c^2}\right)} = \frac{a^2}{6c}$ *folgt, wodurch also die Aufgabe vollständig aufgelöset ist. Der erste Fall also, wenn zu einer gegebenen Ableitung eine Stammgrösse, unbedingt, und ohne dass irgend ein Verhältniss zwischen den veränderlichen Grössen, vor der Zurückleitung festzusetzen nöthig wäre, existirt, kann ganz nach der gewöhnlichen Methode der Grössten und Kleinsten behandelt werden, und bedarf der Variations-Rechnung nicht.*

Hingegen im zweiten Falle, wenn eine gegebene Ableitung, wie z. B. $u = y + 2x\frac{dy}{dx} - ax$ *auf keine Weise anders eine Stammgrösse hat, als wenn vor der Zurückleitung irgend ein Verhältniss zwischen x und y festgesetzt wird, welches man daran erkennt, dass die in der vorigen Vorlesung gefundenen Bedingungs-Gleichungen nicht*

von selbst erfüllt werden, kann die Frage seyn: welches Verhältniss zwischen x und y für den grössten oder kleinsten Werth von u passe. Denn da das Verhältniss zwischen x und y gänzlich willkürlich ist und die Stammgrösse allemal sogleich Statt findet, und entweder durch endliche Ausdrücke, oder wenigstens durch Reihen angegeben werden kann, sobald man nur irgend ein Verhältniss, welches es auch seyn möge, annimmt, so entsteht allerdings die Frage, welches unter den unzähligen möglichen, dasjenige Verhältniss zwischen z. B. x und y ist, welches den grössten Werth von u giebt. Dann aber muss die Aufgabe noch wieder Bedingungsweise gestellt seyn; nemlich, dass man finden solle, welches Verhältniss, z. B. zwischen x und y Statt finden müsse, damit der dazu gehörige Werth von u, in dem Umfange von irgend einem bestimmten Werthe der unabhängig bleibenden veränderlichen Grösse an, bis zu einem andern bestimmten Werthe derselben, ein Grösstes oder Kleinstes sey, weil sonst die Frage unbestimmt wäre und man, um sie zu beantworten, dergleichen Anfangs- und Endpuncte der unabhängig bleibenden veränderlichen Grösse willkürlich annehmen müsste. Die Beantwortung dieser Frage gehört dann ausschliesslich für die Variations-Rechnung. Ist das, dem Grössten oder Kleinsten angemessene Verhältniss zwischen den veränderlichen Grössen gefunden, so lässt sich auch die Stammgrösse, wie immer, sobald die

nöthige Bestimmung des Verhältnisses zwischen den veränderlichen Grössen erfolgt ist, angeben und der grösste und kleinste Werth selbst, findet sich unmittelbar durch die gewöhnliche Methode. Auch die Bestimmung der Anfangs- und Endpuncte der unabhängig veränderlichen Grösse kann noch, Statt unbedingt gegeben zu seyn, Bedingungen unterworfen seyn, die sich ebenfalls auf das Grösste oder Kleinste beziehen können. Solchen Bedingungen kann, weil nunmehr die Form der Abhängigkeit der veränderlichen Grösse gefunden ist, auf die Art wie bei den gewöhnlichen Grössten und Kleinsten bestimmter Functionen, genuggethan werden. Desgleichen ist allemal die Stammgrösse, welche man, mit den für das Grösste oder Kleinste nothwendigen Verhältnissen zwischen den veränderlichen Grössen, findet, noch in Rücksicht auf die Constanten, die jede Stammgrösse enthält, unbestimmt. Diese Constanten finden sich ebenfalls durch die Gleichung, welche das nothwendige Verhältniss zwischen den veränderlichen Grössen bestimmt, wie sich alles dieses weiter unten näher zeigt.

Hier war nur vorläufig zu bemerken, dass ausschliesslich der Fall, wenn eine gegebene Ableitung nicht unbedingt für jedes beliebige Verhältniss zwischen den darin vorkommenden veränderlichen Grössen eine Stammgrösse hat, das heisst, der Fall, wenn eine Ableitung die Bedingungs-Gleichungen der vorigen Vorlesung **nicht** *erfüllt,*

erfüllt, für die Variations-Rechnung gehört. Der entgegengesetzte Fall bedarf derselben nicht.]

Anwendung auf $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots\right)$.

I. Verwandlung der gegebenen Ableitung.

354.

Wir wollen nun irgend eine Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ annehmen und dieselbe durch v bezeichnen [*so dass also*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots\right)$$

ist.] Es werde vorausgesetzt, dass diese Function, in dem Zustande, wie sie ist, [*oder unabhängig von bestimmten Verhältnissen zwischen x und y*] keine Stammgrösse habe, und dass man, damit sie eine Stammgrösse habe,

$$y = \varphi x$$

setzen müsse. Soll nun die, alsdann [*für* $y = \varphi x$] entstehende Stammgrösse, die wir durch u bezeichnen wollen, zwischen bestimmten, gegebenen Werthen von x entsprechenden, Grenzen [*das heisst in dem Umfange, den die Grösse u, von irgend einem bestimmten Werthe des Elementes x an, bis zu irgend einem andern bestimmten Werthe desselben hat*] ein Grösstes oder Kleinstes seyn, so muss der Werth von u, zwischen jenen Grenzen, wenn man die durch φx bezeichnete A b h ä n g i g k e i t der

Grösse y von der Grösse x sich verändern lässt, sey es auch noch so wenig, im Falle des Grössten, abnehmen und im Falle des Kleinsten, zunehmen.

355.

Man setze, der Ausdruck von y sey allgemein irgend eine Function von x und k, welche wir durch $\varphi(x, k)$ bezeichnen wollen und die von der Art ist, dass sie für $k = 0$ in φx übergeht. [*Es wird also hier nicht etwa, wie in der Ableitungs-Rechnung, angenommen, dass der Werth von x, in y, sich um k verändere, oder dass $y = \varphi x$ in $\varphi(x + k)$ übergehe, sondern es wird angenommen, dass die willkürliche Grösse k, auf irgend eine beliebige Weise, der durch φx ausgedrückten Grössen-Verbindung hinzutrete, blos unter der einzigen Bedingung, dass $\varphi(x, k)$ für $k = 0$, wieder φx giebt. Unter $\varphi(x, k)$ kann man sich also nicht blos $\varphi(x + k)$, wie in der Ableitungs-Rechnung, sondern auch z. B. $\varphi(x + \alpha kx + \beta kx^2 + \gamma kx^3 \ldots)$, oder $\varphi(x + \log(1 + k))$, oder $\varphi(xe^k)$, oder $\varphi(x \cos k)$, oder was man sonst will, vorstellen, wenn nur der neue Ausdruck mit k von der Art ist, dass er für $k = 0$ wieder φx giebt. Da auf diese Weise durch k die Form der Grösse φx wesentlich verändert wird, nicht blos der Werth von φx, wie in der Ableitungs-Rechnung, so könnte man, dieses Umstandes wegen, die Variations-Rechnung, im Deutschen, Form-Verwandlungs-Rechnung nennen.*]

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots\right).$$

Die Function u wird nothwendig ebenfalls eine Function von x und k seyn, und damit sie ein Grösstes oder Kleinstes sey, muss sie, während die Zusammensetzung der Grösse (φ, k), was k anlangt, willkürlich ist, wenn man k einen sehr kleinen Werth giebt, im Falle des Grössten [*gegen* φx] abnehmen, und im Falle des Kleinsten zunehmen. Entwickelt man diese Function nach Potenzen von k, zu Folge der neunten Vorlesung, so erhält man, wenn man die Ableitungen nach k, nachdem darin, nach der Ableitung, $k = 0$ gesetzt worden, durch $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ etc. bezeichnet,

$$u + k\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{\delta^3 u}{\delta x^3} \dots$$

[*Betrachtet man nemlich die zu entwickelnde Function* $u = F(x, k)$ *nicht sowohl als Function von* x, *sondern als Function von* k *und nimmt an*, k *wachse um* $\varkappa$, *so erhält man*

$$F(x, k + \varkappa) = u + \varkappa\frac{du}{dk} + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{d^2u}{dk^2} + \frac{\varkappa^3}{2.3}\frac{d^3u}{dk^3} \dots$$

Setzt man hierin $k = 0$, *so erhält man*

$$F(x, \varkappa) = u + \varkappa\frac{d\,0u}{dk} + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{d^2\,0u}{dk^2} + \frac{\varkappa^3}{2.3}\frac{d^3\,0u}{dk^3} \dots$$

und setzt man $\varkappa = k$:

$$F(x, k) = u + k\frac{d\,0u}{dk} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2\,0u}{dk^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3\,0u}{dk^3} \dots$$

Dieses ist die allgemeine Entwickelung der, durch beliebige Einführung der Grösse k, *der Form und dem Werthe nach in* $F(x, k)$ *verwandelten Grösse*

Fx. Die Grössen $\frac{dou}{dk}$, $\frac{d^2ou}{dk^2}$ *etc., bedeuten die* *Ableitungen* *der Grösse* $F(x, k)$ *nach* k, *unter der Bedingung, dass darin* $k = 0$ *gesetzt wird. Man sieht, dass die Werthe derselben von der Art abhängen, wie sich* k *in* $F(x, k)$ *mit* x *verbindet und da diese Art ganz willkürlich ist, so folgt, dass auch die Abhängigkeit der Grössen* $\frac{dou}{dk}$, $\frac{d^2ou}{dk^2}$ *von* u, *gänzlich willkürlich ist. Auch ist leicht zu sehen, dass die Grössen gar kein* k *mehr, sondern blos* x *enthalten, weil* k *gleich Null gesetzt worden ist.*

Lagrange *bezeichnet diese Grössen durch* $\dot{u}$, $\dot{u}^2$, $\dot{u}^3$ *Da sich aber gegen diese Bezeichnung ungefähr das Nemliche, wie gegen die Bezeichnung der Ableitungen durch Striche sagen lässt, so hat der Uebersetzer die alte gewöhnliche Bezeichnung beibehalten, nur mit dem Unterschiede, dass, wie bei den Ableitungen, die Nenner der Grössen* $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ *etc. blos anzeigen, dass die Grössen von einer Function* Fx *herrühren, in welcher das Element, oder die unabhängig veränderliche Grösse,* x *ist. Die Bezeichnung muss um so mehr blos auf* x *deuten, weil die Grössen wirklich, wie oben bemerkt, etwa kein* k, *sondern blos* x *enthalten. Man nennt diese Grössen gewöhnlich* *Variationen*, *z. B.* $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ *Varia-*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

tionen der Grösse u. Der Uebersetzer bezeichnet, bei seinen eignen Arbeiten, dergleichen Grössen durch $\frac{\delta}{x}u$, $\frac{\delta^2}{x^2}u$ *etc. und nennt sie Verwandlungs-Coefficienten.*]

II. Beziehung der verwandelten Ableitung auf den Fall des Grössten oder Kleinsten.

356.

Die von der Grösse k herrührende Zunahme von u ist also

$$k\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \ldots$$

und für das Grösste muss diese Zunahme, wenn k eine von x unabhängige, sehr kleine Grösse ist, immer negativ, für das Kleinste immer positiv seyn [*k selbst sey positiv oder negativ*].

Nun ist in der oben erwähnten Vorlesung gezeigt worden, dass man k immer so klein annehmen kann, dass das erste Glied $k\frac{\delta u}{\delta x}$ grösser ist, als alle übrigen Glieder zusammen genommen. Daraus folgt, dass dann die gesammte Zunahme das nemliche Zeichen hat, wie $k\frac{\delta u}{\delta x}$. Nun wechselt aber das Glied $k\frac{\delta u}{\delta x}$ das Zeichen mit der Grösse k, welche darin nur in der ersten Abmessung vorkommt. Also ist es unmöglich, dass die gesammte Zunahme von u,

Anwendung der Var. auf

für alle mögliche, beliebig kleine [*positive und negative*] Werthe von k, immer nur positiv, oder immer nur negativ seyn kann, wenn nicht das erste Glied $k\frac{\delta u}{\delta x}$ der Zunahme von u verschwindet, welches die Bedingung

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

giebt, welche, wie man sieht, für beide, für das Grösste und für das Kleinste, erfüllt werden muss.

Ist dieselbe erfüllt, so bleibt von der Zunahme noch

$$\frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{\delta^3 u}{\delta x^3} \dots$$

übrig und durch ein, dem obigen ähnliches Raisonnement lässt sich zeigen, dass das erste Glied dieses Rests $\frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ positiv seyn muss, wenn es der ganze Rest seyn soll und negativ, wenn der ganze Rest negativ seyn soll [*weil das erste Glied durch ein hinreichend kleines k immer grösser gemacht werden kann, als der ganze übrige Rest*]. Nun aber enthält das erste Glied $\frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ das Quadrat von k, also ist sein Zeichen von dem Zeichen von k unabhängig und hängt folglich nur von dem Zeichen von $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ allein ab [*weil die Quadrate, sowohl positiver als negativer Grössen immer positiv sind*]. Diese Grösse $\frac{\delta^2 u}{\delta\ ^2}$ muss also, im Falle des Grössten, nothwendig im-

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

mer negativ, im Falle des Kleinsten immer positiv seyn, welches das unterscheidende Kennzeichen der Grössten und Kleinsten ist.

Dieses ist die allgemeine Theorie der Grössten und Kleinsten, welche wir in Erinnerung bringen zu müssen glaubten, um keine Lücke zu lassen.

357.

Bei den gewöhnlichen Aufgaben ist die Grösse u, welche ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll, eine gegebene Function von x und die Ableitungen von u werden nach x genommen. In diesem Falle geht die obige Bedingungs-Gleichung des Grössten und Kleinsten $\frac{\delta u}{\delta x} = 0$ in $\frac{du}{dx} = 0$ über und giebt den Werth von x [*der dem Grössten oder Kleinsten entspricht*]. Nächstdem zeigt das Zeichen von $\frac{d^2u}{dx^2}$ an, ob ein Grösstes oder ein Kleinstes Statt finde.

Bei der gegenwärtigen Aufgabe ist die Grösse u [*nicht selbst*, *sondern*] nur ihre Ableitung v gegeben. Die Function [$y =$] φx ist unbekannt und die Variationen $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \ldots$ sind Ableitungen nach der Grösse k, welche man in $\varphi(x, k)$ enthalten annimmt. Also kommt es nun zuerst darauf an, die Variationen von v zu finden.

Anwendung der Var. auf

III. Entwickelung der verwandelten, gegebenen Ableitung.

358.

Da $y = \varphi x$ ist, so geht y in

$$y + k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}\ldots.$$

über, wenn $\varphi(x, k)$ aus φx wird, wo wiederum $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ *etc.* die Ableitungen von $\varphi(x, k)$ nach k bedeuten, in welchen k gleich Null gesetzt worden. Diese Grössen sind [*wie oben* $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\ldots.$] blos Functionen von x, welche selbst beliebige Werthe haben können, weil die Zusammensetzungs-Form von $\varphi(x, k)$, in Hinsicht auf k willkürlich ist.

Nimmt man nun die Ableitungen [*der obigen Grössen*] nach x, so ist klar, dass $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ *etc.* in

$$\frac{dy}{dx} + k\frac{d\frac{\delta y}{\delta x}}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}}{dx}\ldots.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k\frac{d^2\frac{\delta y}{\delta x}}{dx^2} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}}{dx^2}\ldots.$$

etc. übergehen [*wenn* $\varphi(x, k)$ *aus* φx *wird*] u. s. w.

[*Hier könnte man eine kleine Schwierigkeit finden. Lagrange nemlich sagt, man solle die*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

Ableitungen der obigen Grösse $y + k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ *.... nehmen, so finde man, was aus* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ *wird, wenn* φx *in* $\varphi(x, k)$ *übergeht; denn dieses ist der Sinn der vorhergehenden Worte. Dieses setzt also voraus, dass man das Nemliche erhalte, man möge die Ableitungen der Grösse* $\varphi(x, k)$ *nach* x *nehmen, oder in die Grössen* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, *die man sich als Functionen von* $y = \varphi x$ *vorstellen kann, weil sie Functionen von* x *sind,* $\varphi(x, k)$ *statt* φx *setzen. Allerdings ist dieses wirklich der Fall, allein es scheint doch, als wenn dieser Umstand erst bewiesen werden müsse. Man findet den allgemeinen Beweis im zweiten Bande der Sammlung mathematischer Abhandlungen des Uebersetzers S. 56. etc., aus welchem folgt, dass wirklich Grössen, wie* $\frac{d\frac{\delta y}{\delta x}}{dx}$ *und* $\frac{\delta\frac{dy}{dx}}{\delta x}$, $\frac{d^2\frac{\delta y}{\delta x}}{dx}$ *und* $\frac{\delta\frac{d^2y}{dx^2}}{\delta x}$ *u. s. w. völlig Eins und dasselbe sind. Man kann dieserhalb auch die obigen Ausdrücke dessen, was auch* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ *wird, wenn* φx *in* $\varphi(x, k)$ *übergeht, wie folgt schreiben:*

$$\frac{dy}{dx} + k\frac{d\delta y}{dx\,\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{d\delta^2 y}{dx\,\delta x^2} \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k\frac{d^2\delta y}{dx^2\,\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2\,\delta x^2} \ldots \text{]}$$

Anwendung der Var. auf

Setzt man diese Grössen statt y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$... in die gegebene Grösse $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$, so erhält man

$$\left[v + \Delta v = f\left(x, y + k\frac{\delta y}{\delta x} \ldots, \frac{dy}{dx} + k\frac{d\delta y}{dx\,\delta x} \ldots, \frac{d^2y}{dx^2} + k\frac{d^2\delta y}{dx^2\,\delta x} \ldots\right) =\right]$$

$$v + k\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \ldots$$

wo, zu Folge der in der ersten Vorlesung vorgetragenen Theorie der Functionen, leicht zu sehen, dass die Grösse $\frac{\delta v}{\delta x}$, welche, mit k multiplicirt, das erste Glied der Entwickelung giebt, nichts anders ist, als die Ableitung von v, unter der Bedingung, dass man darin x constant setzt und y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ als unabhängig veränderliche Grössen betrachtet, deren Ableitungen $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{d\delta y}{dx\,\delta x}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2\,\delta x}$ *etc.* sind. Eben so ist $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$ die Ableitung von v zweiter Ordnung nach eben jenen Grössen, wenn $\frac{d\delta^2 y}{dx\,\delta x^2}$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2\delta x^2}$ die Ableitungen zweiter Ordnung von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ *etc.* sind u. s. w. [*Man setze nemlich*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

$$k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx\,\delta x^2} \ldots = \Delta y$$

$$k\frac{d\delta y}{dx\delta x} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx\,\delta x^2} \ldots = \Delta\frac{dy}{dx}$$

$$k\frac{d^2\delta y}{dx^2\delta x} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2\,\delta x^2} \ldots = \Delta\frac{d^2y}{dx^2} \text{ u. s. w.}$$

so geht $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$ *in*

$$v + \Delta v = f\left(x, y + \Delta y, \frac{dy}{dx} + \Delta\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} + \Delta\frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$$

über, wenn $\varphi(x, k)$ *aus* $y = \varphi x$ *wird. Dieses giebt, wenn man die Grösse nach den Regeln der Ableitungen entwickelt,*

$$v + \Delta v = v + \frac{dv}{dy}\Delta y + \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \Delta\frac{dy}{dx} + \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \Delta\frac{d^2y}{dx^2} \ldots$$

$$+ \frac{d^2v}{dy^2} \cdot \frac{\Delta y^2}{2} + \frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{\left(\Delta\frac{dy}{dx}\right)^2}{2} \ldots$$

Setzt man hierin die obigen Werthe von Δy, $\Delta\frac{dy}{dx}$ *etc., so erhält man*

$$v + \Delta v = v + \frac{dv}{dy}\left(k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \ldots\right)$$

$$+ \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}\left(k\frac{d\delta y}{dx\,\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{d\delta^2 y}{dx\,\delta x^2} \ldots\right)$$

$$+ \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\left(k\frac{d^2\delta y}{x^2\,\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2\,\delta x^2} \ldots\right) \text{ etc.}$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{d^2v}{dy^2}\left(k\frac{\delta y}{\delta x}\dots\right)^2+\tfrac{1}{2}\frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(k\frac{d\delta y}{dx\,\delta x}\dots\right)^2 \text{ etc.}$$

oder

$$v+\Delta v=$$

$$v+k\left(\frac{dv}{dy}\cdot\frac{\delta y}{dx}+\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}\cdot\frac{d\delta y}{dx\,\delta x}+\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2\,\delta x}\dots\right)$$

$$+\frac{k^2}{2}\left(\frac{dv}{dy}\cdot\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}+\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx\delta x^2}\dots\right.$$

$$\left.+2\frac{d^2v}{dy^2}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2+2\frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(\frac{d\delta y}{dx\delta x}\right)^2\dots\right).$$

$$+\frac{k^3}{2.3}(\dots).$$

Die Coefficienten zu k, $\frac{k^2}{2}$, $\frac{k^3}{2.3}$.... *wurden nun hier oben durch* $\frac{\delta v}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$.... *bezeichnet, so dass*

$$v+\Delta v=v+k\frac{\delta v}{\delta x}+\frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$$

ist. Man sehe auch wegen dieser Entwickelungen die oben erwähnte Abhandlung des Uebersetzers, in dem zweiten Bande der Sammlung von Abhandlungen, S. 44. etc.]

359.

Wir wollen allgemein die mit δ bezeichneten Ableitungen nach k, in welchen k nachher gleich Null gesetzt worden ist, Variationen der ersten, zweiten etc. Ordnung nennen. So ist $\frac{\delta y}{\delta x}$ die Va-

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

riation erster Ordnung [*oder die erste Variation*] von y, $\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}$ ist die gewöhnliche erste Ableitung dieser Variation, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ ist die zweite Variation von y u. s. w. Eben so sind $\frac{\delta v}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$ *etc.* die Variationen erster, zweiter Ordnungen von v; $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ *etc.* die Variationen erster, zweiter Ordnung von u u. s. w. Um diese Variationen zu entwickeln, kann man sich der Regeln für die gewöhnliche Ableitung bedienen.

360.

Diesemnach ist für

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right),$$

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x} + \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x} \cdots$$

[*Man sehe die obige Anmerkung zu* 358.]

Es ist klar, dass diese Function $\frac{\delta v}{\delta x}$ das Nemliche ist, was wir oben, im Anfange der vorigen Vorlesung [*in* 324.] durch $\overset{1}{v}$ bezeichneten, wenn man nur $\frac{\delta y}{\delta x}$ mit ω verwechselt, weil wir alsdann blos die Zunahme von y, $k\omega$ setzen müssten.

[*Geht man das Bisherige durch, so ist leicht zu sehen, dass hauptsächlich Alles darauf ankam,*

analytisch auszudrücken, dass die *Abhängigkeit* der Grösse y von der Grösse x sich verändern solle. Dieses ist dadurch geschehen, dass man statt $y = \varphi x$ überall die Grösse $\varphi(x, k)$, und zwar in der entwickelten Gestalt $y + k\frac{\delta y}{\delta x} + + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \ldots\ldots$ einführte. *Der Werth von* x *dagegen blieb überall unverändert.* Ein wesentlicher Unterschied der gegenwärtigen Operation von der gewöhnlichen Ableitungs-Operation besteht also darin, dass man die von x abhängende Grösse y sich verändern lässt, *ohne dass sich* x *selbst ändert*, ganz auf die Weise, wie oben bei der Untersuchung der Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität in (324. etc.) geschahe, wo es ebenfalls darauf ankam, die *Abhängigkeit*, z. B. der Grösse y von der Grösse x zu verändern. Da die durch $\varphi(x, k)$ bezeichnete veränderte Form der Grösse φx gänzlich willkürlich ist, so scheint zu folgen, dass solche auch vielleicht blos $\varphi(x + k)$ seyn könne und dass man sich also auch unter den Variationen bloss Ableitungen vorstellen könne, deren *Werthe*, bei einfach zusammengesetzten Grössen, den durch d bezeichneten Ableitungen ganz gleich, bei mehrfach zusammengesetzten Grössen aber nur etwa dadurch von den Ableitungen verschieden seyn, dass sich die letzten zugleich auf die unabhängig veränderlichen Grössen mit erstrecken, die Variationen aber nicht, so dass also z. B.

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}, \; \frac{d\delta y}{dx\,\delta x} = \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ etc.}$$

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{d(v)}{dx} - \frac{dv}{dx}, \; \frac{\delta^2 v}{dx^2} = \frac{d^2(v)}{dx^2} - \frac{d^2 v}{dx^2} \text{ etc.}$$

sey. Wäre dieses der Fall, so liesse sich die Variations-Rechnung ganz auf die gewöhnliche Ableitungs-Rechnung bringen und selbst das neue Zeichen δ ersparen. Dieses geht indessen nicht allgemein an, wie sich weiter unten zeigen wird. Um diesen Umstand deutlicher sichtbar zu machen, wollen wir, bis dahin, wo sich das Gegentheil zeigt, annehmen, man könne wirklich statt der Variationen blosse Ableitungen setzen und die danach veränderten Ausdrücke denen mit Variationen beifügen.]

361.

Da nun u die Stammgrösse von v seyn soll, wenn $y = \varphi x$ ist, was auch φx seyn mag, so ist sie es auch noch, wenn man $\varphi(x, k)$ statt φx setzt [*und x unverändert lässt*]. In diesem Falle geht, wie wir gesehen haben,

$$u \text{ in } u + k\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \ldots. \text{ und}$$

$$v \text{ in } v + k\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \ldots.$$

über. Da k eine beliebige Grösse seyn kann, so müssen nothwendig auch die Variationen $\frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ *etc.*

Anwendung der Var. auf

die Stammgrössen der Variationen $\frac{\delta v}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$ *etc.* seyn, so dass

$$\frac{d\frac{\delta u}{\delta x}}{dx} = \frac{\delta v}{\delta x},\ \frac{d\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}}{dx} = \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \text{ etc.}$$

ist.

[*Dass nemlich* $u + k\frac{\delta u}{\delta x} \dots$ *nothwendig die Stammgrösse von* $v + k\frac{\delta v}{\delta x} \dots$ *seyn muss, ist klar, weil u, nach der Voraussetzung, die Stammgrösse von v seyn soll, welches auch die Abhängigkeit der Grösse y von x seyn möge, also auch, wenn sich diese Abhängigkeit beliebig verändert. Geschieht solches nun, und zwar auf die Weise, dass* $y = \varphi x$ *in* $\varphi(x, k)$ *übergeht, so geht dadurch v in* $v + k\frac{\delta u}{\delta x} \dots$ *und u in* $u + k\frac{\delta u}{\delta x} \dots$ *über. Also ist nothwendig Letzteres die Stammgrösse von Ersterem. Dass aber die einzelnen Glieder* $\frac{\delta u}{\delta x}$ *etc. die Stammgrössen von* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *etc. sind, folgt daraus, dass diese Glieder nur Functionen von x, von k aber unabhängig sind, so dass man, wenn man die Ableitung von* $u + k\frac{\delta u}{\delta x} \dots$ *nähme, nur eine Grösse von der Form* $\frac{du}{dx} + k\frac{d\delta u}{dx\,\delta x} \dots$ *erhalten würde. Da diese Grösse gleich*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

gleich $v + k\frac{\delta v}{\delta x} \ldots$ *seyn soll, so folgt, dass* $\frac{d\delta u}{dx\,\delta x} = \frac{\delta v}{\delta x}$ *ist etc.*

Ohne das Zeichen δ *erhielte man Folgendes. Verändert man nemlich den Werth von* y *auf die gewöhnliche Weise, nemlich so, dass man statt* y *den Werth setzt, den diese Grösse erhält, wenn* x, *obgleich solches nicht der Fall ist, in* $x + k$ *übergeht, jedoch so, dass blos* y *sich verändert, nicht* x, *so geht*

$$v \text{ in } v + \Delta' v =$$

$$v + k\left(\frac{d(v)}{dx} - \frac{dv}{dx}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2(v)}{dx^2} - \frac{d^2v}{dx}\right) \ldots$$

$$u \text{ in } u + \Delta' u =$$

$$u + k\left(\frac{d(u)}{dx} - \frac{du}{dx}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2(u)}{dx^2} - \frac{d^2u}{dx^2}\right) \ldots$$

über. Da nun u *immer die Stammgrösse von* v *seyn soll, auch für eine veränderte Abhängigkeit der Grösse* y *von der Grösse* x, *so ist nothwendig auch* $u + \Delta' u$ *die Stammgrösse von* $v + \Delta' v$. *Also muss man, wenn man von* $u + \Delta' u$ *die erste Ableitung nimmt,* $v + \Delta' v$ *erhalten. Dieses giebt*

$$\frac{du}{dx} + k\frac{d\left(\frac{d(u)}{dx} - \frac{du}{dx}\right)}{dx} + \frac{k^2}{2}\,\frac{d\left(\frac{d^2(u)}{dx^2} - \frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dx^2} \ldots$$

$$= v + k\left(\frac{d(v)}{dx} - \frac{dv}{dx}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2(v)}{dx^2} - \frac{d^2v}{dx^2}\right) \ldots,$$

woraus

Anwendung der Var. auf

$$\frac{d(v)}{dx}-\frac{dv}{dx}=\frac{d\left(\frac{d(u)}{dx}-\frac{du}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2(u)}{dx^2}-\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx},$$

$$\frac{d^2(v)}{dx^2}-\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{d^2(u)}{dx^2}-\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dx^2}=\frac{d^3(u)}{dx^3}-\frac{d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dx}$$

etc. folgt, wie oben.]

IV. Allgemeine Bedingungs-Gleichung des Grössten oder Kleinsten.

362.

Die Bedingung des grössten oder kleinsten Werths der Grösse u besteht also darin, dass die Stammgrösse von $\frac{\delta v}{\delta x}$ gleich Null seyn muss, für jeden beliebigen Werth von $\frac{\delta y}{\delta x}$. [*Denn diese Stammgrösse ist* $\frac{\delta u}{\delta x}$ (361.) *und* $\frac{\delta u}{\delta u}=0$ *ist die Bedingung des grössten oder kleinsten Werths von* u (356.)] Wir wollen, der Kürze wegen, den obigen Werth von $\frac{\delta v}{\delta x}$ [361.] durch

$$\frac{\delta v}{\delta x}=N\frac{\delta y}{\delta x}+P\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}+Q\frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x}\ldots.$$

bezeichnen [*so dass also*

$$N=\frac{dv}{dy},\ P=\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}},\ Q=\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\ etc.$$

ist. Ohne das Zeichen δ *wäre dieser Ausdruc*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

folgender:

$$\frac{d(v)}{dx} - \frac{dv}{dx} = N\frac{dy}{dx} + P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{d^3y}{dx^3} \ldots]$$

Wendet man auf diesen Ausdruck, in Beziehung auf die Grösse $\frac{\delta y}{\delta x}$ [*oder, ohne das Zeichen* δ, *auf die Grösse* $\frac{dy}{dx}$] die nemlichen Verwandlungen an, wie oben, im Anfange der vorigen Vorlesung [*in* 322. *und* 324.] in Beziehung auf die Grösse ω und ihre Ableitungen, in dem dortigen Ausdrucke von $\overset{1}{v}$, welche Verwandlungen den Zweck hatten, alle Glieder mit Ableitungen von $\frac{\delta y}{\delta x}$, auf vollständige Ableitungen zu reduciren, so erhält mau [*wenn man in* (322.) $\frac{\delta v}{\delta x}$ *statt des dortigen* $\overset{1}{v}$, $\frac{\delta y}{\delta x}$ *statt des dortigen z und x statt des dortigen* η *setzt*] folgenden verwandelten Ausdruck:

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\right)\frac{\delta y}{\delta x}$$

$$+ \frac{d\left(P\frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dQ}{dx}.\frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{d^2R}{dx^2}.\frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} - \ldots$$

$$+ \frac{d\left(Q\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dR}{dx}.\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}\right)}{dx} + \ldots$$

$$+ \frac{d\left(R\frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x}\right)}{dx} \ldots$$

Anwendung der Var. auf

[*Ohne das Zeichen δ ist der Ausdruck folgender:*

$$\frac{d(v)}{dx} - \frac{dv}{dx} = \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\right)\frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{d\left(P\frac{dy}{dx}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{d^2R}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \ldots$$

$$+ \frac{d\left(Q\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dR}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} + \ldots$$

$$+ \frac{d\left(R\frac{d^3y}{dx_3}\right)}{dx} - \ldots].$$

Wie man sieht, sind in diesem Ausdrucke alle Glieder, ausser denjenigen in der ersten Zeile, vollständige Ableitungen, so dass ihre Stammgrössen bestimmt sind und gefunden werden können, welches auch die Grösse $\frac{\delta y}{\delta x}$ [*oder* $\frac{dy}{dx}$] seyn mag. Die mit $\frac{\delta y}{\delta x}$ multiplicirten Glieder der ersten Zeile dagegen können nur dann eine Stammgrösse haben, wenn man der Variation $\frac{\delta y}{\delta x}$ [*oder der Ableitung* $\frac{dy}{dx}$] einen bestimmten Werth giebt. Da nun diese Variation [*oder diese Ableitung*] unbestimmt bleiben soll, so ist es unmöglich, dass die Stammgrösse von $\frac{\delta y}{\delta x}$ Null sey, wenn nicht die erste Zeile des Ausdrucks von $\frac{\delta v}{\delta x}$ verschwindet [*weil sie sonst gar nicht ohne ein bestimmtes Ver-*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x} \dots\right).$$

hältniss zwischen x und y existirt.] Dieses giebt die von $\frac{\delta y}{\delta x}$ [*oder* $\frac{dy}{dx}$] unabhängige Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots = 0.$$

363.

Diese Gleichung bestimmt das Verhältniss zwischen x und y, welches Statt finden muss, wenn ein Grösstes oder Kleinstes existiren soll. Wir wollen sie allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten nennen. Bei geometrischen Aufgaben ist sie die Gleichung der Curve, welche die verlangte Eigenschaft des Grössten oder Kleinsten hat. Es ist leicht zu sehen, dass diese Gleichung, da die gegebene Function v die nte Ableitung von y, enthält [*oder von der Form*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right)$$

ist] bis zur $2n$ten Ordnung steigen kann, so dass ihre Stammgleichung zwischen x und y, $2n$ willkürliche Constanten enthält. [*Das letzte Glied der allgemeinen Gleichung des Grössten oder Kleinsten lässt sich nemlich durch* $\pm \frac{d^nZ}{dx^n}$ *ausdrücken, wo* $Z = \frac{dv}{d\frac{d^ny}{dx^n}}$ *ist. Wie man sieht, kann*

Anwendung der Var. auf

Z noch die Ableitung $\frac{d^n y}{dx^n}$ *enthalten, also steigt* $\pm\frac{d^n Z}{dx^n}$ *alsdann nothwendig auf die 2nte Ordnung.*]

V. Grenzen-Gleichungen.

364.

Nachdem die erste Zeile des obigen Ausdrucks von $\frac{\delta v}{\delta x}$ [362.] verschwunden ist, so erhält man, wenn man [*von den übrig bleibenden Gliedern, welche alle vollständige Ableitungen sind*] die Stammgrössen nimmt [*weil* $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{d\frac{\delta v}{\delta x}}{dx} + \ldots$ *ist* (361.)]

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2} - \ldots\right)\frac{\delta y}{\delta x}$$
$$+ \left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots\right)\frac{\delta y}{dx\,\delta x}$$
$$+ (R - \ldots)\frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x}\ldots \text{ etc. } + K,$$

wo K eine willkürliche Constante bedeutet [*oder, ohne das Zeichen* δ,

$$\frac{d(u)}{dx} - \frac{du}{dx} = \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2} - \ldots\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+ \left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots\right)\frac{d^2 y}{dx^2}$$
$$+ (R - \ldots)\frac{d^3 y}{dx^3}\ldots \text{ etc. } + K.]$$

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

365.

Da diese Function jetzt einen bestimmten Werth hat, so muss nun, damit dieser Werth zwischen gegebenen Grenzen gleich Null sey, die Differenz zwischen den Werthen von $\frac{\delta u}{\delta x}$ an den beiden Grenzen, verschwinden.

Man bezeichne die Werthe von $\frac{\delta u}{\delta x}$, welche der ersten und zweiten Grenze entsprechen, in welchen x gegebene Werthe hat, durch $\frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}}$ und $\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}}$ und unterscheide eben so, durch 0 und 1 die Werthe der übrigen Grössen an den Grenzen, so erhält man die particulaire Grenzen-Gleichung

$$\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0,$$

welche

$$\left(\overset{1}{P} - \frac{d\overset{1}{Q}}{d\overset{1}{x}} + \frac{d^2\overset{1}{R}}{d\overset{1}{x}{}^2} - \ldots\right)\frac{\delta \overset{1}{y}}{\delta \overset{1}{x}}$$

$$+ \left(\overset{1}{Q} - \frac{d\overset{1}{R}}{d\overset{1}{x}} + \ldots\right)\frac{d\,\delta \overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}\,\delta \overset{1}{x}}$$

$$+ (\overset{1}{R} - \ldots)\frac{d^2\,\delta \overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}{}^2\,\delta \overset{1}{x}} \ldots$$

$$-\left(\overset{0}{P} - \frac{d\overset{0}{Q}}{d\overset{0}{x}} + \frac{d^2\overset{0}{R}}{d\overset{0}{x}{}^2} - \ldots\right)\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{x}}$$

Anwendung der Var. auf

$$-\left(\overset{0}{Q}-\frac{d\overset{0}{R}}{d\overset{0}{x}}+\ldots\right)\frac{d\,\delta\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}\,\delta\overset{0}{x}}$$

$$-(\overset{0}{R}-\ldots)\frac{d^2\,\delta\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}{}^2\,\delta\overset{0}{x}}\ldots$$

$$=0$$

[*und ohne das Zeichen* δ,

$$\left(\overset{1}{P}-\frac{d\overset{1}{Q}}{d\overset{1}{x}}+\frac{d^2\overset{1}{R}}{d\overset{1}{x}{}^2}-\ldots\right)\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}$$

$$+\left(\overset{1}{Q}-\frac{d\overset{1}{R}}{d\overset{1}{x}}+\ldots\right)\frac{d^2\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}{}^2}$$

$$+(\overset{1}{R}-\ldots)\frac{d^3\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}{}^3}\ldots$$

$$-\left(\overset{0}{P}-\frac{d\overset{0}{Q}}{d\overset{0}{x}}+\frac{d^2\overset{0}{R}}{d\overset{0}{x}{}^2}-\ldots\right)\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}$$

$$-\left(\overset{0}{Q}-\frac{d\overset{0}{R}}{d\overset{0}{x}}+\ldots\right)\frac{d^2\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}{}^2}$$

$$-(\overset{0}{R}-\ldots)\frac{d^3\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}{}^3}\ldots]$$

giebt und welcher Gleichung auf dieselbe Weise genuggethan werden muss, wie den Gleichungen der gewöhnlichen Grössten und Kleinsten. Die daraus folgenden Bedingungen dienen zur Bestimmung der willkürlichen Constanten, welche in dem Ausdrucke der Grösse y in x vorkommen können [*und welcher*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

Ausdruck, mit 2n willkürlichen Constanten, die obige allgemeine Gleichung des Grössten und Kleinsten war.]

Wären die Grössen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ an den beiden Grenzen gegeben, so ist klar, dass dann die Variationen $\frac{\delta \overset{1}{y}}{\delta \overset{1}{x}}, \frac{d\,\delta \overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}\,\delta \overset{1}{x}}, \frac{d^2\,\delta \overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}{}^2\,\delta \overset{1}{x}} \ldots \frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{x}}, \frac{d\,\delta \overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}\,\delta \overset{0}{x}}, \frac{d^2\,\delta \overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}{}^2\,\delta \overset{0}{x}} \ldots$ alle zugleich Null sind [*weil sich alsdann y, an den Grenzen, ohne x nicht mehr willkürlich verändern kann*] und dass also dann die Gleichung von selbst Statt findet und keine Bedingung [*für die Constanten*] weiter zu erfüllen ist.

Wäre hingegen keine jener Grössen gegeben, so müsste man einzeln die Coefficienten der benannten Variationen gleich Null setzen [*weil sie unabhängig von einander angenommen werden können; denn z. B.* $\frac{\delta y}{\delta x}$ *kann unabhängig von y angenommen werden, weil die Art der Verwandlung der Grösse* $y = \varphi x$ *durch k, auf die Weise, dass* φx *in* $\varphi(x, k)$ *übergeht, willkürlich ist*]. Dieses giebt dann für jede Grenze eben so viele Gleichungen [*also überhaupt 2n Gleichungen, durch welche die n willkürlichen Constanten bestimmt werden können.*]

Gewöhnlich sind aber die Werthe von y und dessen Ableitungen an den Grenzen weder alle gegeben, noch alle willkürlich, sondern es finden Ver-

Anwendung der Var. auf

hältnisse zwischen diesen Grössen Statt, die von der Art der Aufgabe abhängen. Alsdann muss man die Variationen $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}$, $\frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x}$, auf die Grenzen bezogen, auf die möglichst kleinste Zahl bringen und die Coefficienten, welche unbestimmt bleiben, einzeln gleich Null setzen.

[*Hier liegt nun der Grund, warum man, wenigstens bei der gegenwärtigen Aufgabe des Grössten oder Kleinsten, nicht blosse Ableitungen statt der Variationen setzen kann. Es sey nemlich der Kürze wegen,*

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx} - \ldots = G$$

$$Q - \frac{dR}{dx} + \ldots = H$$

$$R - \ldots = J \text{ etc.}$$

so ist die obige particulaire Grenzen-Gleichung mit Variationen:

$$\overset{1}{G}\frac{\delta \overset{1}{y}}{\delta \overset{1}{x}} + \overset{1}{H}\frac{d\,\delta \overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}\,\delta \overset{1}{x}} + \overset{1}{J}\frac{d^2\,\delta \overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}{}^2\,\delta \overset{1}{x}} \ldots$$

$$-\left(\overset{0}{G}\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{x}} + \overset{0}{H}\frac{d\,\delta \overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}\,\delta \overset{0}{x}} + \overset{0}{J}\frac{d^2\,\delta \overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}{}^2\,\delta \overset{0}{x}} \ldots\right) = 0.$$

Setzte man blosse Ableitungen Statt der Variationen, so wäre die Gleichung, statt dessen, wie man oben sah, folgende:

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

$$\overset{1}{G}\frac{d\overset{1}{y}}{\overset{1}{d}x} + \overset{1}{H}\frac{d^2\overset{1}{y}}{\overset{1}{d}x^2} + \overset{1}{J}\frac{d^3\overset{1}{y}}{\overset{1}{d}x^3} \ldots$$

$$-\left(\overset{0}{G}\frac{d\overset{0}{y}}{\overset{0}{d}x} + \overset{0}{H}\frac{d^2\overset{0}{y}}{\overset{0}{d}x^2} + \overset{0}{J}\frac{d^3\overset{0}{y}}{\overset{0}{d}x^3} \ldots\right) = 0.$$

In diese letzte Gleichung aber könnte man, wie es mit Variationen dann geschehen kann, wenn $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ *an den Grenzen nicht gegeben sind, die Coefficienten* $\overset{1}{G}, \overset{1}{H}, \overset{1}{J} \ldots \overset{0}{G}, \overset{0}{H}, \overset{0}{J} \ldots$ *nicht einzeln gleich Null setzen. Denn die Abhängigkeit der Grösse* y *von* x, *ist, bis auf die willkürlich bleibenden* $2n$ *Constanten, schon im Allgemeinen durch die allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten* (362 *und* 363.) *bestimmt, folglich sind die Multiplicatoren* $\frac{d\overset{1}{y}}{\overset{1}{d}x}, \frac{d^2\overset{1}{y}}{\overset{1}{d}x^2} \ldots \frac{d\overset{0}{y}}{\overset{0}{d}x}, \frac{d^2\overset{0}{y}}{\overset{0}{d}x^2} \ldots$ *der Grössen* $\overset{1}{G}, \overset{1}{H} \ldots \overset{0}{G}, \overset{0}{H} \ldots$ *nicht mehr von diesen Grössen, die aus* x *und* y *zusammengesetzt sind, ganz unabhängig, wie es der Fall seyn müsste, wenn man die Glieder einzeln sollte gleich Null setzen dürfen. Zwar sind noch die* $2n$ *Constanten in* y *unbestimmt und es könnte scheinen, dass man noch, obgleich die Form der Abhängigkeit der Grösse* y *von* x *durch die allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten* (362.) *schon bestimmt ist, die Werthe der Constanten so an-*

nehmen könne, dass die Grössen $\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}$ $\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}$ *noch als unabhängig von* $\overset{1}{G}$ $\overset{0}{G}$ *betrachtet werden dürfen. Allein wäre dieses auch wirklich möglich, so würden doch die Constanten hinterher wieder eben durch die Gleichungen* $\overset{1}{G} = 0$, $\overset{1}{J} = 0$ $\overset{0}{G} = 0$, $\overset{0}{J} = 0$ *bestimmt werden, und folglich wären rückwärts* $\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}$ $\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}$ *nicht mehr nothwendig von* x *und* y, *oder von* $\overset{1}{G}$ $\overset{0}{G}$ *unabhängig. Beim Gebrauch der Variationen dagegen ist es anders. Da die Art, wie die Grösse* k *in* $y = \varphi x$ *eingeführt wird, ganz willkürlich ist, anders wie bei den Ableitungen, wo* k *in* y *in der bestimmten Form* $x + k$ *zu* x *hinzutritt, so ist die Grösse* $\frac{\delta y}{\delta x}$ *oder* $\frac{d\varphi o k}{dk}$ *ebenfalls völlig willkürlich und kann also allemal so angenommen werden, dass sie, mit allen ihren Ableitungen* $\frac{d\delta y}{dx\,\delta x}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2\,\delta x}$ *etc. von* G, H, J.... *völlig unabhängig bleibt, so dass mit vollem Rechte* $\overset{1}{G}$, $\overset{1}{H}$, $\overset{1}{J}$.... $\overset{0}{G}$, $\overset{0}{H}$, $\overset{0}{J}$.... *einzeln gleich Null gesetzt werden können. Man würde sich also, wenn man sich der blossen Ableitungen statt der Variationen bedienen wollte, eine Beschränkung auflegen, die, der Aufgabe wegen, nicht nothwendig ist.*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots\right).$$

Deshalb ist der Gebrauch der willkürlichen Variationen und des Zeichens δ, wenigstens bei Aufgaben der gegenwärtigen Art, wo schon vorher, ehe es zum Gebrauche der Variationen kommt, die Abhängigkeit der veränderlichen Grösse z. B. durch eine allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten im Allgemeinen bestimmt wird, wesentlich nothwendig. Man kann sich zwar allerdings, wenn es nur darauf ankommt, y ohne x zu verändern, welches das wesentliche Mittel ist, die Aenderung der Abhängigkeit einer Grösse von einer andern analytisch auszudrücken, blos der gewöhnlichen Ableitungen bedienen und blos $y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \dots$ statt y setzen; allein diese Veränderung der Abhängigkeit ist dann nicht mehr unbeschränkt willkürlich, wenn y am Ende durch x bestimmt wird. Diese Art, die Aenderung der Abhängigkeit der Grösse y von x auszudrücken, ist vielmehr beschränkt und kann daher nur für einzelne besondere Fälle passen. Allgemeiner ist die Aenderung durch Variationen, nemlich dass man $y + k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{0x^2} \dots$ statt y setzt, ohne x zu ändern. Diese Art des Ausdrucks passt für alle Fälle.]

Anwendung der Var. auf

VI. *Ursach der Uebereinstimmung der allgemeinen Bedingungs-Gleichungen des Grössten oder Kleinsten (IV.) mit den Bedingungs-Gleichungen der Unabhängigkeit der Grössen der Aufgabe.*

366.

Die allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \ldots . = 0,$$

welche wir [*in* 362.] für das Grösste oder Kleinste der Stammgrösse u von v fanden, ist, wie man sieht, völlig die nemliche, wie die in der vorigen Vorlesung, für den Fall, wenn die Stammgrösse u von v, unabhängig von irgend einem Verhältnisse zwischen den veränderlichen Grössen, existiren soll.

Die Ursach dieser Identität der beiden Ausdrücke folgt aus der Gleichförmigkeit der analytischen Operationen in den beiden Fällen.

Auch ist klar, dass wenn die Function v eine vollständige Ableitung ist, ihre Stammgrösse u eine bestimmte Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots .$ seyn muss [*die allgemein, ohne ein bestimmtes Verhältniss zwischen x und y existirt.*] Diese Stammgrösse kann dann ohne Weiteres auf die Grenzen bezogen werden [*wie bei den gewöhnlichen Aufgaben von den Grössten und Kleinsten*] und die Gleichung

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{d^2x} \ldots = 0$ giebt weiter kein bestimmtes Verhältniss zwischen x und y und muss also [*allgemein ohne ein solches*] von selbst erfüllt werden.

Durch diese Erwägung fand zuerst Euler die Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0,$$

für die Bedingung der Integrabilität des Ausdrucks $Z\,dx$. Condorcet bemerkte späterhin, dass wenn der Ausdruck $Z\,dx$ integrabel ist, auch die Variation $\delta \int Z\,dx$ es seyn müsse. Er schloss daraus, dass die Bedingungs-Gleichung der Integrabilität die nemliche seyn müsse, wie diejenige zwischen den veränderlichen Grössen für die Grössten oder Kleinsten. Unsere Analysis durfte über diesen Gegenstand nichts zu wünschen übrig lassen.

[*Die Ursach der Identität der Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität und der allgemeinen Gleichungen des Grössten und Kleinsten in der Variations-Rechnung scheint etwas dunkel zu seyn. Sie wird aber deutlicher, wenn man erwägt, dass das wesentliche Mittel z.B. y zu verändern, ohne dass x sich ändert, um eine Abänderung der Abhängigkeit der Grösse y von der Grösse x auszudrücken, bei beiden Aufgaben: die Bedingungen der Integrabilität einer gegebenen Ableitung und das Grösste oder Kleinste der Stammgrösse einer gegebenen Ableitung zu finden, völlig auf gleiche Weise angewendet wird,*

Anwendung der Var. auf

und dass beide Aufgaben gewissermaassen einerlei Gegenstand haben, oder genauer, dass die erste Aufgabe eigentlich einen wesentlichen Theil der zweiten ausmacht.

Wenn nemlich das Grösste oder Kleinste der Stammgrösse u einer gegebenen Grösse mit Ableitungen

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$$

verlangt wird, so ist u auch dann noch die Stammgrösse von v, wenn sich die Abhängigkeit der Grösse y von x ändert. Das letzte kann dadurch ausgedrückt werden, dass man $y + k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \ldots$ *statt y setzt, während sich x nicht verändert, welches, auf das allgemeinste und mit der unbeschränktesten Willkür, jede mögliche Veränderung der Abhängigkeit der Grösse y von x bezeichnet. Nun kann gezeigt werden, dass v und u, wenn man diese Grössen nach einer solchen Substitution entwickelt, in Reihen von der Form*

$$v + k\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \ldots \text{ und}$$

$$u + k\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \ldots$$

übergehen. Ferner kann gezeigt werden, dass die einzelnen Coefficienten $\frac{\delta u}{\delta x}$ *und* $\frac{\delta v}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ *und* $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$ *etc. eben so wohl Stammgrössen von einander sind, wie es u von v ist. Zuletzt wird gezeigt,*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

zeigt, dass für den Fall des Grössten oder Kleinsten, $\frac{\delta u}{\delta x}$ *gleich Null seyn muss. Da nun* $\frac{\delta u}{\delta x}$ *die erste Stammgrösse von* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *ist, so ist die allgemeine Bedingung bei der Aufgabe vom Grössten oder Kleinsten, dass die Stammgrösse von* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *gleich Null sey. Nun aber lässt sich die Grösse* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *auf die Form*

$$\frac{\delta v}{\delta x} = N\frac{\delta y}{\delta x} + P\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x} + Q\frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x} \ldots$$

bringen, wo $N = \frac{dv}{dy}$, $P = \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}$, $Q = \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}$ *etc. ist* (362.) *und dieser Ausdruck lässt sich in*

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots\right)\frac{\delta y}{\delta x}$$

$$+ \frac{d\left(P\frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} - d\left(\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}\right) + d\left(\frac{d^2R}{dx^2}\cdot\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}\right) - \ldots$$

$$+ d\left(Q\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}\right) - d\left(\frac{dR}{dx}\cdot\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}\right) + \ldots$$

$$+ d\left(R\frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x}\right) - \ldots$$

verwandeln (362.). *Die Aufgabe des Grössten oder Kleinsten erfordert also, dass die Stammgrösse der so eben entwickelt angegebenen Grösse* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *gleich Null gesetzt werden muss.*

Anwendung der Var. auf

Den nemlichen Gang nimmt auch die andere Aufgabe von den Bedingungen, unter welchen die gegebene Grösse mit Ableitungen $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$, *ohne dass eine bestimmte Abhängigkeit zwischen x und y nothwendig wäre, eine Stammgrösse hat. Denn zuerst ist klar, dass wenn eine solche Stammgrösse existirt, sie auch dann noch Statt finden muss, wenn die Abhängigkeit der Grösse y von der Grösse x sich verändert, eben wie bei der ersten Aufgabe. Diese Veränderung kann ferner, auf die nemliche Weise, wie bei der ersten Aufgabe, auf das allgemeinste ausgedrückt werden, wenn man* $y + k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \ldots$ *statt y setzt, während sich x nicht verändert. Nun kann, wie in (324.) gezeigt werden, dass, wenn man die Grösse v nach jener Substitution entwickelt und die Gesammtheit der Glieder nimmt, welche die erste Potenz von k zum Multiplicator haben, die gesammte Stammgrösse u mit dem veränderten y existirt, sobald nur jene Gesammtheit von Gliedern mit k allein eine Stammgrösse hat. Diese Gesammtheit von Gliedern ist aber nichts anders als das obige* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *selbst, denn grade dieses Zeichen drückt jene Glieder, nemlich Alles, was k in der ersten Potenz enthält, aus. Also erfordert die zweite Aufgabe, dass man untersuche, ob* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *allgemein, ohne bestimmte Abhän-*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d_2y}{dx^2} \ldots\right).$$

gigkeit zwischen x und y, eine Stammgrösse haben könne, oder nicht. Da die Grösse $\frac{\delta v}{\delta x}$ bei der zweiten Aufgabe völlig die nemliche ist, wie bei der ersten, so kann sie auch auf dieselbe Weise entwickelt werden und hat folglich ebenfalls den oben entwickelten Ausdruck.

Die beiden Aufgaben sind also jetzt nur noch wie folgt verschieden.

Bei der ersten soll die unbekannte Stammgrösse von $\frac{\delta v}{\delta x}$ = o seyn; bei der zweiten soll man sehen, ob die nemliche Grösse *$\frac{\delta v}{\delta x}$, unabhängig von einem bestimmten Verhältnisse zwischen y und x, eine Stammgrösse haben könne, oder nicht.*

Der entwickelte Ausdruck von $\frac{\delta v}{\delta x}$ hat zwei, wesentlich von einander verschiedene Theile. Der erste Theil ist eine Reihe von Grössen, die von x und y abhängen und in $\frac{\delta y}{\delta x}$ multiplicirt sind, der zweite Theil ist eine Reihe von lauter vollständigen Ableitungen, welche alle, ohne Weiteres, Stammgrössen haben. Man bezeichne den ersten Theil durch $B\frac{\delta y}{\delta x}$ den zweiten durch $\frac{dC}{dx}$, so lässt sich $\frac{\delta v}{\delta x}$ durch

$$\frac{\delta v}{\delta x} = B\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{dC}{dx}$$

ausdrücken.

Von dieser Grösse soll also, bei der ersten Aufgabe, die Stammgrösse unter allen Umständen, sie mag ohne ein bestimmtes Verhältniss zwischen x und y existiren, oder nicht, gleich Null seyn. Bei der zweiten Aufgabe soll man untersuchen, unter welchen Bedingungen eine Stammgrösse von diesem $\frac{dv}{dx}$, *ohne ein bestimmtes Verhältniss zwischen x und y, Statt findet. Die erste Aufgabe verlangt also unbedingt, dass die Stammgrösse von* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *Null sey, die zweite Aufgabe will wissen, unter welchen Bedingungen die Grösse* $\frac{\delta v}{\delta x}$, *ohne bestimmtes Verhältniss zwischen x und y, zurückgeleitet werden könne.*

Das letzte geht offenbar an, wenn man $B = 0$ *setzt, denn die alsdann übrig bleibende Grösse* $\frac{dC}{dx}$ *kann wirklich, ohne bestimmtes Verhältniss zwischen x und y, zurückgeleitet werden, weil sie lauter vollständige Ableitungen enthält. Die Stammgrösse davon ist, unabhängig von einem solchen Verhältnisse, gleich C + Const. Also findet die Stammgrösse zu* $\frac{\delta v}{\delta x}$, *unabhängig von irgend einem Verhältnisse zwischen x und y, Statt, sobald von selbst*

$$B = 0$$

ist. Diese Gleichung enthält also die Bedingung der Integrabilität der Grösse $\frac{\delta v}{\delta x}$ *und*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

folglich, vermöge dessen, was im Anfange gezeigt wurde, der Grösse v.

Bei der ersten Aufgabe hingegen, wo unbedingt die Stammgrösse von $\frac{\delta v}{\delta x}$ Null seyn soll, würde man, wenn nicht B von selbst gleich Null seyn sollte, irgend ein bestimmtes Verhältniss zwischen x und y annehmen müssen, um nur erst eine Stammgrösse zu finden, die Null seyn kann, weil, wie sich eben vorhin zeigte, ohne bestimmtes Verhältniss zwischen x und y, im Fall B nicht von selbst gleich Null ist, gar keine Stammgrösse zu $\frac{\delta v}{\delta x}$ existirt. Eine willkürliche Bestimmung der Abhängigkeit der Grösse y von x, um eine Stammgrösse zu erhalten, wäre aber der Aufgabe entgegen, weil dieselbe eben will, dass grade diejenige Abhängigkeit der Grösse y von x gefunden werden soll, die dem Grössten oder Kleinsten entspricht und man also, was gesucht wird, aus $\frac{\delta u}{\delta x} = 0$ nicht mehr finden würde, wenn man vorher, um von $\frac{\delta v}{\delta x}$ zu $\frac{\delta u}{\delta x}$ zu gelangen, schon die Abhängigkeit zwischen x und y willkürlich bestimmte. Deshalb darf man die Abhängigkeit zwischen x und y keinesweges willkürlich setzen. Da nun aber dennoch die Stammgrösse zu $\frac{\delta v}{\delta x}$ unbedingt Statt finden soll und die Abhängigkeit zwischen x und y nicht willkürlich angenommen werden darf, so bleibt nichts

anderes übrig, als grade diejenige Abhängigkeit zwischen x und y zu gestatten, die nöthig ist, damit sie nicht willkürlich angenommen werden darf. Dieses ist diejenige, welche aus $B = 0$ folgt, denn sobald $B = 0$ ist, hat $\frac{\delta v}{\delta x}$, ohne dass weiter eine Abhängigkeit zwischen x und y willkürlich anzunehmen nöthig wäre, wirklich die Stammgrösse $\frac{\delta u}{\delta x} = C +$ Const. die alsdann, wie es die Aufgabe verlangt, gleich Null gesetzt werden kann.

Beide Aufgaben führen also nothwendig auf die nemliche Gleichung

$$B = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\ldots = 0$$

und darin liegt der Grund der Identität der Bedingungs-Gleichung der Integrabilität und der allgemeinen Gleichung des Grössten und Kleinsten.

Ist dieser Grund oben im Text noch etwas dunkel, so rührt dies wohl nur daher, dass Lagrange bei der Untersuchung der Bedingungen der Integrabilität, in (322. etc.) statt y in $y + k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \ldots\ldots$ zu verändern, blos $y + \omega$ statt y setzte, wo ω irgend eine Function von x ist. Es wäre allgemeiner und würde die Schwierigkeit ganz heben, wenn man sich schon dort, bei der Untersuchung der Bedingungen der Integrabilität, der durch δ bezeichneten Variationen oder der will-

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x} \ldots\right).$$

kürlichen Ableitungen, wenn diese Benennung erlaubt ist, bediente und also die Variationen schon dort anwendete. Es reichen zwar dort noch, wie sich daselbst zeigte, gewöhnliche Ableitungen zu; allein das unterscheidende Verfahren der Variations-Rechnung, die abhängige Grösse z. B. y zu verändern, während die unabhängig veränderliche Grösse, wie x, unverändert bleibt, kommt in der That schon dort vor und veranlasst die theilweise Gleichförmigkeit der Resultate.]

VII. Variation der Grenzen, oder der Fall, wenn die unabhängig veränderliche Grösse der Aufgabe selbst noch variirt.

367.

Wir nahmen bis jetzt an, die Variation von x sey Null. Dieses findet allemal Statt, wenn die Grenzen fest sind. Da aber die Grenzen in den meisten Fällen veränderlich sind, so muss man auch noch untersuchen, was die Variation von x selbst giebt. [*Diese Variation von x bezieht sich nemlich insbesondere auf die Grenzen, zwischen welchen das Grösste oder Kleinste liegen soll. Bis jetzt wurde angenommen, dass die Variation von y, oder die Veränderung der Abhängigkeit der Grösse y von der Grösse x auf die Grenzen keinen Einfluss habe. Es kann aber der Fall vorkommen,*

dass für eine veränderte Abhängigkeit der Grösse y von der Grösse x auch veränderte Grenzen der Stammgrösse Statt finden, und dass die Veränderung der Grenzen von der Veränderung der Abhängigkeit zwischen x und y auf irgend eine Weise abhängt. In diesem Falle variirt auch x und man kann diese neue Variation dadurch ausdrücken, dass man x als von einer neuen Grösse w abhängig betrachtet. Man sehe deshalb auch die Bemerkungen des Uebersetzers über die Variations-Rechnung im zweiten Bande seiner Abhandlungen S. 68. und hier einige Bemerkungen weiter unten.]

Zu dem Ende darf man nur in Betracht ziehen, dass die Grösse u eigentlich eine Function von x ist [*weil y doch allemal auf irgend eine Weise von x abhängt und u, wie v, aus x und y zusammengesetzt ist.*] Lässt man also x um $k\frac{\delta x}{\delta w}$ wachsen $\left[\textit{so dass } u = F\left(x + k\frac{\delta x}{\delta w}\right) \textit{ ist}\right]$, so erhält man, zu Folge der ersten Vorlesungen, für das Wachsthum von u, die Grösse

$$k\frac{\delta x}{\delta w}\frac{du}{dx} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2 \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \ldots\ldots$$

[*Eigentlich wächst x um* $k\frac{\delta x}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 x}{\delta w^2} \ldots\ldots$ *Jedoch kommen die weggelassenen Glieder hier nicht in Betracht. Man sehe die vorhin erwähnten Bemerkungen.*]

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$\frac{du}{dx} = v, \text{ also } \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dv}{dx}, \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2v}{dx^2} \text{ etc.}$$

Man darf also, um in dem Falle, wenn auch x noch variirt, die Zunahme von u zu haben, zu den Variationen $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ *etc.* nur die Glieder $v\frac{\delta x}{\delta w}$, $\frac{dv}{dx}\left(\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2$ *etc.* addiren. [*Denn wenn blos die Abhängigkeit zwischen* y *und* x *sich ändert, so geht* u *in*

$$u + k\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \ldots.$$

über. Verändert sich nun auch noch überall die Abhängigkeit der Grösse x *von* w, *so nimmt* u, *dem Obigen zu Folge, auch noch um*

$$k\frac{du}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2 \ldots.$$

$$= kv\frac{\delta x}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{dv}{dx}\left(\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2 \ldots.$$

zu. Also ist jetzt die gesammte Zunahme von u *folgende:*

$$k\left(\frac{\delta u}{\delta x} + v\frac{\delta x}{\delta w}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{dv}{dx}\left(\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2\right) \ldots.$$

Mithin müssen zu $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$, *im Fall auch noch* x *variirt, die Grössen* $v\frac{\delta x}{\delta w}$, $\frac{dv}{dx}\left(\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2$ *etc. addirt werden.*] Da nun $\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{d\frac{\delta u}{\delta x}}{dx}$ ist, so

Anwendung der Var. auf

muss man zu dem obigen, für den Fall dass blos y variirt, gefundenen Werthe von $\frac{\delta v}{\delta x}$, wenn x ebenfalls variirt, noch das Glied $\frac{d\left(v\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dx}$ addiren. [*Denn man erhält alsdann* $\frac{\delta(v)}{\delta w}$ *statt* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *und da* $\frac{\delta(v)}{\delta w} = \frac{d\frac{\delta(u)}{\delta w}}{dx}$, $\frac{\delta u}{\delta w}$ *aber gleich* $\frac{\delta u}{\delta x} + v\frac{\delta x}{\delta w}$ *ist, so muss man zu* $\frac{d\frac{\delta u}{\delta x}}{dx}$ *das Glied* $\frac{d\left(v\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dx}$ *addiren. Die oben citirten Bemerkungen machen Alles dieses noch deutlicher.*]

368.

Da nun aber die Variation von x, weil y allemal von dieser Grösse auhängt, auch auf y Einfluss hat, so muss man, wenn x variirt, von jener Variation Dasjenige abziehen, was von der Variation von x herrührt, deren ganze Wirkung auf u wir ausdrückten.

Wie wir nemlich oben sahen, geht $y = \varphi x$, wenn daraus $\varphi(x, k)$ wird, in $y + k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \ldots$ über. Wird nun zugleich $x + k\frac{\delta x}{\delta w}$ aus x, so geht y in

$$y + \frac{dy}{dx}.k\frac{\delta x}{\delta w} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\left(k\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2 \ldots$$

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

über. Eben so wird aus $\frac{\delta y}{\delta x}$, welches eine Function von x ist,

$$\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{d\frac{\delta y}{\delta x}}{dx} \cdot k\frac{\delta x}{\delta w} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\frac{\delta y}{\delta x}}{dx^2}\left(k\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2 \ldots;$$

ferner aus $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$,

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} + \frac{d\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}}{dx} \cdot k\frac{\delta x}{\delta w} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}}{dx^2} \cdot \left(k\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2 \ldots$$

Das gesammte Wachsthum von y ist also [*wenn man das was aus* y, $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ *etc. wird, in* $y + k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \ldots$, *statt dieser Grössen substituirt,*

$$y + k\frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left(\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2 \ldots$$

$$+ k\frac{\delta y}{\delta x} \qquad + k^2\frac{d\frac{\delta y}{\delta x}}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w} \ldots$$

$$+ \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \ldots, \textit{ oder}]$$

$$y + k\left(\frac{dy}{dx}\frac{\delta x}{\delta w} + \frac{\delta y}{\delta x}\right) +$$

$$\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2 + 2\frac{d\frac{\delta y}{\delta x}}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w} + \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}\right) \ldots,$$

wo, wie man sieht, $\frac{dy}{dx}\frac{\delta x}{\delta w} + \frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2 + 2\frac{d\frac{\delta y}{\delta x}}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w} + \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ *etc.*, die gesammten Varia-

tionen von y, für den Fall sind, wenn man zugleich auf die Variation $\frac{\delta x}{\delta w}$ von x Rücksicht nimmt.

Wir wollen diese Variationen einen Augenblick durch $\frac{\delta(y)}{\delta w}$, $\frac{\delta(y)}{\delta w^2}$ *etc.* bezeichnen [*Lagrange schreibt* $(\dot{y})$, $(\ddot{y})$ *etc.*] um sie von den vorigen $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ *etc.* [$\dot{y}$, $\ddot{y}$ *etc.*], welche für $\frac{\delta x}{\delta w} = 0$ Statt finden, zu unterscheiden, so erhält man

$$\frac{\delta(y)}{\delta w} = \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$$

$$\frac{\delta^2(y)}{\delta w^2} = \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} + 2\frac{d\frac{\delta y}{\delta x}}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w} + \frac{d^2 y}{dx^2}\left(\frac{\delta x}{\delta w}\right)^2 \text{ etc.,}$$

und hieraus

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta(y)}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}.$$

Nimmt man hiervon die Ableitungen nach x, so erhält man

$$\frac{d\frac{\delta y}{\delta x}}{dx} = \frac{d\left(\frac{\delta(y)}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dx}$$

$$\frac{d^2\frac{\delta y}{\delta x}}{dx^2} = \frac{d^2\left(\frac{\delta(y)}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dx^2} \text{ etc.}$$

Dieses sind die Werthe der obigen Grössen $\left[\frac{d\frac{\delta y}{\delta x}}{dx}, \frac{d^2\frac{\delta y}{\delta x}}{dx^2}\right.$ *etc.*, *oder* $\frac{d\delta y}{dx\,\delta x}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2\,\delta x}$ *etc. in* (360. 362.)]

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots\right).$$

für den Fall, wenn auch x variirt, welhhe man nun [*in* 360. *und* 362.] in den obigen, für ein nicht variables x, geltenden Ausdruck von $\frac{\delta v}{\delta x}$ substituiren muss. Dieses giebt, für den Fall wenn auch x variirt, folgenden Werth von $\frac{\delta v}{\delta x}$:

$$N\left(\frac{\delta(y)}{\delta w} - \frac{\delta y}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}\right) + P\frac{d\left(\frac{\delta(y)}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dx}$$

$$+ Q\frac{d^2\left(\frac{\delta(y)}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dx^2} \dots + \frac{d\left(v\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dx}.$$

[*Das letzte Glied muss, zu Folge* (366.) *noch addirt werden.*]

Die in $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta x}{\delta w}$ multiplicirten Glieder, welche keine vollständigen Ableitungen sind, sind also jetzt

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots\right)\left(\frac{\delta y}{\delta x} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}\right)$$

woraus man sieht, dass die allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots = 0,$$

die wir oben für den Fall, wenn y allein variirt, fanden, auch zugleich dem Falle entspricht, wenn sich noch die Abhängigkeit der Grösse x verändert. Die Variation von x hat also weiter keinen Einfluss

Anwendung der Var. auf

auf die Grenzen-Gleichung $\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta x} - \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta x} = 0$, als dass nur zu $\frac{\delta u}{\delta x}$ das Glied $v \frac{\delta x}{\delta w}$ addirt und $\frac{\delta y}{\delta x} - \frac{dy}{dx} \frac{\delta x}{\delta w}$ statt $\frac{\delta y}{\delta x}$ gesetzt werden muss.

369.

Man kann das nemliche Resultat noch auf eine andere, zwar weniger einfache, aber mehr directe Weise finden, wenn man unmittelbar die Variation von x, und ihre Ableitungen, in Betracht zieht.

Zu diesem Ende muss man aus der Function v zunächst die Voraussetzung $\frac{dx}{dw} = 1$ [*welche die Unabhängigkeit von x anzeigt*] wegschaffen, um die Variationen von $\frac{dx}{dw}$, $\frac{d^2x}{dw^2}$ *etc.* in Betracht ziehen zu können. Dieses geschieht, wie wir in den obigen Vorlesungen sahen, wenn man $\frac{dy}{dw} : \frac{dx}{dw}$ statt $\frac{dy}{dx}$, $d\left(\frac{dy}{dw} : \frac{dx}{dw}\right) : \frac{dx}{dw}$ statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ *etc.* substituirt und die Function v mit $\frac{dx}{dw}$ multiplicirt, damit sie die Ableitung von u seyn könne.

Es sey, der Kürze wegen,

$$\frac{dy}{dw} : \frac{dx}{dw} = p, \ \frac{dp}{dw} : \frac{dx}{dw} = q, \ \frac{dq}{dw} : \frac{dx}{dw} = r \ etc.$$

so muss man in $v \left[= f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)\right]$

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

p, q, r *etc.* statt $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ *etc.* setzen. Dadurch geht v in neue Functionen von x, y, p, q *etc.* über und die erste Ableitung davon ist

$$\frac{dv}{dw} = M\frac{dx}{dw} + N\frac{dy}{dw} + P\frac{dp}{dw} + Q\frac{dq}{dw} \ldots,$$

welches sich [*weil* $\frac{dy}{dw} = p\frac{dx}{dw}, \frac{dq}{dw} = q\frac{dx}{dw}$ *etc. ist*] auf

$$\frac{dv}{dw} = (M + Np + Pq + Qr \ldots)\frac{dx}{dw}$$

reducirt. Eben so ist die erste Variation von v:

$$\frac{\delta v}{\delta w} = M\frac{\delta x}{\delta w} + N\frac{\delta y}{\delta w} + P\frac{\delta p}{\delta w} + Q\frac{dq}{\delta w} \ldots$$

Es kommt also nur darauf an, die Werthe der Variationen $\frac{\delta p}{\delta w}, \frac{\delta q}{\delta w}, \frac{\delta r}{\delta w}$ *etc.* zu finden.

Da $p = \frac{dy}{dw} : \frac{dx}{dw}$ ist, so erhält man

$$\frac{\delta p}{\delta w} = \frac{d\,\delta y}{dw\,\delta y} : \frac{dx}{dw} - \frac{dy}{dw} \cdot \frac{d\,\delta x}{dw\,\delta w} : \left(\frac{dx}{dw}\right)^2$$

$$= \left(\frac{d\,\delta y}{dw\,\delta y} - p\frac{d\,\delta x}{dw\,\delta w}\right) : \frac{dx}{dw}$$

$$= \left(\frac{d\left(\frac{\delta y}{\delta w} - p\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw} + \frac{dp}{dw}\frac{\delta x}{\delta w}\right) : \frac{dx}{dw}$$

$$= \frac{d\left(\frac{\delta y}{\delta w} - p\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw} : \frac{dx}{dw} + q\frac{\delta x}{\delta w},$$

weil $\frac{dp}{dw} : \frac{dx}{dw} = q$ ist.

Anwendung der Var. auf

Man kann hierin $\frac{dx}{dw} = 1$ setzen, welches blos

$$\frac{\delta p}{dw} = \frac{d\left(\frac{\delta y}{\delta w} - p\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw} + q\frac{\delta x}{\delta w}$$

giebt.

Eben so erhält man, weil $q = \frac{dp}{dw} : \frac{dx}{dw}$ ist,

$$\frac{\delta q}{\delta w} = \frac{d\delta p}{dw\,\delta w} : \frac{dx}{dw} - \frac{dp}{dw} \cdot \frac{d\delta x}{dw\,\delta w} : \left(\frac{dx}{dw}\right)^2$$

$$= \left(\frac{d\delta p}{dw\,\delta w} - q\frac{d\delta x}{dw\,\delta w}\right)\frac{dx}{dw}$$

$$= \left(\frac{d\left(\frac{\delta p}{\delta w} - q\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw} + \frac{dq}{dw}\frac{\delta x}{\delta w}\right) : \frac{dx}{dw}$$

$$= \frac{d\left(\frac{\delta p}{\delta w} - q\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw} + r\frac{\delta x}{\delta w}.$$

Aber der Werth von $\frac{\delta p}{\delta w}$ giebt

$$\frac{\delta p}{\delta w} - q\frac{\delta x}{\delta w} = \frac{d\left(\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{\delta x}{\delta w}\right)}{\delta w}.$$

Substituirt man Dieses und setzt $\frac{dx}{dw} = 1$, welches erlaubt ist, so erhält man

$$\frac{\delta q}{\delta w} = \frac{d^2\left(\frac{\delta y}{\delta w} - p\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{\delta w^2} + r\frac{\delta x}{\delta w}.$$

Eben so findet man

$$\frac{\delta r}{\delta w} =$$

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots\right).$$

$$\frac{\delta r}{\delta w} = \frac{d^3\left(\frac{\delta y}{\delta w} - p\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{\delta w^2} + s\frac{\delta x}{\delta w}$$

u. s. w.

Substituirt man Alles dieses in $\frac{\delta v}{\delta x}$, so erhält man

$$(M + Pq + Qr + Rs \dots)\frac{\delta x}{\delta w}$$

$$+ N\frac{\delta y}{\delta w} + P.\frac{d\left(\frac{\delta y}{\delta w} - p\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw} + Q.\frac{d^2\left(\frac{\delta y}{\delta w} - p\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw^2} \dots$$

oder

$$(M + Np + Pq + Qr \dots)\frac{\delta x}{\delta w}$$

$$+ N\left(\frac{\delta y}{\delta w} - p\frac{\delta x}{\delta w}\right) + P.\frac{d\left(\frac{\delta y}{\delta w} - p\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw}$$

$$+ Q.\frac{d^2\left(\frac{\delta y}{\delta w} - p\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw^2} \dots$$

Nun fanden wir aber oben

$$M + Np + Pq + Qr \dots = \frac{dv}{dw} : \frac{dx}{dw},$$

und es ist ausserdem $p = \frac{dy}{dw} : \frac{dx}{dw}$. Substituirt man Dieses und setzt $\frac{dx}{dw} = 1$, so erhält man blos:

$$\frac{\delta v}{\delta w} = \frac{dv}{\delta w}\cdot\frac{\delta x}{\delta w} + N\left(\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dw}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right) + P.\frac{d\left(\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dw}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw}$$

$$+ Q.\frac{d^2\left(\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dw}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw^2} \dots$$

Dieses ist der vollständige, durch die Variation der Grössen x und y und ihrer Ableitungen, entstehende Werth der Variation $\frac{\delta v}{\delta x}$.

Nun sahen wir oben, dass man $v\frac{\delta x}{\delta w}$ statt v setzen muss. Also muss [*die Variation davon nach w*] $\frac{\delta v}{\delta w}\cdot\frac{dx}{dw}+v\frac{d\,\delta x}{dw\,dw}$ in die obigen Ausdrücke statt $\frac{\delta v}{\delta x}$ gesetzt [*das heisst es muss noch das Glied* $v\frac{d\,\delta x}{dw\,\delta w}$ *addirt*] werden. Substituirt man also hier den oben gefundenen Werth von $\frac{\delta v}{\delta w}$ und bemerkt, dass

$$\frac{dv}{dw}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}+v\cdot\frac{d\,\delta x}{dw\,\delta w}=\frac{d\left(v\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw}$$

ist, so erhält man, wenn man noch $\frac{dx}{dw}=1$ macht, das nemliche Resultat, welches sich oben auf einem andern Wege fand.

[*Der Inhalt dieser vier letzten Artikel, welche den Fall betreffen, wenn auch x variirt und zwei verschiedene Verfahren anzeigen, die Gleichung des Grössten oder Kleinsten zu finden, könnte noch etwas dunkel scheinen. Vielleicht giebt Folgendes noch mehrere Erläuterung.*

Bisher wurde angenommen, u sey die Stammgrösse nach x, von einer gegebenen Grösse

$$v=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\ldots\right),$$

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

so dass also

$$\frac{du}{dx} = v$$

ist. Die Abhängigkeit der Grösse y von x wurde verwandelt, welches dadurch geschahe, dass man $y + k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \ldots$ statt y setzte, ohne x zu verändern, wodurch u und v in Grössen von der Form

$$u + k\frac{\delta(u)}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2(u)}{\delta w^2} \ldots \text{ und}$$

$$v + k\frac{\delta(v)}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2(v)}{\delta w^2} \ldots$$

übergingen. Da u für jede beliebige Abhängigkeit zwischen y und x die Stammgrösse von v bedeuten soll, weil unter den verschiedenen möglichen Abhängigkeiten diejenige gesucht wird, welche für die Stammgrösse u, zwischen gegebenen Grenzen, einen grössten oder kleinsten Werth giebt, welches nach der Theorie der Grössten und Kleinsten aus der Gleichung

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

gefunden wird, so ist der veränderte Werth von u auch noch die Stammgrösse des veränderten Werths von v und auch die einzelnen Glieder $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ etc. sind die Stammgrössen der Glieder $\frac{\delta v}{\delta x}$, $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$, so dass

Anwendung der Var. auf

$$\frac{d\frac{\delta u}{\delta x}}{dx} = \frac{\delta v}{\delta x}, \; \frac{d\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}}{dx} = \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \text{ etc.}$$

ist.

Es wurde also der Werth von $\frac{\delta v}{\delta x}$ *nach der Voraussetzung, dass in* $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$, y *in* $y + k\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \ldots$ *übergehe, ohne dass sich* x *ändert, entwickelt und davon die Stammgrösse gesucht, welche* $\frac{\delta u}{\delta x}$ *ist, um dieselbe alsdann, nach der Bedingung des Grössten oder Kleinsten, gleich Null setzen zu können.*

Jetzt, von (366.) ab, wird angenommen, dass sich nicht blos die Abhängigkeit zwischen x *und* y *verändere, sondern dass sich auch die Grenzen ändern sollen. Deshalb wurde* x *als Function einer neuen Grösse* w *betrachtet und die Abhängigkeit der Grösse* x *von* w *ebenfalls verändert, welches nothwendig auf* y *Einfluss hat, weil* y *doch immer, auf welche Weise es auch seyn mag, von* x *abhängt. Es frägt sich nun, welchen Einfluss diese neue Supposition eines veränderlichen* x *auf die übrigen Resultate habe.*

Zuvörderst ist klar, dass wenn jetzt z. B. $x = \Psi w$ *ist, auch* $y = \varphi x$ *eigentlich zu einer Function von* w *wird, die aber auf zwiefache Weise in ihrer Form sich ändern kann, nemlich so, dass entweder* Ψw *in* $\Psi(w, k)$, *oder*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

φx in $\varphi(x, k)$ übergeht. Stellt man sich diese Veränderungen in $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$ und dessen unbekannte Stammgrösse $u = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$ wirklich vorgehend vor, so ist leicht zu sehen, dass auch jetzt noch u und v in Grössen von der Form

$$u + k\frac{\delta(u)}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2(u)}{\delta w^2} \ldots \text{ und}$$

$$v + k\frac{\delta(v)}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2(v)}{\delta w^2} \ldots$$

übergehen werden, wenn man durch $\frac{\delta(u)}{\delta w}$ und $\frac{\delta(v)}{\delta w}$ die Gesammtheit aller Glieder der entwikkelten Grösse bezeichnet, die k in der ersten Potenz enthalten, durch $2\frac{\delta^2(u)}{\delta w}$ und $2\frac{\delta^2(v)}{\delta w}$ die Gesammtheit aller Glieder, die k in der zweiten Potenz enthalten u. s. w. Dass die Wiederholung des δ, welche anzeigt, dass jene Glieder-Aggregate alle nach einerlei Regel aus einander abgeleitet werden, erlaubt sey, lässt sich nachweisen. Man findet Solches in der oben erwähnten Abhandlung des Uebersetzers.

Nun ist, nach wie vor, u die Stammgrösse von v nach x und $\frac{\delta u}{\delta w}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta w^2}$ etc. sind die Stamm-

Anwendung der Var. auf

grössen von $\frac{\delta v}{\delta w}$, $\frac{\delta^2 v}{\delta w^2}$ etc. *ebenfalls nach* x, aus demselben Grunde, wie oben.

Da aber jetzt nicht mehr x sondern w die unabhängig veränderliche Grösse ist, und $\frac{\delta u}{\delta w}$, $\frac{\delta^2 u}{\delta w^2}$...., $\frac{\delta v}{\delta w}$, $\frac{\delta^2 v}{\delta w^2}$.... w enthalten, *so kann man die Stammgrösse nicht mehr nach* x, *sondern nur nach* w *nehmen.* Man *muss also die Ausdrücke hiernach verwandeln.*

Da bekanntlich $\frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dw} = \frac{du}{dw}$ ist, und $\frac{du}{dw} = v$ seyn soll, so ist

$$\frac{du}{dw} = v \frac{dx}{dw}.$$

Man muss also, wenn man den verlangten Ausdruck von u, der allemal die Stammgrösse von v nach x ist, durch die Zurückleitung nach w finden will, die jetzt nur Statt findet, nicht sowohl von v, sondern von $v \frac{dx}{dw}$ ausgehen und nicht in v, sondern in $v \frac{dx}{dw}$ die Grössen y und x variiren. Dieses giebt, weil die Variations-Operation dieselben Regeln befolgt, wie die Ableitungs-Operation,

$$v \frac{dx}{dw} + k \frac{\delta\left(v \frac{dx}{dw}\right)}{\delta w} + \frac{k^2}{2} \frac{\delta^2\left(v \frac{dx}{dw}\right)}{\delta w^2} \ldots.$$

Alsdann sind, eben wie u die Stammgrösse von

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

$v\frac{dx}{dw}$ nach w ist, auch $\frac{\delta(u)}{\delta w}$, $\frac{\delta^2(u)}{\delta w^2}$ die Stammgrössen von $\frac{\delta\left(v\frac{dx}{dw}\right)}{\delta w}$, $\frac{\delta^2\left(v\frac{dx}{dw}\right)}{\delta w^2}$ etc. nach w.

Es kommt also darauf an, den Werth von $\frac{\delta\left(v\frac{dx}{dw}\right)}{\delta w}$ zu finden, und zwar nur diesen, weil nur die Grösse $\frac{\delta(u)}{\delta w}$ nöthig ist.

Es ist

$$\frac{\delta\left(v\frac{dx}{dw}\right)}{\delta w} = \frac{\delta v}{\delta w} \cdot \frac{dx}{dw} + v\frac{d\delta x}{dw\,\delta w}.$$

Man suche zunächst den Werth von $\frac{\delta v}{\delta w}$.

Offenbar kann man die gemeinschaftliche Zusammenwirkung der beiden Veränderungen der Abhängigkeit zwischen y und x und x und w auf zweierlei Art ausdrücken. Entweder nemlich kann man in $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$, x blos ausserhalb y, $\frac{dy}{dx}$ sich verändern lassen und dann bei y, $\frac{dy}{dx}$ etc. die zwiefache Veränderung in Rechnung bringen, die entsteht, wenn $x = \Psi w$ in $\Psi(w, k)$ und das von x abhängende $y = \varphi x$ in $\varphi(x, k)$ übergeht; oder man kann x überall, ausser und innerhalb y variiren lassen, in wel-

chem Falle dann nur noch bei y, $\frac{dy}{dx}$ etc. diejenige Veränderung übrig bleibt, die davon herrührt, dass $y = \varphi x$ in $\varphi(x, k)$ übergeht.

Das letzte Verfahren ist das angemessenste, weil dann der zweite Theil der Variation, welcher sich auf y, $\frac{dy}{dx}$ etc. bezieht, genau derselbe ist, welcher Statt findet, wenn die Abhängigkeit zwischen y und x allein sich verändert. Nun ist leicht zu sehen, dass auf diese Weise die Grösse $\frac{\delta v}{\delta w}$ gleich

$$\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{d(v)}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$$

ist, denn der Theil $\frac{\delta v}{\delta x}$ drückt denjenigen Theil von $\frac{\delta v}{\delta w}$ aus, welcher sich auf die Variation von y, $\frac{dy}{dx}$ etc. allein bezieht, der Theil $\frac{d(v)}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$ hingegen drückt die gesammte Variation aus, die von x herkommt.

Man findet also auf diesem Wege unmittelbar den gesuchten Werth der Grösse $\frac{\delta v}{\delta w}$, und erhält, wenn man denselben in die obige Gleichung

$$\frac{\delta\left(v\frac{dx}{dw}\right)}{\delta w} = \frac{\delta v}{\delta w} \cdot \frac{dx}{dw} + v\frac{d\,\delta x}{dw\,\delta w} \text{ substituirt,}$$

$$\frac{\delta\left(v\frac{dx}{dw}\right)}{\delta w} = \frac{\delta v}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dw} + \frac{d(v)}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w} \cdot \frac{dx}{dw} + v\frac{d\,\delta x}{dw\,\delta w},$$

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

oder, weil $\frac{d(v)}{dx} \cdot \frac{dx}{dw} = \frac{d(v)}{dw}$ *ist,*

$$\frac{\delta\left(v\frac{dx}{dy}\right)}{\delta w} = \frac{\delta v}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dw} + \frac{d(v)}{dw} \cdot \frac{\delta x}{\delta w} + v\frac{d\delta x}{dw\,\delta w}.$$

Die beiden letzten Glieder dieser Grösse machen zusammen, wie leicht zu sehen, eine vollständige Ableitung aus, nemlich die erste Ableitung von $v\frac{\delta x}{\delta w}$, *nach w. Also ist*

$$\frac{\delta\left(v\frac{dx}{dw}\right)}{\delta w} = \frac{\delta v}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dw} + \frac{d\left(v\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw}.$$

Dieses ist der Werth der Grösse $\frac{\delta\left(v\frac{dx}{dw}\right)}{\delta w}$, *deren erste Stammgrösse nach w, wie oben gezeigt, die Grösse* $\frac{\delta(u)}{\delta w}$ *ist, die man sucht.*

Nun ist bereits, oben in (362.) der Werth der Grösse $\frac{\delta v}{\delta x}$ *vollständig gefunden und entwickelt worden. Er ist*

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\right)\frac{\delta y}{\delta x}$$
$$+ \frac{d\left(P\frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dQ}{dx} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} + \frac{\left(\frac{d^2R}{dx^2} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} - \ldots$$
$$+ \frac{d\left(Q\frac{d\delta y}{dx\,\delta x}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dR}{dx} \cdot \frac{d\delta y}{dx\,\delta x}\right)}{dx}$$
$$+ \frac{d\left(R\frac{d^2\delta y}{dx^2\,\delta x}\right)}{dx} \ldots,$$

Anwendung der Var. auf

oder, wenn man (wie oben in der Anmerkung zu 365.) alle Glieder zusammen, welche vollständige Ableitungen nach x sind, durch $\frac{dC}{dx}$ und die Glieder der ersten Reihe, welche in $\frac{\delta y}{\delta x}$ multiplicirt sind, durch B bezeichnet,

$$\frac{\delta v}{\delta x} = B\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{dC}{dx}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{\delta v}{\delta x}$ in den obigen Ausdruck der Variation der gesuchten Stammgrösse $\frac{\delta(u)}{\delta w}$, so erhält man

$$\frac{d\left(\frac{\delta(u)}{\delta w}\right)}{dw} = \frac{\delta\left(v\frac{dx}{dw}\right)}{\delta w} = \left(B\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{dC}{dx}\right)\frac{dx}{dw} + \frac{d\left(v\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw},$$

oder, weil $\frac{dC}{dx}\cdot\frac{dx}{dw} = \frac{dC}{dw}$ ist,

$$\frac{d\left(\frac{\delta(u)}{\delta w}\right)}{dw} = \frac{\delta\left(v\frac{dx}{dw}\right)}{\delta w} = B\frac{dy}{dx} + \frac{dC}{dw} + \frac{d\left(v\frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dw}.$$

Hier ist die Zurückleitung nach w links, und bei den beiden letzten Gliedern rechts, möglich, aber bei der Grösse $B\frac{\delta y}{\delta x}$ nicht. Es folgt also zunächst, dass, wenn die Stammgrösse u ohne bestimmte Abhängigkeit zwischen x und y Statt finden soll,

$$B = 0$$

seyn muss. Nachdem auf diese Weise das Glied

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

$B\frac{\delta y}{\delta x}$ *weggefallen ist, bleibt*

$$\frac{\delta(u)}{\delta w} = C + v\frac{\delta x}{\delta w} + K$$

übrig, wenn K eine willkürliche Constante bedeutet.

Diese Grösse soll nach der Theorie der Grössten und Kleinsten, als Coefficient zu k, in der Entwickelung $u + k\frac{\delta(u)}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2(u)}{\delta w^2} \ldots$, *gleich Null seyn. Also ist, wenn man u auf die beiden Grenzen bezieht, die Gleichung für die Grenzen folgende:*

$$\overset{1}{C} - \overset{0}{C} + \overset{1}{v}\frac{\delta \overset{1}{x}}{\delta \overset{1}{w}} - \overset{0}{v}\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}} = 0,$$

wo

$$C = \frac{d\left(P\frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} + d\left(\frac{d^2R}{dx^2}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}\right)\ldots$$

$$+ \frac{d\left(Q\frac{d\delta y}{dx\,\delta x}\right)}{dx} - d\left(\frac{dR}{dx}\cdot\frac{d\delta y}{dx\,\delta x}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{d\left(R\frac{d^2\delta y}{dx^2\,\delta x}\right)}{dx} - \ldots$$

ist. Will man noch das in C vorkommende $\frac{\delta y}{\delta x}$ *auf w beziehen, so ist leicht zu sehen, dass*

$$\frac{\delta y}{\delta w} = \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{dy}{dx}\frac{\delta x}{\delta w}$$

ist, woraus der zu substituirende Werth von $\frac{\delta y}{\delta x}$,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$$

folgt.

Das Resultat ist nun folgendes:

Wenn in $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \ldots\right)$ *blos die Abhängigkeit zwischen* x *und* y *sich verändern soll, so ist die allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten, wie oben gefunden,*

$$B = 0$$

und die Grenzen-Gleichung ist

$$\overset{1}{C} - \overset{0}{C} = 0.$$

Variirt hingegen, wie hier, wegen der veränderlichen Grenzen, auch x, *so ist die allgemeine Gleichung des Grössten und Kleinsten zwar ebenfalls*

$$B = 0,$$

aber die Grenzen-Gleichung ist alsdann

$$\overset{1}{C} - \overset{0}{C} + \overset{1}{v}\frac{\delta \overset{1}{x}}{\delta \overset{1}{w}} - \overset{0}{v}\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}} = 0,$$

und wenn man in C *die Variation* $\frac{\delta y}{\delta x}$ *von* y, *nach* x, *auf* w *beziehen will, so muss man* $\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$ *statt* $\frac{\delta y}{\delta x}$ *setzen; welches mit dem Resultate des Textes übereinstimmt.*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x} \ldots\right).$$

Man sehe übrigens wegen der gänzlichen Ausführung dieses Gegenstandes die oben erwähnte Abhandlung des Uebersetzers.]

370.

Betrachtet man endlich v als eine Function von x, y und den Ableitungen $\frac{dx}{dw}$, $\frac{d^2x}{dw^2}$ $\frac{dy}{dw}$, $\frac{d^2y}{dw^2}$, so kann man die Variation von x wie die von y behandeln.

Da in diesem Falle

$$v = f\left(x, \frac{dx}{dw}, \frac{d^2x}{dw^2} \ldots y, \frac{dy}{dw}, \frac{d^2y}{dw^2} \ldots\right)$$

ist, so muss man die Glieder

$$\frac{\delta x}{\delta w} \frac{dv}{dx} + \frac{d\,\delta x}{dw\,\delta w} \cdot \frac{dv}{d\frac{dx}{dw}} + \frac{d^2\,\delta x}{dw^2\,\delta w} \cdot \frac{dv}{d\frac{d^2x}{dw^2}} \ldots$$

zu der Variation $\frac{\delta v}{\delta w}$ addiren.

Bezeichnet man diese Glieder durch

$$n\frac{\delta x}{\delta w} + p\frac{d\,\delta x}{dw\,\delta w} + q\frac{d^2\,\delta x}{dw^2\,\delta w} \ldots$$

so findet man, durch ähnliche Operationen, für die Variation $\frac{\delta x}{\delta w}$, wie oben für die Variation $\frac{\delta y}{\delta w}$, die verwandelte Grösse

$$\left(n - \frac{dp}{dw} + \frac{d^2q}{dw^2} - \frac{d^3r}{dw^3} + \ldots\right)\frac{\delta x}{\delta w},$$

so dass derjenige Theil von $\frac{\delta v}{\delta w}$, welcher keine vollständige Ableitung ausmacht,

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} \ldots\right)\frac{\delta y}{\delta w}$$

$$+\left(n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} \ldots\right)\frac{\delta x}{\delta w}$$

ist. Soll y eine Function von x seyn, so dass man $\frac{dx}{dw} = 1$ setzen kann, so giebt, wie wir oben sahen, die gemeinschaftliche Variation von x und y, für den Theil von $\frac{\delta v}{\delta w}$, welcher keine vollständige Ableitung ist, den Ausdruck

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} \ldots\right)\left(\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}\right).$$

In diesem Falle muss also der vorige Ausdruck mit dem gegenwärtigen übereinstimmen. Also erhält man

$$\left[\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} \ldots\right)\frac{\delta y}{\delta w} + \left(n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} \ldots\right)\frac{\delta x}{\delta w}\right.$$

$$\left.= \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} \ldots\right)\left(\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}\right), \text{ oder}\right]$$

$$n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} \ldots = -\frac{dy}{dx}\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} \ldots\right),$$

woraus folgt, dass die von der Variation der Grösse x herkommende Gleichung

$$n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} \ldots = 0,$$

immer mit der von der Variation der Grösse y herkommenden Gleichung

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right).$$

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0,$$

gleichbedeutend ist.

In der That fanden wir schon in der vorigen Vorlesung, auf einem andern Wege, dass diese Gleichungen immer gleichzeitig Statt finden.

371.

Einer der Vortheile der Variations-Rechnung ist, dass man nach Belieben die unbestimmten Grössen x und y und ihre Differentiale sich verändern lassen kann. Die Identität der allgemeinen Gleichung des Grössten oder Kleinsten, welche aus der einen oder der andern Variation folgt, war eins der ersten Resultate, welche die älteren Methoden nicht zu geben vermochten. Die Beweise dieses Satzes in dem zweiten und vierten Bande der Turiner Mémoiren sind weniger direct, als der ist, welcher aus den Ausdrükken folgt, die diese zweifachen Variationen geben und welche wir so eben nach Euler mittheilten. Man sehe den dritten Band seiner Integral-Rechnung.

Anwendung der Variationen u. s. w.

VIII. Allgemeine Uebersicht des bisherigen Falles, wenn die gegebene Ableitung von der Form $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots\right)$ ist.

372.

Wir wollen nun jetzt die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit vornehmen.

Es sey, wie oben,

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right),$$

so ist

$$N = \frac{dv}{dy},\; P = \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}},\; Q = \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ etc.}$$

Es sey ferner, der Kürze wegen,

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots = Y$$

$$P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots = \overset{1}{Y}$$

$$Q - \frac{dR}{dx} + \ldots = \overset{2}{Y}$$

$$R - \ldots = \overset{3}{Y} \text{ etc.}$$

so ist, in dem Falle, wenn x nicht variirt,

$$\frac{\delta v}{\delta x} = Y\frac{\delta y}{\delta x} + \frac{d\left(\overset{1}{Y}\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\overset{2}{Y}\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}\right)}{dx} \ldots \text{ [362.]}$$

wo

wo die Glieder, welche keine vollständigen Ableitungen sind, verschwinden müssen, welches, wie wir oben sahen, zunächst die allgemeine Gleichung

$$Y = 0$$

giebt.

Sodann ist wegen

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{d\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)}{dx},$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \overset{1}{Y}\frac{\delta y}{\delta x} + \overset{2}{Y}\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x} + \overset{3}{Y}\frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x}\ldots\ldots$$

und die Grenzen-Gleichung ist

$$\frac{\overset{1}{\delta u}}{\underset{1}{\delta x}} - \frac{\overset{0}{\delta u}}{\underset{0}{\delta x}} = 0 \text{ [365.]}$$

Verändert sich auch x zugleich mit y, so muss man $\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}$ statt $\frac{\delta y}{\delta x}$ schreiben und das Glied $v\frac{\delta x}{\delta w}$ addiren [368.]

Anwendung auf eine gegebene Ableitung von der Form

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}\ldots\ldots\right).$$

372.

Man setze, zweitens, die gegebene Function v enthalte eine dritte Grösse z, nebst den Ableitungen

Anwend. auf eine gegeb. Abl. von der Form

derselben $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}$ *etc.*, so kann man in Beziehung auf diese Grösse z völlig eben so verfahren, wie in Beziehung auf y. Der Werth von $\frac{\delta v}{\delta x}$ ist dann, wenn man x unveränderlich annimmt, aus zwei Theilen zusammengesetzt, deren einer sich auf $\frac{\delta y}{\delta x}$, der andere auf $\frac{\delta z}{\delta x}$ bezieht.

Wenn also z. B.

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots\ldots\right),$$

ist, so erhält man, wenn man die obige Bezeichnung $Y, \overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Y} \ldots\ldots$ beibehält und die ganz ähnlichen, auf z sich beziehenden Grössen, durch $Z, \overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}, \overset{3}{Z} \ldots\ldots$ bezeichnet, [*Um den Setzer zu schonen, habe ich die Werthe derselben nicht, wie im Original, ausgeschrieben. Es sind die obigen, wenn man nur z statt y schreibt,*]

$$\begin{aligned}\frac{\delta v}{\delta x} = {} & Y\frac{\delta y}{\delta x} + Z\frac{\delta z}{\delta x} \\ & + \frac{d\left(\overset{1}{Y}\frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} + \frac{d\left(\overset{2}{Y}\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}\right)}{dx} \ldots\ldots \\ & + \frac{d\left(\overset{1}{Z}\frac{\delta z}{\delta x}\right)}{dx} + \frac{d\left(\overset{2}{Z}\frac{d\,\delta z}{dx\,\delta x}\right)}{dx} \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots . z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots .\right).$$

Die Glieder $Y\frac{\delta y}{\delta x} + Z\frac{\delta z}{\delta x}$, welche keine vollständige Ableitungen sind, so lange $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta z}{\delta x}$ willkürlich bleiben sollen, müssen verschwinden; welches die allgemeine Gleichung [*des Grössten oder Kleinsten*]

$$Y\frac{\delta y}{\delta x} + Z\frac{\delta z}{\delta x} = 0$$

giebt, welcher man auf eine angemessene Weise genugthun muss, je nachdem die veränderlichen Grössen y und z von einander unabhängig, oder aber, vermöge gegebener Bedingungen, von einander abhängig sind.

Hierauf erhält man, wenn man die Stammgrösse nimmt, weil $\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{d\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)}{dx}$ ist, die Gleichung

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \overset{1}{Y}\frac{\delta y}{\delta x} + \overset{2}{Y}\frac{d\frac{\delta y}{\delta x}}{dx} + \overset{3}{Y}\frac{d^2\frac{\delta y}{\delta x}}{dx^2} \ldots .$$

$$+ \overset{1}{Z}\frac{\delta z}{\delta x} + \overset{2}{Z}\frac{d\frac{\delta z}{\delta x}}{dx} + \overset{3}{Z}\frac{d^2\frac{\delta z}{\delta x}}{dx^2} \ldots .,$$

welche den Werth von $\frac{\delta u}{\delta x}$ giebt, den man in die Grenzen-Gleichung

$$\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0$$

setzen muss.

Anwend. auf eine gegeb. Abl. von der Form.

Variirt auch x, so muss man $\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$ statt $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta z}{\delta w} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$ statt $\frac{\delta z}{\delta x}$ setzen und das Glied $v \frac{\delta x}{\delta w}$ zu $\frac{\delta u}{\delta x}$ hinzurechnen.

373.

Man betrachte die Gleichung

$$Y \frac{\delta y}{\delta x} + Z \frac{\delta z}{\delta x} = 0.$$

Ist kein Verhältniss zwischen y und z durch die Bedingungen der Aufgabe gegeben, so sind die Variationen dieser Grössen von einander unabhängig und die Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn, einzeln,

$$Y = 0 \text{ und } Z = 0$$

ist. Diese beiden Gleichungen dienen dann zur Bestimmung von y und z in x.

Wären dagegen die Grössen y und z durch eine Gleichung zwischen x, y und z mit einander verbunden, welche durch

$$[E =] \; F(x, y, z) = 0$$

bezeichnet werden mag, so müsste man aus dieser Gleichung den Werth von z in x und y suchen und ihn in den Ausdruck von w substituiren. Aber für die Gleichung $Y \frac{\delta y}{\delta x} + Z \frac{\delta z}{\delta x} = 0$ ist es hinreichend, nur das Verhältniss der Variationen $\frac{\delta y}{\delta x}$ und

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots\right).$$

$\frac{\delta z}{\delta x}$ [*welches die Gleichung* $E = 0$ *bestimmt*] zu kennen. Man darf also nur erwägen, dass, da das Verhältniss zwischen den Grössen x, y und z auch in dem veränderten Zustande derselben Statt finden muss, die Bedingungs-Gleichung $E = 0$ nothwendig auch noch gilt, wenn man $x + k\frac{\delta x}{\delta w}$ statt x, $y + k\frac{\delta y}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta w^2} \ldots$ statt y und $z + k\frac{\delta z}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 z}{\delta w^2} \ldots$ statt z setzt, was auch k seyn mag. Hieraus folgt, vermöge dessen, was in den ersten Vorlesungen gezeigt worden, dass die Ableitungen der Gleichung $E = 0$, nach den Variationen von x, y, z genommen, ebenfalls Statt finden. Die Bedingungs-Gleichung $E = 0$ giebt also die Variations-Gleichungen

$$\frac{\delta(E)}{\delta w} = 0, \quad \frac{\delta^2(E)}{\delta w^2} = 0 \text{ etc.}$$

Betrachtet man x als unveränderlich, so ist

$$\frac{\delta(E)}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta x} \cdot \frac{dE}{dy} + \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \frac{dE}{dz},$$

weil der Algorithm der Variationen, demjenigen der Ableitungen ganz gleich ist. Man hat also die Gleichung

$$\frac{dE}{dy} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{dE}{dz} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} = 0,$$

woraus sich das Verhältniss zwischen $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta z}{\delta x}$ finden lässt, welches dann, in die Gleichung des Grössten oder Kleinsten $Y\frac{\delta y}{\delta x} + Z\frac{\delta z}{\delta x} = 0$ substituirt,

[*wenn man nemlich die erste Gleichung mit z, die zweite mit* $\frac{dE}{dz}$ *multiplicirt und die Producte von einander abzieht*]

$$Y\frac{dE}{dz} - Z\frac{dE}{dy} = 0$$

giebt, welche Gleichung, verbunden mit der gegebenen Bedingungs-Gleichung

$$E = 0,$$

zur Bestimmung von y und z in x dient.

Wir nahmen hier an, dass x nicht variire. Fände das Gegentheil Statt, so hätte man, statt der Gleichung $Y\frac{\delta y}{\delta x} + Z\frac{\delta z}{\delta x} = 0$, folgende:

$$Y\left(\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right) + Z\left(\frac{\delta z}{\delta w} - \frac{dz}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right) = 0.$$

Die Bedingungs-Gleichung $E = 0$ gäbe alsdann die Ableitungs-Gleichung

$$\frac{dE}{dx} + \frac{dE}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dE}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0,$$

und die Variations-Gleichung

$$\frac{dE}{dy}\cdot\frac{\delta x}{\delta w} + \frac{dE}{dy}\cdot\frac{\delta y}{\delta w} + \frac{dE}{dz}\cdot\frac{\delta z}{\delta w} = 0.$$

Setzt man in diese Letzte den aus der Ableitungs-Gleichung genommenen Werth von $\frac{dE}{dx}$, so erhält man [*wenn man zu dem Ende die Ableitungs-Gleichung mit* $\frac{\delta x}{\delta w}$ *multiplicirt und das Product von der Variations-Gleichung abzieht*]

Beding.-Gleich. zwischen den Grössen u. s. w.

$$\frac{dE}{dy}\left(\frac{\delta y}{\delta w}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right)+\frac{dE}{dz}\left(\frac{\delta z}{\delta w}-\frac{dz}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right)=0.$$

Diese Gleichung, mit der obigen verbunden, giebt [*wie leicht zu sehen*] die nemliche Gleichung

$$Y\frac{dE}{dz}-Z\frac{dE}{dy}=0,$$

woraus man allgemein sieht, dass die Variation $\frac{\delta x}{\delta w}$ von x immer nur auf die Grenzen-Gleichung, niemals aber auf die allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten Einfluss hat.

Wie gegebene Bedingungs - Gleichungen zwischen den Grössen der Aufgabe in Rechnung zu bringen.

I. Für eine einzelne Bedingungs - Gleichung, ohne Rücksicht auf die Variation der unabhängig - veränderlichen Grösse.

374.

Wir wollen nun ferner, um die Aufgabe [*gegebene Bedingungs - Gleichungen zwischen den veränderlichen Grössen in Rechnung zu bringen*] ganz zu umfassen, annehmen, die Bedingungs - Gleichung zwischen x, y, z enthielte auch zugleich die Ableitungen von y und z [*nach* x] und sey im Allgemeinen von der Gestalt

$$L=F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots\ldots\right)=0.$$

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

Die Variations-Gleichung zu dieser Gleichung ist

$$\frac{\delta(L)}{\delta x} = 0,$$

welche, wenn man sie entwickelt, Folgendes giebt:

$$\frac{\delta(L)}{\delta x} =$$

$$\frac{dL}{dy} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{dL}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x} + \frac{dL}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{dL}{dz} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} + \frac{dL}{d\frac{dz}{dx}} \cdot \frac{d\,\delta z}{dx\,\delta x} + \frac{dL}{d\frac{d^2 z}{dx^2}} \cdot \frac{d^2\,\delta z}{dx^2\,\delta x} \ldots\ldots = 0$$

Da die Ableitungen von $\frac{\delta z}{\delta x}$ in dieser Gleichung nur in einer Abmessung vorkommen, so liesse sich daraus $\frac{\delta z}{\delta x}$, wenn man sich der Methode der Multiplicatoren bediente, und nach und nach die Stammgrössen nähme, finden. Allein dieses erfordert weitläuftige und verwickelte Rechnungen. Viel einfacher ist die Methode der Coefficienten, welche in der „Mecanique analytique," die ganz auf die Variations-Rechnung gegründet ist, angewendet worden.

Man multiplicire, nach dieser Methode, blos das erste Glied der Gleichung $\frac{\delta(L)}{\delta x} = 0$ mit einem unbestimmten Coefficienten z. B. λ addire das Product zu der obigen Variation $\frac{\delta v}{\delta x}$, und verwandele dann alle neue Glieder so, dass die Ableitungen der Va-

riationen $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta z}{\delta x}$ nur in den Gliedern vorkommen, welche vollständige Ableitungen sind, eben wie solches mit den zu $\frac{\delta v}{\delta x}$ gehörigen Gliedern geschah; so erhält man einen neuen Ausdruck von $\frac{\delta v}{\delta x}$, in welchem man nun die Variationen $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta z}{\delta x}$, wegen der unbestimmten Grösse λ, als unabhängig von einander betrachten kann. [*Nemlich die Aufgabe ist jetzt, das Grösste oder Kleinste der unbekannten Stammgrösse u zu der Grösse mit Ableitungen*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \dots\right),$$

zwischen bestimmten Grenzen, unter der Bedingung zu finden, dass zwischen den veränderlichen Grössen x, y und z zugleich die Bedingungs-Gleichung

$$L = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \dots\right) = 0$$

Statt findet.

Man nehme zu dem Ende die Variations-Gleichung von $L = 0$, *welche* $\frac{\delta (L)}{\delta x} = 0$ *ist, multiplicire sie mit einem unbestimmten Coefficienten* λ *und addire sie zu der Grösse* $\frac{\delta v}{\delta x}$, *deren Stammgrösse* $\frac{\delta u}{\delta x}$, *der obigen Theorie für die Grössten oder Kleinsten zu Folge, Null seyn muss*

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

welches angeht, weil $\frac{\delta(L)}{\delta x}$ *gleich Null und folglich auch* $\lambda\frac{\delta(L)}{\delta x}=0$ *ist, eine Null aber immer, ohne den Werth einer Grösse zu verändern, addirt werden kann. Dadurch entsteht die Grösse*

$$\frac{\delta v}{\delta x}+\lambda\frac{\delta(L)}{\delta x},$$

deren Stammgrösse nun gleich Null seyn soll.

Man entwickele die Variations-Gleichung $\frac{\delta(L)}{\delta x}=0$, *wie oben im Text. Dieses giebt, wenn man, der Kürze wegen, die Ableitungen von L nach* y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$...., *nachdem solche sämmtlich mit* λ *multiplicirt worden, durch* m, n, p.... *und nach* z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$.... *durch* m', n', p'...., *die Grössen* $\frac{\delta y}{\delta x}$ *und* $\frac{\delta z}{\delta x}$, *aber durch* ε *und* τ *bezeichnet,*

$$\lambda\frac{\delta(L)}{\delta x}=m\varepsilon+n\frac{d\varepsilon}{dx}+p\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}....$$
$$+m'\tau+n'\frac{d\tau}{dx}+p'\frac{d^2\tau}{dx^2}....=0.$$

Nun ist

$$n\frac{d\varepsilon}{dx}=\frac{d(n\varepsilon)}{dx}-\varepsilon.\frac{dn}{dx},$$

$$p\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}=\frac{d\left(p\frac{d\varepsilon}{dx}\right)}{dx}-\frac{d\varepsilon}{dx}.\frac{dp}{dx}=\frac{d\left(p\frac{d\varepsilon}{dx}\right)}{dx}-\frac{d\left(\varepsilon\frac{dp}{dx}\right)}{dx}+\varepsilon\frac{d^2p}{dx^2}$$

etc.

der *Aufgabe in Rechnung zu bringen.*

$$n'\frac{d\tau}{dx}=\frac{d(n'\tau)}{dx}-\varepsilon.\frac{dn'}{dx},$$

$$p'\frac{d^2\tau}{dx^2}=\frac{d\left(p'\frac{d\tau}{dx}\right)}{dx}-\frac{d\left(\tau\frac{dp'}{dx}\right)}{dx}+\tau\frac{d^2p'}{dx^2}$$

etc.;

also

$$\lambda\frac{\delta(L)}{\delta x}=m\varepsilon+\frac{d(n\varepsilon)}{dx}-\varepsilon.\frac{dn}{dx}+\frac{d\left(p\frac{d\varepsilon}{dx}\right)}{dx}-\frac{d\left(\varepsilon\frac{dp}{dx}\right)}{dx}+\varepsilon\frac{d^2p}{dx}\ldots.$$

$$+m'\tau+\frac{d(n'\tau)}{dx}-\tau\frac{dn'}{dx}+\frac{d\left(p'\frac{d\tau}{dx}\right)}{dx}-\frac{d\left(\tau\frac{dp'}{dx}\right)}{dx}+\tau\frac{d^2p'}{dx^2}\ldots.$$

oder

$$\lambda\frac{\delta(L)}{\delta x}=\left(m-\frac{dn}{dx}+\frac{d^2p}{dx^2}\ldots.\right)\varepsilon$$

$$+\frac{d(n\varepsilon)}{dx}-\frac{d\left(\varepsilon\frac{dp}{dx}\right)}{dx}\ldots.$$

$$+d\left(p\frac{d\varepsilon}{dx}\right)\ldots.$$

etc.

$$+\left(m'-\frac{dn'}{dx}+\frac{d^2p'}{dx^2}\ldots.\right)\tau$$

$$+\frac{d(n'\tau)}{dx}-d\left(\tau\frac{dp'}{dx}\right)\ldots.$$

$$+d\left(p'\frac{d\tau}{dx}\right)-\ldots.$$

etc.,

oder

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

$$\lambda \frac{\delta(L)}{\delta x} = \left(m - \frac{dn}{dx} + \frac{d^2p}{dx^2} \ldots\right)\varepsilon$$

$$+ \frac{d\left(\left(n - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2} \ldots\right)\varepsilon\right)}{dx}$$

$$+ \frac{d\left(\left(p - \frac{dq}{dx} \ldots\right)\frac{d\varepsilon}{dx}\right)}{dx}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left(m' - \frac{dn'}{dx} + \frac{d^2p'}{dx^2} \ldots\right)\tau$$

$$+ \frac{d\left(\left(n' - \frac{dp'}{dx} + \frac{d^2q'}{dx^2} \ldots\right)\tau\right)}{dx}$$

$$+ \frac{d\left(\left(p' - \frac{dq'}{dx} \ldots\right)\frac{d\tau}{dx}\right)}{dx}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

wo

$$m = \lambda \frac{dL}{dy},\ n = \lambda \frac{dL}{d\frac{dy}{dx}},\ p = \lambda \frac{dL}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \ldots$$

$$m' = \lambda \frac{dL}{dz},\ n' = \lambda \frac{dL}{d\frac{dz}{dx}},\ p' = \lambda \frac{dL}{d\frac{d^2z}{dx^2}} \ldots$$

$$\varepsilon = \frac{\delta y}{\delta x} \text{ und } \tau = \frac{dz}{dx},$$

folglich

$$\lambda \frac{\delta(L)}{\delta x} = \left(\lambda \frac{dL}{dy} - \frac{d\left(\lambda \frac{dL}{d\frac{dy}{dx}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\lambda \frac{dL}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\right)}{dx^2} \ldots\right)\frac{\delta y}{\delta x}$$

der Aufgabe in Rechnung zu bringen.

$$+d\left(\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{dy}{dx}}-\frac{d\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\right)}{dx}\ldots\right)\frac{\delta y}{\delta x}\right):dx$$

$$+d\left(\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{d^2y}{dx^2}}-\ldots\right)d\frac{\delta y}{\delta x}\right):dx$$

.

$$+\left(\lambda\frac{dL}{dy}-\frac{d\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{dz}{dx}}\right)}{dx}+\frac{d^2\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{d^2z}{dx^2}}\right)}{dx^2}-\ldots\right)\frac{\delta z}{\delta x}$$

$$+d\left(\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{dz}{dx}}-\frac{d\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{d^2z}{dx^2}}\right)}{dx}\ldots\right)\frac{\delta z}{\delta x}\right):dx$$

$$+d\left(\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{d^2z}{dx^2}}\ldots\right)d\frac{\delta z}{\delta x}\right):dx$$

.

Diese Grösse muss nun zu $\frac{\delta v}{\delta x}$ *addirt werden.*]

Man bezeichne in diesen Grössen die Coefficienten zu $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta z}{\delta x}$, ausserhalb des Ableitungs-Zeichens, durch (Y) und (Z) und unter dem Ableitungs-Zeichen durch (Y'), (Z'); ferner die Coefficienten zu $d\frac{\delta y}{\delta x}$ und $d\frac{\delta z}{\delta x}$, unter dem Ableitungs-Zeichen, durch (Y''), (Z'') u. s. w., so ist

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

$$\lambda \frac{\delta(L)}{\delta x} = (Y) \frac{\delta y}{\delta x} + (Z) \frac{\delta z}{\delta x}$$

$$+ \frac{d\left((Y') \frac{\delta y}{\delta x}\right)}{dx} + \frac{d\left((Y'') \frac{d \frac{\delta y}{\delta x}}{dx}\right)}{dx} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{d\left((Z') \frac{\delta z}{\delta x}\right)}{dx} + \frac{d\left((Z'') \frac{d \frac{\delta z}{\delta x}}{dx}\right)}{dx} \ldots\ldots$$

Diese Grösse muss nun zu $\frac{\delta v}{\delta x}$ [*welches in* (372.) *auf eine ähnliche Weise entwickelt wurde*] addirt werden. [*Man möge sich diese beiden Grössen zusammengeschrieben vorstellen. Wegen der grossen Beschwerlichkeit der alten Zeichen würde diese Wiederholung allzuviel Raum wegnehmen.*]

Da man nun jetzt [*nachdem die neue unbestimmte Grösse* λ *eingeführt worden*] die Variationen $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta z}{\delta x}$ als unabhängig von einander betrachten kann, so erhält man, zu Folge der obigen Principien [*weil die Grössen ausserhalb des Ableitungs-Zeichens, für sich gleich Null seyn müssen*] die beiden allgemeinen Gleichungen des Grössten oder Kleinsten:

$$Y + (Y) = 0 \text{ und } Z + (Z) = 0,$$

[*welches, nemlich in der zusammengeschriebenen Grösse* $\frac{\delta v}{\delta x} + \lambda \frac{\delta(L)}{\delta x}$, *die Coefficienten zu* $\frac{\delta y}{\delta x}$ *und* $\frac{\delta z}{\delta x}$ *sind*] zwischen welchen λ eliminirt wer-

den muss. Die entstehende Gleichung, verbunden mit der Bedingungs-Gleichung [$L = o$] giebt die Werthe von y und z in x.

Nach diesem ist die Variation $\frac{\delta u}{\delta x}$ selbst [*nemlich die Stammgrösse von* $\frac{\delta v}{\delta x}$, *die sich jetzt ausdrükken lässt, weil alle übrig bleibenden Glieder vollständige Ableitungen sind*]

$$\frac{\delta u}{\delta x} = (\acute{Y} + (\acute{Y}))\frac{\delta y}{\delta x} + (\acute{\acute{Y}} + (\acute{\acute{Y}}))\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x} \ldots\ldots$$

$$+ (\acute{Z} + (\acute{Z}))\frac{\delta z}{\delta x} + (\acute{\acute{Z}} + (\acute{\acute{Z}}))\frac{d\,\delta z}{dx\,\delta x} \ldots\ldots,$$

welches der Werth von $\frac{\delta u}{\delta x}$ für die Grenzen-Gleichung

$$\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = o$$

ist.

II. Einführung einer Bedingungs-Gleichung, wenn die unabhängig veränderliche Grösse der Aufgabe ebenfalls variirt.

375.

Will man zugleich auf die Variation von x Rücksicht nehmen, so muss man zu $\frac{\delta u}{\delta x}$ das Glied $v\frac{\delta x}{\delta w}$ addiren, und statt der Grössen $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta z}{\delta x}$ und ihrer

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

Ableitungen $\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$ und $\frac{\delta z}{\delta w} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$, die Ableitungen dieser setzen.]

Eigentlich müsste man in dem letzten Falle zu $\frac{\delta v}{\delta x}$, zu Folge der, oben für den vollständigen Werth der Variation $\frac{dx}{dw} . L$ gefundenen Ausdrücke, das Glied $\lambda \frac{d\left(\frac{\delta x}{\delta w} L\right)}{dx}$ addiren. Dieses Glied lässt sich aber in $\frac{d\left(\lambda L \frac{\delta x}{\delta w}\right)}{dx} - \frac{d\lambda}{dx} L \frac{\delta x}{\delta w}$ verwandeln, welche Grösse, wegen $L = o$, verschwindet. Jedoch müsste es beibehalten werden, wenn die Bedingungen zwischen y und z nur durch die Variations-Gleichung $\frac{\delta(L)}{\delta x} = o$ gegeben wären.

III. Einführung von Bedingungs-Gleichungen für die Grenzen.

376.

In der Grenzen-Gleichung kann man [*wie oben in* (365.) *bemerkt*] ebenfalls die Variationen $\frac{\delta x}{\delta w}$, $\frac{\delta y}{\delta w}$ und $\frac{\delta z}{\delta w}$ nebst ihren Ableitungen als unabhängig von einander betrachten, so lange durch die Aufgabe keine besondere Bedingungs-Gleichungen für die Grenzen gegeben sind.

Man

der Aufgabe in Rechnung zu bringen.

Man setze aber z. B. es wären eine oder mehrere Bedingungs-Gleichungen zwischen den Grössen $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots. z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots.$, in Beziehung auf die Grenzen gegeben, das heisst also, zwischen den Grössen

$$\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \frac{\overset{0}{dy}}{\overset{0}{dx}}, \frac{\overset{0}{d^2y}}{\overset{0}{dx^2}} \ldots. \overset{0}{z}, \frac{\overset{0}{dz}}{\overset{0}{dx}}, \frac{\overset{0}{d^2z}}{\overset{0}{dx^2}} \ldots.$$

$$\overset{1}{x}, \overset{1}{y}, \frac{\overset{1}{dy}}{\overset{1}{dx}}, \frac{\overset{1}{d^2y}}{\overset{1}{dx^2}} \ldots. \overset{1}{z}, \frac{\overset{1}{dz}}{\overset{1}{dx}}, \frac{\overset{1}{d^2z}}{\overset{1}{dx^2}} \ldots.$$

und das Grösste oder Kleinste solle nur zwischen den Functionen Statt finden, welche zwischen gegebenen Grenzen diesen Bedingungen genugthun, so müssen die nemlichen [*Grenzen*-] Gleichungen auch in dem variirten Zustande Statt finden, also auch, wenn man $x + k\frac{\delta x}{\delta w}$, $y + k\frac{\delta y}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 y}{\delta w^2} \ldots.$ $z + k\frac{\delta z}{\delta w} + \frac{k^2}{2}\frac{\delta^2 z}{\delta w^2} \ldots.$ statt x, y, z setzt; mithin erhält man auch die Variationen dieser Gleichungen, wie wir schon oben sahen.

Man bezeichne irgend eine gegebene Bedingungs-Gleichung zwischen den oben benannten Grössen $\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \frac{\overset{0}{dy}}{\overset{0}{dx}}$ *etc.* durch

$$T = 0,$$

so erhält man die variirte Gleichung:

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

$$\frac{dT}{d\overset{0}{x}}\cdot\frac{\delta\overset{0}{x}}{\delta\overset{0}{w}}+\frac{dT}{d\overset{0}{y}}\cdot\frac{\delta\overset{0}{y}}{\delta\overset{0}{w}}+\frac{dT}{d\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}}\cdot\frac{d\,\delta\overset{0}{y}}{d\overset{0}{w}\,\delta\overset{0}{w}}\ldots\ldots+\frac{dT}{\overset{0}{z}}\cdot\frac{\delta\overset{0}{z}}{\delta\overset{0}{w}}\ldots\ldots$$

$$\frac{dT}{d\overset{1}{x}}\cdot\frac{\delta\overset{1}{x}}{\delta\overset{1}{w}}+\frac{dT}{d\overset{1}{y}}\cdot\frac{\delta\overset{1}{y}}{\delta\overset{1}{w}}+\frac{dT}{d\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}}\cdot\frac{d\,\delta\overset{1}{y}}{d\overset{1}{w}\,\delta\overset{1}{w}}\ldots\ldots+\frac{dT}{d\overset{1}{z}}\cdot\frac{\delta\overset{1}{z}}{\delta\overset{1}{w}}\ldots\ldots=0.$$

Man multiplicire diese und die etwanigen andern Bedingungs-Gleichungen wiederum mit unbestimmten Coefficienten z. B. α, β *etc.* und addire die Producte zu der obigen Grenzen-Gleichung, so kann man alsdann die Variationen $\frac{\delta\overset{0}{x}}{\delta\overset{0}{w}}$, $\frac{\delta\overset{0}{y}}{\delta\overset{0}{w}}$, $\frac{\delta\overset{0}{z}}{\delta\overset{0}{w}}$, $\frac{\delta\overset{1}{x}}{\delta\overset{1}{w}}$, $\frac{\delta\overset{1}{y}}{\delta\overset{1}{w}}$, $\frac{\delta\overset{1}{z}}{\delta\overset{1}{w}}$ und ihre Ableitungen als von einander unabhängig betrachten, welches eben so viele einzelne Grenzen-Gleichungen als Variationen giebt. Diesen Gleichungen muss sodann mittelst der unbestimmten Coefficienten α, β.... und der willkürlichen Constanten, die in den Ausdrücken von y und z in x vorkommen, genuggethan werden. [*Das Verfahren mit diesen Bedingungs-Gleichungen ist im wesentlichen das Nemliche, wie oben bei* $\frac{\delta v}{\delta x}$. *Man sehe auch über die Einführung der Bedingungs-Gleichungen durch unbestimmte Coefficienten eine kleine Bemerkung weiter unten in* (379)]

der *Aufgabe in Rechnung zu bringen.*

377.

Wegen der Variationen $\frac{\delta \overset{0}{z}}{\delta \overset{0}{w}}, \frac{d\,\delta \overset{0}{z}}{d\overset{0}{w}\,\delta \overset{0}{w}} \ldots$ und $\frac{\delta \overset{1}{z}}{\delta \overset{1}{w}}, \frac{d\,\delta \overset{1}{z}}{\delta \overset{1}{w}\,\delta \overset{1}{w}} \ldots$ ist zu bemerken, dass wenn z. B. z durch eine Ableitungs-Gleichung gegeben und diese Gleichung von der nten Ordnung wäre, die Werthe von $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2} \ldots \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$ zu einem gegebenen Werthe von x [*wegen der Constanten*] willkürlich wären und nach den Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden müssten. Bezieht man also diese Werthe auf die erste Grenze, so muss man die Grössen $\overset{0}{z}, \frac{d\overset{0}{z}}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}\overset{0}{z}}{d\overset{0}{x}^{n-1}}$ als gegebene Functionen von $\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}} \ldots$ betrachten, deren Variationen $\frac{\delta \overset{0}{z}}{\delta \overset{0}{w}}, \frac{d\,\delta \overset{0}{z}}{d\overset{0}{w}\,\delta \overset{0}{w}} \ldots$ ebenfalls in Functionen gegeben sind, welche die Variationen $\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}}, \frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{w}}, \frac{d\,\delta \overset{0}{y}}{d\overset{0}{w}\,\delta \overset{0}{w}} \ldots$ zu Factoren haben. Die Variationen $\frac{\delta \overset{1}{z}}{\delta \overset{1}{w}}, \frac{d\,\delta \overset{1}{z}}{d\overset{1}{w}\,\delta \overset{1}{w}}, \frac{d^2\,\delta \overset{1}{z}}{d\overset{1}{w}^2\,\delta \overset{1}{w}}$ …., welche sich auf die andre Grenze beziehen, sind alsdann unbestimmt und man muss ihre Coefficienten, einzeln gleich Null setzen.

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

IV. Fall, wenn die durch die Bedingungs-Gleichungen zwischen den Grössen der Aufgabe bestimmte abhängige Grösse selbst ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll.

378.

Man kann auch verlangen, dass die durch die Bedingungs-Gleichung gegebene Function z selbst ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll. Man darf alsdann nur $u = z$ und folglich $v = \frac{dz}{dx}$ setzen.

In diesem Falle wäre dann [*wenn, wie oben,*

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots\right)$$

ist,

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots\right) = \frac{dz}{dx},$$

also]

$$\frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = 0 \text{ etc.}$$

$$\frac{dv}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{d\frac{dz}{dx}} = 1, \quad \frac{dv}{d\frac{d^2z}{dx^2}} = 0 \text{ etc.}$$

[*weil der gegenwärtige Werth* $\frac{dz}{dx}$ *von* v *weder* $y, \frac{dy}{dx} \ldots$ *noch* $z, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots$, *sondern blos* $\frac{dz}{dx}$ *enthält. Uebrigens kann man deshalb* $u = z$ *setzen, weil diese beiden Grössen die gemeinschaft-*

liche Eigenschaft haben, dass sie ein Grösstes oder Kleinstes seyn sollen.]

Dieses giebt [*in* 371 *und* 372. *wie leicht zu sehen, weil alle die Grössen, N, P, Q.... für y und z gleich Null sind, bis auf die eine P, für z, welche* 1 *ist*]

$$Y = 0,\ \overset{1}{Y} = 0 \ldots.\ Z = 0,\ \overset{1}{Z} = 1,\ \overset{2}{Z} = 0 \text{ etc.}$$

Also sind dann die allgemeinen Gleichungen des Grössten oder Kleinsten blos

$$(Y) = 0 \text{ und } (Z) = 0$$

[(374.) *weil die Grössen Y und Z gleich Null sind und also nur die von den Bedingungs-Gleichungen herkommenden Grössen* (Y) *und* (Z) *übrig bleiben.*] Sodann wäre [*ebenfalls zu Folge* (374.) *weil alle Grössen* $Y, \acute{Y} \ldots.\ Z, \acute{Z} \ldots.$ *Null sind und blos die einzige Grösse* $\acute{Z}$ *übrig bleibt, die gleich* 1 *ist*]

$$\frac{\delta u}{\delta x} = (\acute{Y})\frac{\delta y}{\delta x} + (\acute{\acute{Y}})\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x} \ldots.$$

$$+ (1 + (\acute{Z}))\frac{\delta z}{\delta x} + (\acute{\acute{Z}})\frac{d\,\delta x}{dx\,\delta x} \ldots.$$

Die Gleichung $(Z) = 0$ wird zur Bestimmung der Grösse λ dienen und die Gleichung $(Y) = 0$, verbunden mit der gegebenen Gleichung $L = 0$, wird den Werth von y in x geben. Die höchste Ableitung von z, welche in der Gleichung $L = 0$ vorkommt, sey $\frac{d^n z}{dx^n}$, so ist die Gleichung $(Z) = 0$

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

[*wie in dem Werthe von* (Z) *in* (374.)

$$(Z) = \lambda \frac{dL}{dz} - \frac{d\left(\lambda \frac{dL}{d\frac{dz}{dx}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\lambda \frac{dL}{d\frac{d^2z}{dx^2}}\right)}{dx^2} \ldots$$

leicht zu sehen] nach λ von der nten Ordnung und lineär [*weil überall* λ *nur in der ersten Potenz vorkommt*]. Der Werth von λ muss also eben so viele Constanten, ebenfalls in der lineären Form, enthalten, welche dazu dienen können, die Variationen $\frac{\delta \overset{1}{z}}{\delta \overset{1}{x}}$, $\frac{d\delta \overset{1}{z}}{d\overset{1}{x}\,\delta \overset{1}{x}}$ *etc.* in den Grenzen-Gleichungen verschwinden zu machen, während die Variationen $\frac{\delta \overset{0}{z}}{\delta \overset{0}{x}}$, $\frac{d\delta \overset{0}{z}}{d\overset{0}{x}\,\delta \overset{0}{x}}$ *etc.*, wie wir vorhin bemerkten, als durch die Aufgabe gegeben betrachtet werden.

Man muss also diese Constanten so bestimmen, dass

$$1 + (\overset{\prime}{Z}_1) = 0, \quad (\overset{\prime\prime}{Z}_1) = 0, \quad (\overset{\prime\prime\prime}{Z}_1) = 0 \ etc.$$

st [*wo* $(\overset{\prime}{Z}_1)$, $(\overset{\prime\prime}{Z}_1)$, $(\overset{\prime\prime\prime}{Z}_1)$ *etc. die Werthe von* $(\overset{\prime}{Z})$, $(\overset{\prime\prime}{Z})$, $(\overset{\prime\prime\prime}{Z})$ *etc., auf die ersten Grenzen bezogen, bedeuten. Diese Gleichungen finden deswegen einzeln Statt, weil nunmehr, vermittelst der Constanten, die auf die ersten Grenzen bezogenen Variationen* $\frac{\delta z}{\delta x}$, $\frac{d\delta z}{dx\,\delta x}$ *etc., welche oben in* $\frac{\delta u}{\delta x}$ *die Coefficienten zu* $1 + (\overset{\prime}{Z})$, $(\overset{\prime\prime}{Z})$ *etc. ausmachten, von ein-*

der Aufgabe in Rechnung zu bringen.

ander nicht mehr abhängen]. Diesen Bedingungen kann man blos dadurch genugthun, dass man

$$\lambda_1 = 0, \quad \frac{d\lambda_1}{dx_1} = 0, \quad \frac{d^2\lambda_1}{dx^2_1} = 0 \ldots. \quad \frac{d^{n-1}\lambda_1}{dx^{n-1}_1} = 0$$

und $\frac{d^n\lambda_1}{dx^n_1} \cdot \frac{dL_1}{d\,\frac{d^n z_1}{dx^n_1}} + 1 = 0$

setzt [*denn diese Voraussetzung erfüllt, wie leicht in* (374.) *zu sehen die Gleichungen* $1 + (\acute{Z}_1) = 1$, $(\acute{\acute{Z}}_1) = 0$ *etc.*]

Dieses kommt mit der Auflösung dieser Aufgabe in dem vierten Bande der Turiner Mémoiren überein.

V. Allgemeine Methode, gegebene Bedingungs-Gleichungen zwischen den Grössen der Aufgabe in Rechnung zu bringen.

379.

Es sey allgemein v irgend eine Function der veränderlichen Grössen x, y, z, t.... und ihrer Ableitungen irgend einer Ordnung, mit Ausnahme von x, deren erste Ableitung gleich 1 gesetzt wird. Ferner sollen $L = 0$, $M = 0$ *etc.* beliebige Bedingungs-Gleichungen zwischen den veränderlichen Grössen und ihren Ableitungen bedeuten, jedoch soll die Zahl dieser Bedingungs-Gleichungen nicht grösser als die Zahl der veränderlichen Grössen, weniger 2 seyn, damit Verhältnisse zwischen den Grössen der Aufgabe

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

unbestimmt bleiben. [*Es ist also erstlich die Grösse v, und dann sind ausserdem $n-2$ Bedingungs-Gleichungen $L=0$, $M=0$ gegeben. Sämmtliche Grössen v, L, M etc. sind bestimmte Functionen von* $x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}, z, \frac{dz}{dx} \ldots \frac{d^nz}{dx^n}, t, \frac{dt}{dx} \ldots \frac{d^nt}{dx^n} \ldots$]

Die Aufgabe vom Grössten und Kleinsten ist nun, diejenigen Verhältnisse zwischen den veränderlichen Grössen zu finden, für welche die unbekannte Stammgrösse u von v, zwischen gegebenen, zu bestimmten Werthen von x gehörenden Grenzen, ein Grösstes oder Kleinstes ist.

Um diese Aufgabe auf die allgemeinste Weise aufzulösen, suche man die von [*der Veränderung der Abhängigkeit zwischen x und*] $y, z, t \ldots$ herkommenden Variationen der Grössen $v, L, M \ldots$ und stelle den Ausdruck

$$\frac{\delta v}{\delta x} + \lambda \frac{\delta L}{\delta x} + \mu \frac{\delta M}{\delta x} \ldots = 0$$

auf, wo $\lambda, \mu \ldots$ unbestimmte veränderliche Grössen sind.

Diesen Ausdruck verwandle man, auf die Weise wie in [374.] so, dass die Variationen $\frac{\delta y}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta t}{\delta x} \ldots$ nur noch in den Gliedern vorkommen, welche vollständige Ableitungen sind, so erhält man [*wie in* 374.] einen Ausdruck von der Form:

der Aufgabe in Rechnung zu bringen.

$$\left[\frac{d\,\delta u}{dx\,\delta x}=\right] Y\frac{\delta y}{\delta x}+Z\frac{\delta z}{\delta x}+T\frac{\delta t}{\delta x}\ldots.$$

$$+d\left(\overset{\prime}{Y}\frac{\delta y}{dx}+\overset{\prime\prime}{Y}\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}+\overset{\prime\prime\prime}{Y}\frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x}\ldots.\right):dx$$

$$+d\left(\overset{\prime}{Z}\frac{\delta z}{\delta x}+\overset{\prime\prime}{Z}\frac{d\,\delta z}{dx\,\delta x}+\overset{\prime\prime\prime}{Z}\frac{d^2\,\delta z}{dx^2\,\delta x}\ldots.\right):dx$$

$$+d\left(\overset{\prime}{T}\frac{\delta t}{\delta x}+\overset{\prime\prime}{T}\frac{d\,\delta t}{dx\,\delta x}+\overset{\prime\prime\prime}{T}\frac{d^2\,\delta t}{dx^2\,\delta x}\ldots.\right):dx$$

etc.

Dieser Ausdruck giebt zunächst die allgemeinen Gleichungen des Grössten oder Kleinsten

$$Y=0,\quad Z=0,\quad T=0\ldots.,$$

welche, mit den Bedingungs-Gleichungen

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0$$

verbunden, zur Bestimmung der veränderlichen Grössen y, z, $t\ldots.$ λ, $\mu\ldots.$ dienen.

Hierauf [*nachdem die erste Reihe des obigen Ausdrucks von* $\frac{d\,\delta u}{dx\,\delta x}$ *wegfiel*] ist

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\overset{\prime}{Y}.\frac{\delta y}{\delta x}+\overset{\prime\prime}{Y}.\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}+\overset{\prime\prime\prime}{Y}.\frac{d^2\,\delta y}{dx^2\,\delta x}\ldots.$$

$$+\overset{\prime}{Z}.\frac{\delta z}{\delta x}+\overset{\prime\prime}{Z}.\frac{d\,\delta z}{dx\,\delta x}+\overset{\prime\prime\prime}{Z}.\frac{d^2\,\delta z}{dx^2\,\delta x}\ldots.$$

$$+T.\frac{\delta t}{\delta x}+\overset{\prime\prime}{T}.\frac{d\,\delta t}{dx\,\delta x}+\overset{\prime\prime\prime}{T}.\frac{d^2\,\delta t}{dx^2\,\delta x}\ldots.$$

und die Grenzen-Gleichung ist

$$\frac{\overset{1}{\delta u}}{\underset{1}{\delta x}}-\frac{\overset{0}{\delta u}}{\underset{0}{\delta x}}=0,$$

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

welcher nun, unabhängig von den Variationen $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}$ $\frac{\delta z}{\delta x}$ *etc.* genuggethan werden muss.

Will man auf die Variation von x Rücksicht nehmen, so darf man nur $\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}$, $\frac{\delta z}{\delta w} - \frac{dz}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}$, $\frac{\delta t}{\delta w} - \frac{dt}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}$ *etc.* statt $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta z}{\delta x}$, $\frac{\delta t}{\delta x}$ *etc.* setzen und zu $\frac{\delta u}{\delta x}$ das Glied $v\frac{\delta x}{\delta w}$ addiren.

Da ferner die Aufgabe auch Bedingungs-Gleichungen zwischen x, y, z, t *etc.* für die Grenzen geben kann, so mögen

$$A = 0,\ B = 0\ \textit{etc.}$$

dergleichen Bedingungs-Gleichungen für die Grenzen seyn, so dass A, B *etc.* gegebene Functionen der Grössen x_0, x_1, y_0, y_1, $\frac{dy_0}{dx_0}$, $\frac{dy_1}{dx_1}$ *etc.* sind. Man nehme alsdann die Variations-Gleichungen

$$\frac{\delta(A)}{\delta x} = 0,\ \frac{\delta(B)}{\delta x} = 0\ \textit{etc.},$$

wie sie von der Veränderung der eben vorhin genannten Grössen herkommen, multiplicire sie mit unbestimmten Coefficienten α, β *etc.* und addire die Producte zu der Grenzen-Gleichung. Diese Grenzen-Gleichung ist alsdann

$$\frac{\delta u_1}{\delta x_1} - \frac{\delta u_0}{\delta x_0} + \alpha\frac{\delta A}{\delta x} + \beta\frac{\delta B}{\delta x} + \ldots = 0,$$

in welcher man nun die Coefficienten der Variationen einzeln gleich Null setzen muss.

der Aufgabe in Rechnung zu bringen.

[*Die Vortheile dieses Verfahrens, gegebene Bedingungs-Gleichungen durch unbestimmte Multiplicatoren in Rechnung zu bringen, sind im Text nicht besonders berührt, auch könnte das Verfahren noch etwas dunkel scheinen. Es mögen deshalb noch einige Bemerkungen darüber folgen.*

Am besten lässt sich der Gegenstand an einem einfachen Beispiele zeigen. Wenn nemlich z. B. eine Function

$$v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z \frac{dz}{dx} \ldots t, \frac{dt}{dx} \ldots\right)$$

mit n abhängig veränderlichen Grössen $y, z, t \ldots$ *und ihren Ableitungen gegeben wäre, von welcher die unbekannte Stammgrösse u ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll und es wären ausserdem m Bedingungs-Gleichungen zwischen* $y, z, t \ldots$ *und den Ableitungen dieser Grössen, also von der Form*

$$L = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots t, \frac{dt}{dx} \ldots\right) = 0$$

$$M = F'\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots t, \frac{dt}{dx} \ldots\right) = 0$$

etc. gegeben, so darf man nur, nach der obigen Theorie, um die Verhältnisse, welche diese m Bedingungs-Gleichungen zwischen den n Grössen $y, z, t \ldots$ *bestimmen, in Rechnung zu bringen, die Variationen von L, M etc. nehmen, jede mit einem unbestimmten Coefficienten* λ, μ *etc. multipliciren und die Producte zu* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *addiren, so*

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

dass die Grösse

$$\frac{\delta v}{\delta x} + \lambda \frac{\delta L}{\delta x} + \mu \frac{\delta M}{\delta x} \dots\dots$$

entsteht. Mit dieser Grösse kann man dann ganz eben so verfahren, wie mit $\frac{\delta v}{\delta x}$ *allein, oder eben so, als wenn gar keine Bedingungs-Gleichungen vorhanden wären, so dass am Ende auch in der Grenzen-Gleichung die Variationen* $\frac{\delta y}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta x} \dots\dots$, *ohne weitere Rücksicht auf die Bedingungs-Gleichungen, als gänzlich von einander unabhängig betrachtet werden können.*

Dieses hat zuvörderst folgenden Grund. Dass nemlich die durch die m Bedingungs-Gleichungen bestimmte theilweise Abhängigkeit zwischen y, z, t auf die obige Weise wirklich in Rechnung gebracht wird, ist klar und es wird also bei den allgemeinen Gleichungen des Grössten und Kleinsten, welche aus $\frac{\delta v}{\delta x} + \lambda \frac{\delta L}{\delta x} + \mu \frac{\delta M}{\delta x} \dots\dots$ *folgen, und welche die Abhängigkeit der Grössen y, z, t von x bestimmen auf die Bestimmung der Bedingungs-Gleichungen wirklich Rücksicht genommen. Nun sind der Multiplicatoren λ, μ, ν so viele, als Bedingungs-Gleichungen, folglich m. Die m Bedingungs-Gleichungen zwischen den n Grössen y, z, t lassen aber nur noch n — m Grössen willkürlich, weil durch die m Gleichungen, m Grössen wirklich weggeschafft werden können*

der Aufgabe in Rechnung zu bringen.

und also nur noch n — m unabhängig veränderliche Grössen übrig bleiben; also sind, nachdem die m Bedingungs-Gleichungen mittelst m unbestimmter Multiplicatoren eingeführt worden, n — m + m, also wieder grade n Grössen vorhanden: eben als wenn gar keine Bedingungs-Gleichungen gegeben wären. Mithin sind wirklich diese, nunmehr vorhandenen n Grössen völlig von einander unabhängig und folglich können die Coefficienten ihrer Variationen in der Grenzen-Gleichung einzeln gleich Null gesetzt werden. Die unbestimmten Multiplicatoren sind nichts anders als ein Mittel, die durch die Bedingungs-Gleichungen zum Theil aufgehobene Unabhängigkeit der veränderlichen Grössen von einander wieder herzustellen und die durch die Bedingungs-Gleichungen ausgedrückte theilweise Abhängigkeit der veränderlichen Grössen y, z, t.... auf die neuen, willkürlich eingeführten veränderlichen Multiplicatoren λ, μ, ν zu übertragen.

Eine andrere Frage ist, auf welche Weise durch die Multiplicatoren die Rechnung erleichtert wird, da auch in den Gleichungen, zwischen welchen sie hernach weggeschafft werden müssen, ihre Ableitungen vorkommen und also Zurückleitungen nöthig zu seyn scheinen, die eben so beschwerlich seyn können, als wenn man die Bestimmungen der Bedingungs-Gleichungen L = o, M = o etc. aus diesen Gleichungen

Beding.-Gleichung. zwischen den Grössen

selbst entwickelte. Wenn z. B., im einfachsten Falle, v zwei abhängige Grössen y und z enthielte, also von der Form $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots\right)$ *wäre und es wäre eine Bedingungs-Gleichung von der Form* $L = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots\right)$ *gegeben, so wären die beiden allgemeinen Gleichungen des Grössten oder Kleinsten, welche zur Bestimmung der Abhängigkeit der Grössen y und z von x dienen, zu Folge* (371. *und* 374.)

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\left(\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\right)}{dx^2} \ldots$$

$$+ \lambda\frac{dL}{dy} - \frac{d\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{dy}{dx}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\right)}{dx^2} \ldots = 0$$

und

$$\frac{dz}{dy} - \frac{d\left(\frac{dz}{d\frac{dz}{dx}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{dz}{d\frac{d^2z}{dx^2}}\right)}{dx^2} \ldots$$

$$+ \lambda\frac{dL}{dy} - \frac{d\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{dz}{dx}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{d^2z}{dx^2}}\right)}{dx^2} \ldots = 0.$$

Zu diesen beiden Gleichungen kommt die Bedingungs-Gleichung

der Aufgabe in Rechnung zu bringen.

$$L = F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots . z, \frac{dz}{dx} \ldots .\right) = 0$$

hinzu und aus diesen drei Gleichungen soll die Abhängigkeit der Grössen y und z von x gefunden werden. Da hierzu nothwendig zuvor die Wegschaffung der fremden Grösse λ nöthig ist, welches die Zahl der Gleichungen um Eins vermindert, so dass nur noch zwei Gleichungen übrig bleiben, die aber auch zur Bestimmung der beiden Grössen y und z hinreichen, und zu jener Wegschaffung Zurückleitungen zu gehören scheinen, weil in den beiden ersten Gleichungen auch die Ableitungen von λ, bis zur höchsten Ordnung vorkommen, so scheint es, dass die Einführung der willkürlichen Multiplicatoren keinen Vortheil bringe und dass es vielleicht eben so leicht sey, zuvor aus der Bedingungs-Gleichung $L = 0$ das dadurch bestimmte Verhältniss zwischen y und z zu entwickeln und in v zu substituiren. Es verhält sich indessen nicht so, und es sind, um die unbestimmten Multiplicatoren wieder wegzuschaffen, nie Zurückleitungen nöthig, sondern die Wegschaffung kann allemal blos durch Ableitung geschehen.

Man stelle sich nemlich in dem obigen Beispiele die beiden ersten Gleichungen, zwischen welchen λ weggeschafft werden soll, unter der Form

$$\varphi\left(\lambda; \frac{d\lambda}{dx}, \frac{d^2\lambda}{dx^2} \ldots . \frac{d^p\lambda}{dx^p}\right) = 0 \text{ und}$$

$$\psi\left(\lambda, \frac{d\lambda}{dx}, \frac{d^2\lambda}{dx^2} \dots \frac{d^q\lambda}{dx^q}\right) = 0$$

vor und nehme, von der ersten noch q, von der zweiten noch p abgeleitete Gleichungen höherer Ordnungen, so erhält man überhaupt $p + q + 2$ Gleichungen, welche alle die Grössen λ, $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$ enthalten, jedoch steigt darin die Ableitung von λ nirgends höher als auf die $p + q$te Ordnung. Mithin sind zwischen den $p + q + 2$ Gleichungen nur $p + q$ Grössen λ, $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$ $\frac{d^{p+q}\lambda}{dx^{p+q}}$ wegzuschaffen nöthig, welches allemal, algebraisch und ohne Zurückleitung möglich ist. Hier ist obendrein die Wegschaffung um so leichter, weil λ, $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$ überall nur in lineärer Form oder in der ersten Potenz vorkommen. So wie sich nun auf diese Weise eine Grösse λ mit allen ihren Ableitungen zwischen zwei Gleichungen wegschaffen lässt, so lassen sich zwei Grössen λ, μ zwischen drei Gleichungen, drei Grössen zwischen vier Gleichungen u. s. w. eliminiren; und da die Zahl der Grössen λ, μ, weil sie so gross ist, als die Zahl der Bedingungs-Gleichungen, wenigstens um Eins kleiner seyn muss, als die Zahl der abhängig veränderlichen Grössen y, z, t, welcher wiederum die Zahl der Gleichungen, zwischen denen die Wegschaffung vor sich gehen soll,

soll, gleich ist, so ist die Wegschaffung der willkürlichen Multiplicatoren allemal blos durch die Ableitung möglich und die Zurückleitungs-Operation wird dabei ganz vermieden, welches eben der Zweck der Methode war.

Zwischen den Bedingungs-Gleichungen selbst und der Grösse v wäre die Wegschaffung durch blosse Ableitungen nicht eben so möglich, weil v nicht nothwendig gleich Null ist und folglich keine Gleichung giebt. Hier bliebe nichts anders übrig, als die Verhältnisse zwischen y, z, t...., welche die Bedingungs-Gleichungen bestimmen, durch die Zurückleitungs-Operation wirklich zu entwickeln, welche Schwierigkeit durch die Einführung der unbestlmmten Multiplicatoren vermieden wird.]

Von den relativen Grössten oder Kleinsten in der Variations-Rechnung.

380.

Die bisherigen Ausdrücke dienen, Aufgaben von absoluten Grössten oder Kleinsten aufzulösen. Wir wollen jetzt sehen, wie sich darauf die Aufgaben von relativen Grössten und Kleinsten bringen lassen, das heisst solche, wenn die Stammgrösse einer gegebenen Function nur in so fern ein Grösstes oder Kleinstes zwischen gegebenen Grenzen seyn soll, als die Stammgrössen anderer gegebener Functionen, zwischen den nemlichen Grenzen, gegebene Grössen ha-

ben. [*Wenn z. B. die Gestalt der kürzesten Linie von einem gegebenen Puncte bis zu einem andern, oder von einer gegebenen Linie bis zu einer andern, oder von einer gegebenen Fläche bis zu einer andern, verlangt wird, so wird ein absolutes Grösstes zwischen den gegebenen Grenzen gesucht. Verlangt man dagegen diejenige Linie von gegebener Länge, welche mit einer andern gegebenen Linie, oder sonst zwischen gegebenen Grenzen, den grössten Raum einschliesst, so ist das Grösste, welches verlangt wird, ein relatives; denn die einzuschliessende Fläche soll nur in so fern ein Grösstes seyn, als die gesuchte einschliessende Linie eine gegebene Länge hat.*]

Es sey V die gegebene Function, deren Stammgrösse zwischen gegebenen Grenzen einen gegebenen Werth haben soll. [*In dem obigen Beispiele wäre dieses V die erste Ableitung der Länge der gesuchten Linie, also, wenn dieselbe etwa in einer Ebene liegt, und ihre Coordinaten x und y sind,* $V = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$.] Man setze, die Stammgrösse von V sey U, so dass [$\frac{dU}{dx} = V$, *oder*]

$$\frac{dU}{dx} - V = 0$$

ist, so existirt hier eine Bedingungs-Gleichung, nemlich die, dass die Grösse

$$U_1 - U_0$$

einen gegebenen Werth haben soll.

in der Variations-Rechnung.

Ihre Variation ist also gleich Null, welches die Grenzen-Gleichung

$$\frac{\delta U_1}{\delta x_1} - \frac{\delta U_0}{\delta x_0} = 0$$

giebt.

Um diese Bedingung in die allgemeine Auflösung der Aufgabe vom Grössten oder Kleinsten einzuführen, betrachte ich die Gleichung $\frac{dU}{dx} - V = 0$ als eine Bedingungs-Gleichung und behandle sie wie jede andre Bedingungs-Gleichung $L = 0$, $M = 0$ *etc.* Ich multiplicire also die Variation derselben

$$\frac{d\,\delta U}{dx\,\delta x} - \frac{\delta U}{\delta x} = 0$$

mit einem veränderlichen und unbestimmten Coefficienten z. B. σ und addire das Product zu dem allgemeinen Ausdrucke $\frac{\delta v}{\delta x} + \lambda \frac{\delta L}{\delta x} \ldots$, welches

$$\frac{\delta v}{\delta x} + \sigma \left(\frac{d\,\delta U}{dx\,\delta x} - \frac{\delta U}{\delta x} \right) + \lambda \frac{\delta L}{\delta x} + \mu \frac{\delta M}{\delta x} \ldots$$

giebt.

Das Glied $\sigma \frac{d\,\delta U}{dx\,\delta x}$ lässt sich in $\frac{d\left(\sigma \frac{\delta U}{\delta x}\right)}{dx} - \frac{d\sigma}{dx} \cdot \frac{\delta U}{\delta x}$ umformen und da diese Glieder die einzigen sind, welche die veränderliche Grösse σ enthalten, so giebt die Variation $\frac{d\sigma}{dx}$ [*nemlich, wenn man den Coefficienten dieser, von den übrigen unabhängigen Variation gleich Null setzt*] alsbald die Gleichung

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0,$$

folglich

$$\sigma = a,$$

wenn a eine willkürliche Constante bedeutet.

Hierauf giebt der andere Theil $\frac{d\left(\sigma\frac{\delta U}{\delta x}\right)}{dx}$ [*der Grösse* $\sigma\frac{d\,\delta U}{dx\,\delta x}$], welcher eine vollständige Ableitung ist, für den Ausdruck der Stammgrösse u das Glied $\sigma\frac{\delta U}{\delta x}$ und folglich in der Grenzen-Gleichung die Glieder [$\sigma\left(\frac{\delta U_1}{\delta x_1} - \frac{\delta U_0}{\delta x_0}\right)$, *oder*]

$$a\left(\frac{\delta U_1}{\delta x_1} - \frac{\delta U_0}{\delta x_0}\right),$$

weil $\sigma = a$ war.

Nun aber war oben, vermöge der Bedingungen für das relative Grösste oder Kleinste,

$$\frac{\delta U_1}{\delta x_1} - \frac{\delta U_0}{\delta x_0} = 0,$$

also erleidet der Werth der Stammgrösse u durch diese Bedingung nicht die geringste Veränderung.

Es ist daher auch nur die Grösse $-a\frac{\delta V}{\delta x}$ [*nicht die Grösse* $\sigma\left(\frac{d\,\delta U}{dx\,\delta x} - \frac{\delta V}{\delta x}\right)$, *weil das erste Glied derselben Nichts giebt*] zu dem allgemeinen Ausdrucke zu addiren nöthig, woraus folgt, dass man im Falle des relativen Grössten oder Kleinsten nur $v - aV$, wo a eine willkürliche Constante ist, statt

v setzen und die Bedingungen des absoluten Grössten oder Kleinsten der Stammgrösse von $v - aV$ suchen darf.

Sollte die Stammgrösse von v ein relatives Grösstes oder Kleinstes unter der Bedingung seyn, dass die Stammgrössen zweier Grössen V und V' bestimmte Werthe haben, so reducirt sich die Aufgabe, auf dieselbe Weise, auf den Fall eines absoluten Grössten, wenn man $v - aV - bV'$ statt v setzt, wo a und b zwei willkürliche Constanten sind.

Dieses Resultat stimmt, wie man sieht, mit demjenigen überein, welches Euler bei der Untersuchung der Variationen auf einander folgender Curven-Ordinaten fand.

381.

Obiges sind die allgemeinen, zur Auflösung der von der Variations-Rechnung abhängenden Aufgaben von den Grössten und Kleinsten, nöthigen Ausdrücke. Sie umfassen, wie man sieht, alle Fälle. Statt aber in jedem besondern Falle die allgemeinen Ausdrücke anzuwenden, kann es zuweilen besser seyn, grade zu mit den gegebenen Formeln nach den obigen Methoden zu rechnen.

Von der Unterscheidung der Grössten von den Kleinsten.

382.

Die Aufgabe: zu finden, ob ein Grösstes, oder ob ein Kleinstes, oder überhaupt eines von beiden

Von den Grössten und Kleinsten, die von

existire, hängt, wie wir sahen, von den Variationen zweiter Ordnung ab. Wir wollen aber hier in dieses Detail, welches uns zu weit führen würde, nicht eingehen. Man sehe, was darüber im 173ten und den folgenden Artikeln des 1sten Theils der Theorie der Functionen [1*ster Band*] gesagt worden. Wir wollen hier blos bemerken, dass es, wenn man von der Function v die Variation zweiter Ordnung nimmt, unnöthig ist, auf die Variationen zweiter Ordnung von y Rücksicht zu nehmen, weil die Glieder mit $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$, $\frac{d\,\delta^2 y}{dx\,\delta x^2}$ *etc.* in dem Ausdrucke von $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$ die nemlichen sind, wie die Glieder mit $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}$ *etc.* in $\frac{\delta v}{\delta x}$ und also vermöge der Bedingungen des Grössten oder Kleinsten verschwinden müssen, welches auch der Werth von $\frac{\delta y}{\delta x}$ oder $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ seyn möge. Also erhält man für die Variationen zweiter Ordnung die nemlichen Ausdrücke, wie am angeführten Orte, wenn man blos $\frac{\delta y}{\delta x}$ statt ω setzt, folglich auch die nemlichen Resultate.

Von den Grössten und Kleinsten, die von Functionen mehrerer veränderlichen Grössen abhängen.

383.

Um nichts bei diesem Gegenstande zu übergehen, wollen wir noch ein Wort von den Grössten

und Kleinsten sagen, die von Functionen mehrerer veränderlicher Grössen abhängen. Die erste Aufgabe dieser Art ist durch die Variations-Rechnung in dem zweiten Bande der Turiner Mémoiren aufgelöset worden. Sie bestand darin: unter allen krummen Flächen vom gleichem Perimeter, die möglich-kleinste zu finden. Die Aufgabe ist dasjenige für die Fläche, was die früher abgehandelte für die Linie ist.

Es sey z die auf die beiden Abscissen x und y senkrechte Ordinate und eine Function von x und y, so ist der Inhalt der Fläche gleich der zwiefachen Stammgrösse von

$$\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)},$$

zuerst nach einer der beiden veränderlichen Grössen x und y und dann nach der andern genommen, nachdem für die erste ihr durch die Gleichung des Umfangs der Fläche gegebener Werth gesetzt worden. Die Aufgabe besteht also darin, diejenige Function z von x und y zu finden, für welche jene zwiefache Stammgrösse ein Grösstes oder Kleinstes ist.

384.

Um die Aufgabe allgemeiner zu stellen, wollen wir annehmen, man verlange ein Grösstes oder Kleinstes der zwiefachen Stammgrösse einer gegebenen beliebigen Function von $x, y, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}$ *etc.*

Man bezeichne diese Function durch v, so dass

$$v = f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2} \ldots\right)$$

Von den Grössten und Kleinsten, die von

ist, die zwiefache Stammgrösse von v [*nach x und dann nach y, oder umgekehrt*], welche ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll, aber durch u. Alsdann muss, dem Obigen zu Folge, die Variation von u gleich Null seyn. Nun aber ist

$$\frac{d^2 u}{dx\, dy} = v.$$

Man erhält also, wenn man die Variationen nimmt,

$$\frac{d^2\, \delta u}{dx\, dy\, \delta w} = \frac{\delta v}{\delta w}.$$

Dieses giebt, wenn man die Stammgrösse nimmt,

$$\iint \frac{\delta v}{\delta w} = \frac{\delta u}{\delta w}.$$

Die Aufgabe besteht also darin: die wiederholte Stammgrösse der Variation $\frac{\delta v}{\delta w}$ gleich Null zu machen.

Man erhält, wenn man die Variation von z und dessen Ableitungen nimmt,

$$\frac{\delta v}{\delta w} = \frac{dv}{dz} \cdot \frac{\delta z}{\delta w} + \frac{dv}{d\frac{dz}{dx}} \cdot \frac{d\,\delta z}{dx\,\delta w} + \frac{dv}{d\frac{dz}{dy}} \cdot \frac{d\,\delta z}{dy\,\delta w}$$

$$+ \frac{dv}{d\frac{d^2 z}{dx^2}} \cdot \frac{d^2\,\delta z}{dx^2\,\delta w} + \frac{dv}{d\frac{d^2 z}{dx\, dy}} \cdot \frac{d^2\,\delta z}{dx\,dy\,\delta w} + \frac{dv}{d\frac{d^2 z}{dy^2}} \cdot \frac{d^2\,\delta z}{dy^2\,\delta w}$$

.

welches wir durch

$$\frac{\delta v}{\delta w} = L\frac{\delta z}{\delta w} + M\frac{d\,\delta z}{dx\,\delta w} + N\frac{d\,\delta z}{dy\,\delta w}$$

$$+ P\frac{d^2\,\delta z}{dx^2\,\delta w} + Q\frac{d^2\,\delta z}{dx\,dy\,\delta w} + R\frac{d^2\,\delta z}{dy^2\,\delta w} \ldots\ldots$$

bezeichnen wollen.

Funct. mehr. veränderl. Grössen abhängen.

Man verwandle diesen Ausdruck auf dieselbe Weise wie die obigen, so dass die Variation $\frac{\delta z}{\delta w}$ nur in den Gliedern vorkommt, welche vollständige Ableitungen sind.

Dadurch geht

$$\text{das Glied } M\frac{d\,\delta z}{dx\,\delta w} \text{ in } \frac{d\left(M\frac{\delta z}{\delta w}\right)}{dx} - \frac{dM}{dx}\cdot\frac{\delta z}{\delta w},$$

$$\text{das Glied } N\frac{d\,\delta z}{dy\,\delta w} \text{ in } \frac{d\left(M\frac{\delta z}{\delta w}\right)}{dy} - \frac{dM}{dy}\cdot\frac{\delta z}{\delta w}$$

u. s. w. über. Man erhält dadurch folgenden verwandelten Ausdruck:

$$\frac{\delta v}{\delta w} = \left(L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy} + \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dx\,dy} + \frac{d^2R}{dy^2} \ldots\right)\frac{\delta z}{\delta w}$$

$$+ d\left(M\frac{\delta z}{\delta w} + P\frac{d\,\delta z}{dx\,\delta w} - \frac{dP}{dx}\cdot\frac{\delta z}{\delta w} + Q\frac{d\,dz}{dy\,\delta w} \ldots\right) : dx$$

$$+ d\left(N\frac{\delta z}{\delta w} + R\frac{d\,\delta z}{dy\,\delta w} - \frac{dR}{dy}\cdot\frac{\delta z}{\delta w} - \frac{dQ}{dx}\cdot\frac{\delta z}{\delta w} \ldots\right) : dy$$

etc.

[*Man sehe auch wegen dieser Verwandlungen, und überhaupt wegen dieses Gegenstandes, die oben erwähnte Abhandlung des Uebersetzers S.* 88. *etc.*]

Man sieht zunächst, dass die wiederholte Stammgrösse von $\frac{\delta v}{\delta x}$ nicht anders, unabhängig von der Variation $\frac{\delta z}{\delta w}$, Null seyn kann, als wenn die blos mit $\frac{\delta z}{\delta w}$ multiplicirten Glieder [*weil sie auf keine*

Von den Grössten und Kleinsten u. s. w.

Weise vollständige Ableitungen sind] verschwinden, welches folgende allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten giebt:

$$L - \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy} + \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dx\,dy} + \frac{d^2R}{dy^2} \ldots = 0.$$

Nachdem die erste Zeile in dem Ausdrucke von $\frac{\delta v}{\delta w}$ weggefallen ist, erhält man, wenn man auf beiden Seiten die zwiefache Stammgrösse nimmt,

$$\frac{\delta u}{\delta w} = {}^{y}\!\!\int\left(M\frac{\delta z}{\delta w} + P\frac{d\,\delta z}{dx\,\delta w} - \frac{dP}{dx}.\frac{\delta z}{\delta w} + Q\frac{d\,\delta z}{dy\,\delta w}\ldots\right)$$

$$+ {}^{x}\!\!\int\left(N\frac{\delta z}{\delta w} + R\frac{d\,\delta z}{dy\,\delta w} - \frac{dR}{dy}.\frac{\delta z}{\delta w} - \frac{dQ}{dx}\frac{\delta z}{\delta w}\ldots\right)$$

[*wo* ${}^{x}\!\int$ *und* ${}^{y}\!\int$ *die Stammgrössen nach* x *und* y *anzeigen. Die gewöhnlichen alten Zeichen haben kein bestimmtes Mittel, dieses auszudrücken.*]

Da hier nur noch einfache Stammgrössen vorhanden sind, so bezieht sich jede auf eine der beiden Grössen x und y allein, indem man die andere, als gegeben durch die Gleichung der Grenzen-Curven, zwischen welchen das Grösste oder Kleinste Statt finden soll, betrachtet.

Der einfachste Fall ist, wenn der Umfang der durch die Gleichung zwischen x, y und z ausgedrückten Fläche als gegeben und unveränderlich betrachtet wird. Alsdann sind die Variationen von z und dessen Ableitungen, in Beziehung auf die Umfangs-Curve, und folglich auch in der ganzen Ausdehnung der einfachen Stammgrösse der Variation $\frac{\delta u}{\delta w}$

gleich Null, und die Bedingung $\frac{\delta u}{\delta w} = 0$ wird von selbst erfüllt.

Die allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten ist also, wenn man die obigen Werthe von L und M substituirt:

$$\frac{dv}{dz} - \frac{d\left(\frac{dv}{d\frac{dz}{dx}}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dv}{d\frac{dz}{dx}}\right)}{dy}$$

$$+ \frac{d^2\left(\frac{dv}{d\frac{d^2z}{dx^2}}\right)}{dx^2} + \frac{d^2\left(\frac{dv}{d\frac{d^2z}{dx\,dy}}\right)}{dx\,dy} + \frac{d^2\left(\frac{dv}{d\frac{d^2z}{dy^2}}\right)}{dy^2}$$

$$\ldots\ldots = 0,$$

welche, wie man sieht, von der Art derjenigen ist, die in der neunzehnten und zwanzigsten Vorlesung vorkommen und welche Stammgleichungen willkürlicher Functionen enthalten.

Verwickeltere Fälle können auf eine ähnliche Weise, wie bei Aufgaben, wo man nur Functionen einer veränderlichen Grösse sucht, aufgelöset werden.

Beispiele zur Variations-Rechnung.

Erstes Beispiel. Von der kürzesten Linie in einer Ebene.

385.

Um jetzt einige Anwendungen von den obigen Methoden und Ausdrücken zu machen, wollen wir zuerst

Beispiele zur

die einfachste Aufgabe dieser Art aufstellen, welche darin besteht:

Die kürzeste Linie zwischen gegebenen Grenzen zu finden.

I. Man nehme an, die gesuchte Linie liege ganz in einer und derselben Ebene. Man bezeichne ihre Coordinaten durch x und y, so wird die Länge der Linie ganz allgemein durch die Stammgrösse von $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$ ausgedrückt. Also ist in dem gegenwärtigen Falle

$$v = \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}.$$

Dieses giebt

$$\frac{dv}{dy} = 0,\ \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \left[\frac{dv}{d\cdot\frac{d^2y}{dx^2}} = 0 \text{ etc.}\right]$$

Die allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten [362 *u.* 363. *nemlich* $\frac{dv}{dy} - d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} + d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}$ $- \ldots = 0$] giebt also hier

$$-\frac{d\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\right)}{dx} = 0.$$

Alsdann ist

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}$$

Variations-Rechnung.

[363. *weil daselbst* $N = 0$, $P = \frac{dy}{dx} : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$, $Q = 0$, $R = 0$ *etc.*] und die Grenzen-Gleichung ist

$$\frac{\overset{1}{\delta u}}{\overset{1}{\delta x}} - \frac{\overset{0}{\delta u}}{\overset{0}{\delta x}} = 0.$$

Die allgemeine Gleichung des Grössten oder Kleinsten giebt zunächst [*wenn man die Stammgrösse nimmt*]

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} = Const. \; [= C],$$

woraus $\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\right.$, *also* $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (1 - C^2) = C^2$, *oder* $\frac{dy}{dx} = \frac{C}{\sqrt{(1 - C^2)}}$, *oder*]

$$\frac{dy}{dx} = b$$

und [*wenn man zum zweitenmale die Stammgrösse nimmt*]

$$y = bx + c$$

folgt, wo b und c zwei willkürliche Constanten sind. Dieses ist im Allgemeinen die Gleichung einer graden Linie [*die gesuchte kürzeste Linie ist also unter allen Umständen eine grade.*]

Wären die beiden Enden der Linie gegeben [*also die Grenzen gegebene Puncte*] so wäre $\frac{\overset{0}{\delta y}}{\overset{0}{\delta x}} = 0$ und $\frac{\overset{1}{\delta y}}{\overset{1}{\delta x}} = 0$ [*denn wenn für die Gren-*

zen die Ordinaten $\overset{0}{y}$ *und* $\overset{1}{y}$ *bestimmte Functionen von x sind, so kann sich in diesen Puncten die Abhängigkeit zwischen y und x nicht ändern, folglich sind für diese Puncte die Variationen von y gleich Null.*] Die Grenzen-Gleichung $\left[\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0\right]$ giebt also in diesem Falle weiter gar keine Bedingung.

II. Im Allgemeinen giebt die Grenzen-Gleichung $\left[\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0\right.$, *weil* $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta x} \cdot \frac{dy}{dx} : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$ *und hier* $\frac{dy}{dx} = b$, *also* $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{b}{\sqrt{(1+b^2)}} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$, *folglich die Grenzen-Gleichung*

$$\left.\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0 = \frac{b}{\sqrt{(1+b^2)}}\left(\frac{\delta \overset{1}{y}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{x}}\right) = 0 \textit{ ist}\right]$$

$$a\left(\frac{\delta \overset{1}{y}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{x}}\right) = 0,$$

wo

$$a = \frac{b}{\sqrt{(1+b^2)}}$$

ist. Wäre also die Linie an beiden, oder an einem Ende durch Perpendikel auf die Axe der x begrenzt, so wären die Variationen $\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{x}}$ und $\frac{\delta \overset{1}{y}}{\delta \overset{1}{x}}$ entweder beide, oder eine von ihnen willkürlich. [*Denn weil*

Variations-Rechnung.

alsdann y in den Grenzen nicht mehr bestimmt ist, sondern in der auf die Axe der x perpendiculairen Grenzen-Linie so lang oder so kurz angenommen werden kann als man will, so sind die y in den Grenzen, und folglich auch ihre Variationen $\frac{\overset{1}{\delta y}}{\underset{1}{\delta x}}$ und $\frac{\overset{0}{\delta y}}{\underset{0}{\delta x}}$, willkürlich.] In beiden Fällen aber giebt die Grenzen-Gleichung:

$$a = 0$$

und folglich [*weil* $a^2 = \frac{b^2}{1+b^2}$, *oder* $a^2(1+b^2) = b^2$, *oder* $b^2(1-a^2) = a^2$, *oder* $b = \frac{a}{\sqrt{(1-a^2)}}$ *ist*]

$$b = 0.$$

Mithin ist in diesem Falle die kürzeste Linie eine grade, die mit der Axe parallel läuft. [*Denn es war* $b = \frac{dy}{dx}$ *und* $\frac{dy}{dx}$ *ist die Tangente des Winkels, den die Tangente der gesuchten Linie mit der Axe macht. Da diese überall gleich Null seyn soll, so folgt, dass die gesuchte Linie eine grade Linie ist, die mit der Axe parallel läuft.*]

III. Sollte die kürzeste Linie an beiden Enden von krummen Linien begrenzt seyn [*so dass also die Aufgabe seyn würde: die möglich-kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Curven in einer und derselben Ebene zu finden,*] so müsste man alsdann in der Grenzen-Gleichung auf die gleichzeitige Variation von x und y Rücksicht nehmen. [*Denn,*

weil man im Voraus nicht weiss, welche die gesuchte Linie ist und wo sie liegen wird, so weiss man auch nicht, wo sie die sie begrenzenden Curven schneidet. So wie aber die gesuchte Linie sich ändert, können sich auch ihre Durchschnitte mit den Grenzen-Curven ändern; folglich wirkt die Variation oder die Veränderung der Gestalt der gesuchten Linie auf die Veränderung der Grenz-Puncte, die wie alle andere Puncte durch x und y bestimmt werden, zurück. Mithin wirkt die Variation von y auch auf x und man muss folglich jetzt auch die Variation von x in Betracht ziehen.] Man muss also jetzt in den Ausdruck von $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$ statt $\frac{\delta y}{\delta x}$ setzen und das Glied $v \frac{\delta x}{\delta w}$ addiren [368.] Dieses giebt

$$\frac{\delta u}{\delta w} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\surd\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} \left(\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}\right)$$

$$+ \frac{\delta x}{\delta w} \surd\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right).$$

[*Nemlich die allgemeine Gleichung des Grössten und Kleinsten bleibt unverändert dieselbe, die Variation von x mag in Betracht kommen, oder nicht.*]

Dieses giebt, wenn man reducirt,

$\Big[\frac{\delta u}{\delta w} =$

Variations-Rechnung.

$$\left[\frac{\delta u}{\delta w} = \frac{\frac{dy}{dx}\left(\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right) + \frac{\delta x}{\delta w}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},\right.$$

oder]

$$\frac{\delta u}{\delta w} = \frac{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta w} + \frac{\delta x}{\delta w}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}.$$

Nun ist die Grenzen-Gleichung:

$$\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0.$$

Sollen die beiden Grenzen von einander unabhängig seyn, so ist, einzeln,

$$\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} = 0 \text{ und } \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0,$$

und folglich, einzeln,

$$\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\cdot\frac{\delta \overset{1}{y}}{\delta w} + \frac{\delta \overset{1}{x}}{\delta w} = 0 \text{ und } \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\cdot\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta w} + \frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta w} = 0.$$

Nun sey

$$[p =]\ \varphi(x, y) = 0$$

die Gleichung der ersten Grenzen-Curve, so ist die Variations-Gleichung derselben:

$$\frac{dp}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w} + \frac{dp}{dy}\cdot\frac{\delta y}{\delta w} = 0.$$

Sie giebt aber auch die abgeleitete Gleichung

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

Verbindet man diese beiden Gleichungen [*indem man die zweite mit* $\frac{\delta x}{\delta w}$ *multiplicirt und das Product von der ersten abzieht,*] so erhält man

$$\left[\frac{dp}{dy} \cdot \frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w} = 0, \text{ oder}\right]$$

$$\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w} = 0.$$

Hier ist aber nun zu bemerken, dass zwar die Variationen $\frac{\delta x}{\delta w}$ und $\frac{\delta y}{\delta w}$ die nemlichen sind, welche wir oben durch $\frac{\overset{o}{\delta x}}{\overset{o}{\delta w}}$ und $\frac{\overset{o}{\delta y}}{\overset{o}{\delta w}}$ bezeichneten, weil sie die Variationen der Coordinaten der ersten Grenze sind; hingegen die gegenwärtige Ableitung $\frac{dy}{dx}$ und die obige $\frac{\overset{o}{dy}}{\overset{o}{dx}}$, obgleich sie sich beide auf den nemlichen Punct beziehen, sind nicht das Nemliche. Denn die letzte bezieht sich auf die kürzeste Linie und bezeichnet die Tangente des Winkels, welchen die Tangente dieser Linie mit der Axe macht, statt dass die erste sich auf die Grenzen-Linie bezieht und die Tangente des Winkels ausdrückt, welchen die Tangente der Grenzen-Linie mit der Axe macht. Wir wollen also, zum Unterschiede, das letzte $\frac{dy}{dx}$ durch $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ bezeichnen. Alsdann geht die vorige Gleichung, wenn wir noch jedem Buchstaben

eine Null beifügen, um den Ausdruck auf die erste Grenze zu beziehen, in

$$\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{w}} - \left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}} = 0$$

über.

Diese Gleichung giebt die Bedingung, welche zwischen den Variationen $\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{x}}$ und $\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}}$ Statt finden muss. Substituirt man also den daraus genommenen Werth von $\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{w}}\left[=\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}}\right]$ in die obige Grenzen-Gleichung $\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{w}} \cdot \frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{w}} + \frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}} = 0$, so erhält man

$$\left[\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}} + \frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}} = 0, \textit{ oder}\right]$$

$$1 + \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) = 0.$$

Nun sind $\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}$ und $\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)$ die Tangenten zweier Winkel [*z. B. α und β*] und wie bekannt, ist die Tangente der Differenz zweier Winkel: [*tang* $(\alpha - \beta)$

$\frac{tang\,\alpha - tang\,\beta}{1 + tang\,\alpha\; tang\,\beta}$, *also hier*]

Beispiele zur

$$\frac{\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}} - \left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)}{1 + \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)}.$$

Da der Nenner dieses Ausdrucks gleich Null seyn soll, so folgt, dass diese Tangente unendlich gross und folglich die Differenz der beiden Winkel ein rechter Winkel ist.

Daraus folgt, dass die beiden Linien, die kürzeste, und die Curve, welche die erste Grenze derselben seyn soll, sich unter einem rechten Winkel schneiden müssen.

Da die Gleichung der zweiten Grenze der Gleichung der ersten ganz ähnlich ist, so findet man nothwendig, auch in Beziehung auf die zweite Grenze, ein ähnliches Resultat, das heisst: auch die zweite Grenze muss die kürzeste Linie unter einem rechten Winkel schneiden.

Diesen Bedingungen lässt sich vermittelst der Gleichungen

$$\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) + 1 = 0 \text{ und } \frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\left(\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\right) + 1 = 0$$

und vermittelst der willkürlichen Constanten b und c genugthun, welches weiter keine Schwierigkeiten hat.

Variations-Rechnung.

Zweites Beispiel. Von der kürzesten Linie im Raume.

386.

Wir wollen, um die Aufgabe allgemeiner zu machen, setzen, man verlange die kürzeste Linie, ohne die Bedingung, dass sie in einer und derselben Ebene liege.

I. Wenn die drei Coordinaten der Linie in diesem Falle durch x, y, z bezeichnet werden, so drückt die Stammgrösse von $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$ die Länge der gesuchten Linie aus. Dieselbe muss also alsdann ein Kleinstes seyn.

Setzt man also

$$v = \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)},$$

so erhält man [*wenn man die Variationen nimmt*]

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\,\delta z}{dz\,\delta x}}{v}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich, auf die oben öfter vorkommende Weise, in

$$\frac{\delta v}{dx} = -\frac{d\left(\frac{dy}{dx}:v\right)}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta x} - \frac{d\left(\frac{dz}{dx}:v\right)}{dx}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}$$
$$+\frac{d\left(\frac{\delta y}{\delta x}\cdot\frac{dy}{dx}:v\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{dz}{dx}:v\right)}{dx}$$

verwandeln. [*Es ist leicht zu sehen, dass dieser*

verwandelte Ausdruck von $\frac{\delta v}{\delta x}$ *mit dem vorhergehenden übereinstimmt*] woraus folgende allgemeine Gleichung des Grössten und Kleinsten folgt:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx} : v\right)}{dx} \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{d\left(\frac{dz}{dx} : v\right)}{dx} \frac{\delta z}{\delta x} = 0.$$

[*Nemlich die Glieder, welche keine vollständige Ableitungen sind, müssen zusammen gleich Null seyn*]. Die Grenzen-Gleichung ist [*mit der Stammgrösse der, von dem Ausdrucke von* $\frac{\delta v}{\delta x}$ *übrig bleibenden Glieder in der zweiten Zeile, welche sämmtlich vollständige Ableitungen sind,*]

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\delta z}{\delta x}}{v} \text{ und } \frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0.$$

II. Man setze zuerst, es sey in der ganzen Ausdehnung der kürzesten Linie keine Bedingung für sie vorhanden, so müssen alsdann die Variationen $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta z}{\delta x}$ unbestimmt bleiben, welches die beiden Gleichungen

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx} : v\right)}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d\left(\frac{dz}{dx} : v\right)}{dx} = 0$$

giebt, woraus

$$\frac{dy}{dx} : v = a \text{ und } \frac{dz}{dx} : v = b$$

folgt, wenn a und b willkürliche Constanten sind. Da

nun $v = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$ ist, so folgt, dass $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ constante Werthe haben. [*Denn* $\frac{dy}{dx} : v = a$ *und* $\frac{dz}{dx} : v = b$ *giebt* $\frac{dy}{dx} = av$ *und* $\frac{dz}{dx} = bv$, *also* $v^2 = 1 + a^2v^2 + b^2a^2$, *oder* $v^2 = \frac{1}{1 - a^2 - b^2} = Const.$, *also auch* $\frac{dy}{dx} = va = Const.$ *und* $\frac{dz}{dx} = vb = Const.$] Bezeichnet man diese constanten Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ durch c und e, so erhält man [*wenn man von* $\frac{dy}{dx} = c$ *und* $\frac{dz}{dx} = e$ *die Stammgrössen nimmt*]

$$y = cx + m \text{ und } z = ex + n,$$

wo m und n wiederum willkürliche Constanten sind.

Diese beiden Gleichungen zeigen, dass die gesuchte kürzeste Linie eine grade in willkürlicher Lage ist.

III. Man muss nun noch die Grenzen-Gleichung untersuchen, welche, wenn man die beiden Grenzen unabhängig von einander annimmt, zunächst

$$\frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0 \text{ und } \frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} = 0,$$

also

$$\frac{\overset{0}{dy}}{\underset{0}{dx}} \cdot \frac{\overset{0}{\delta y}}{\underset{0}{\delta x}} + \frac{\overset{0}{dz}}{\underset{0}{dx}} \cdot \frac{\overset{0}{\delta z}}{\underset{0}{\delta x}} = 0 \text{ und } \frac{\overset{1}{dy}}{\underset{1}{dx}} \cdot \frac{\overset{1}{\delta y}}{\underset{1}{\delta x}} + \frac{\overset{1}{dz}}{\underset{1}{dx}} \cdot \frac{\overset{1}{\delta z}}{\underset{1}{\delta x}} = 0$$

giebt. Diese Gleichungen werden von selbst erfüllt, wenn die Lage der beiden Enden der kürzesten Linie gegeben ist, weil dann die Variationen der Ordinaten y und z in diesen beiden Puncten gleich Null sind.

IV. Soll hingegen die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Linien liegen, so muss man, wie wir oben sahen, die Variationen der Coordinaten x, y, z an den beiden Enden in Betracht ziehen.

Zu diesem Zwecke muss man zu $\frac{\delta u}{\delta x}$ das Glied $v\frac{\delta x}{\delta w}$ addiren und $\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$ und $\frac{\delta z}{\delta w} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\delta x}{\delta w}$ statt $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ setzen. Dieses giebt, nach gehöriger Reduction,

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \left(\frac{\delta x}{\delta w} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta y}{\delta w} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\delta z}{\delta w}\right) : v.$$

[*Da diese Reductionen keine Schwierigkeit haben, so konnte der dazu nöthige Raum erspart werden.*] Die beiden Grenzen-Gleichungen also geben:

$$\frac{\overset{0}{\delta x}}{\underset{0}{\delta w}} + \frac{\overset{0}{dy}}{\underset{0}{dx}} \cdot \frac{\overset{0}{\delta y}}{\underset{0}{\delta w}} + \frac{\overset{0}{dz}}{\underset{0}{dx}} \cdot \frac{\overset{0}{\delta z}}{\underset{0}{\delta w}} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{\overset{1}{\delta x}}{\underset{1}{\delta w}} + \frac{\overset{1}{dy}}{\underset{1}{dx}} \cdot \frac{\overset{1}{\delta y}}{\underset{1}{\delta w}} + \frac{\overset{1}{dz}}{\underset{1}{dx}} \cdot \frac{\overset{1}{\delta z}}{\underset{1}{\delta w}} = 0.$$

Variations-Rechnung.

Man setze, die erste Grenze sey eine Curve, deren beide Gleichungen

$$[p =]\ \varphi(x, y) = 0 \text{ und } [q =]\ \Psi(x, z) = 0$$

sind. Die erste dieser Gleichungen giebt, wie wir [*in* 385. *III.*] sahen [*wenn man davon die variirte und die abgeleitete Gleichung nimmt und beide mit einander verbindet*]

$$\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{w}} - \left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) \frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}} = 0;$$

die zweite giebt, eben so,

$$\frac{\delta \overset{1}{z}}{\delta \overset{1}{w}} - \left(\frac{d\overset{1}{z}}{d\overset{1}{x}}\right) \frac{\delta \overset{1}{x}}{\delta \overset{1}{w}} = 0.$$

Nimmt man aus diesen Gleichungen die Werthe von $\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{w}}$ und $\frac{\delta \overset{0}{z}}{\delta \overset{0}{w}}$ und substituirt sie in die erste der beiden obigen Gleichungen, so erhält man:

$$\left(1 + \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) + \frac{d\overset{0}{z}}{d\overset{0}{x}}\left(\frac{d\overset{0}{z}}{d\overset{0}{x}}\right)\right) \frac{\delta \overset{0}{x}}{d\overset{0}{w}} = 0.$$

Da nun die Variation $\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}}$ für die erste Grenze unbestimmt bleiben soll, so entsteht folgende Bedingungs-Gleichung für die erste Grenze:

$$1 + \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) + \frac{d\overset{0}{z}}{d\overset{0}{x}}\left(\frac{d\overset{0}{z}}{d\overset{0}{x}}\right) = 0,$$

Beispiele zur

welcher man durch die eine der beiden obigen Constanten c und e (II.) genugthun kann. Die andere Constante muss durch die Bedingungs-Gleichung für die zweite Grenze, welche, eben so,

$$1 + \frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\left(\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\right) + \frac{d\overset{1}{z}}{d\overset{1}{x}}\left(\frac{d\overset{1}{z}}{d\overset{1}{x}}\right) = 0$$

ist, bestimmt werden.

Will man wissen, was diese Gleichungen bedeuten, so darf man sich nur aus der Theorie der Berührung der Curven [*doppelter Krümmung*] erinnern, dass, wenn die Ableitungen $\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)$ und $\left(\frac{d\overset{0}{z}}{d\overset{0}{x}}\right)$ als constant betrachtet werden, die beiden Gleichungen

$$y = \left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)x + \mu \text{ und } z = \left(\frac{d\overset{0}{z}}{d\overset{0}{x}}\right)x + \nu,$$

wo μ und ν ebenfalls in Beziehung auf x und y constant sind, die grade Linie bezeichnen, welche die erste Grenzen-Linie berührt. Eben so bezeichnen die beiden Gleichungen

$$y = \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}x + \pi \text{ und } z = \frac{d\overset{0}{z}}{d\overset{0}{x}}x + \varrho$$

die grade Linie, welche, in den nemlichen Puncten, die kürzeste Linie berührt: π und ϱ sind Constanten in Beziehung auf x und y. [*Nemlich die in Klammern geschlossenen Grössen beziehen sich auf die Grenzen-Linien, die Grössen ohne Klammern auf die kürzeste Linie, wie in* 385. *III.*]

Variations-Rechnung.

Nun wird in der Anwendung der Analysis auf die Geometrie gezeigt, dass, wenn die beiden, durch diese Gleichungen ausgedrückten Linien sich schneiden, der Cosinus des Winkels, den sie mit einander machen,

$$\frac{1+\frac{\overset{0}{dy}}{\overset{0}{dx}}\left(\frac{\overset{0}{dy}}{\overset{0}{dx}}\right)+\frac{\overset{0}{dz}}{\overset{0}{dx}}\left(\frac{\overset{0}{dz}}{\overset{0}{dx}}\right)}{\sqrt{\left(1+\left(\left(\frac{\overset{0}{dy}}{\overset{0}{dx}}\right)\right)+\left(\left(\frac{\overset{0}{dz}}{\overset{0}{dx}}\right)\right)^2\right)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{\overset{0}{dy}}{\overset{0}{dx}}\right)+\left(\frac{\overset{0}{dz}}{\overset{0}{dx}}\right)^2\right)}}$$

ist. (Man sehe die feuilles d'analyse von Monge.) [*Oder Monge appl. de l'anal. à la géom. S.* 14. *etc., oder auch die Abhandlungen des Uebersezzers*, 1. *Band S.* 78. *etc.*]

Da nun in dem gegenwärtigen Falle der Zähler dieses Ausdrucks [*man sehe weiter oben*] gleich Null ist, so folgt, dass der Winkel, den die beiden Linien mit einander machen, ein rechter seyn muss. Also muss die kürzeste Linie die erste Grenzeu-Linie unter einem rechten Winkel schneiden.

Man findet das Nemliche für die andere Grenze. Daraus folgt, dass die kürzeste Linie zwischen zwei beliebigen Curven [*im Raume*], dieselben unter rechten Winkeln schneidet. Dieser Satz ist seit lange bekannt und kann auf verschiedene Arten bewiesen werden. Die Beweise sind aber nicht so direct, als die obige Rechnung.

V. Soll die kürzeste Linie, statt von einer blossen Linie, von einer Fläche begrenzt werden, so be-

zeichne man die Gleichung der ersten Grenzen-Fläche durch

$$[p=]\,\varphi(x,y,z)=0.$$

Diese Gleichung giebt zugleich die variirte:

$$\frac{\overset{0}{\delta x}}{\overset{0}{\delta w}}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{\overset{0}{\delta y}}{\overset{0}{\delta w}}\cdot\frac{dp}{dy}+\frac{\overset{0}{\delta z}}{\overset{0}{\delta w}}\cdot\frac{dp}{dx}=0,$$

welche man mit der oben gefundenen ersten Grenzen-Gleichung

$$\left[\frac{\overset{0}{\delta u}}{\overset{0}{\delta w}}=\right]\frac{\overset{0}{\delta x}}{\overset{0}{\delta w}}+\frac{\overset{0}{dy}}{\overset{0}{dx}}\cdot\frac{\overset{0}{\delta y}}{\overset{0}{\delta w}}+\frac{\overset{0}{dz}}{\overset{0}{dx}}\cdot\frac{\overset{0}{\delta z}}{\overset{0}{\delta w}}=0$$

verbinden muss. Man setze in diese zweite Gleichung den Werth von $\frac{\delta x}{\delta w}$ aus der ersten, so erhält man

$$\left(\frac{dp}{dy}-\frac{\overset{0}{dy}}{\overset{0}{dx}}\cdot\frac{dp}{dx}\right)\frac{\overset{0}{\delta y}}{\overset{0}{\delta w}}+\left(\frac{dp}{dz}-\frac{\overset{0}{dz}}{\overset{0}{dx}}\cdot\frac{dp}{dx}\right)\frac{\overset{0}{\delta z}}{\overset{0}{\delta x}}=0,$$

woraus, weil die Variationen $\frac{\overset{0}{\delta y}}{\overset{0}{\delta w}}$ und $\frac{\overset{0}{\delta z}}{\overset{0}{\delta w}}$ unbestimmt bleiben müssen, die zwei Gleichungen

$$\frac{dp}{dy}-\frac{\overset{0}{dy}}{\overset{0}{dx}}\cdot\frac{dp}{dx}=0 \text{ und } \frac{dp}{dz}-\frac{\overset{0}{dz}}{\overset{0}{dx}}\cdot\frac{dp}{dx}=0$$

folgen, welchen man vermittelst der beiden willkürlichen Constanten der kürzesten Linie genugthun muss.

Man findet für die andere Grenze zwei ähnliche Gleichungen, wenn dieselbe ebenfalls eine Fläche ist.

Um nun zu sehen, was diese Gleichungen bedeuten, bemerke man, dass die Gleichung der Fläche

$p = \varphi(x, y, z) = 0$ die abgeleitete Gleichung

$$\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dw} + \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dw} + \frac{dp}{dz}\cdot\frac{dz}{dw} = 0,$$

hat, von welcher die Stammgleichung, so genommen, als wenn die Coefficienten zu $\frac{dx}{dw}$, $\frac{dy}{dw}$, $\frac{dz}{dw}$ Constanten wären,

$$x\frac{dp}{dx} + y\frac{dp}{dy} + z\frac{dp}{dz} + \alpha = 0$$

ist, und, wie aus der Theorie der Curven bekannt, die Ebene ausdrückt, welche die Fläche berührt. α ist in Beziehung auf x, y, z, eine Constante.

Man setze in diese Gleichung die aus den obigen beiden Gleichungen genommenen Werthe von $\frac{dp}{dy}$ und $\frac{dp}{dz}$, so erhält man, wenn man noch mit $\frac{dp}{dx}$ dividirt, welches hier als Constante betrachtet wird,

$$x + y\frac{\overset{0}{d}y}{\overset{0}{d}x} + z\frac{\overset{0}{d}z}{\overset{0}{d}x} + \alpha : \frac{dp}{dx} = 0.$$

Auf der andern Seite weiss man, dass diese Gleichung auch eine Ebene ausdrückt, die auf einer graden Linie senkrecht steht, deren Gleichungen

$$y = x\frac{\overset{0}{d}y}{\overset{0}{d}x} + \mu \text{ und } z = x\frac{\overset{0}{d}z}{\overset{0}{d}x} + \nu$$

sind, wo $\frac{\overset{0}{d}y}{\overset{0}{d}x}$ und $\frac{\overset{0}{d}z}{\overset{0}{d}x}$, eben wie μ und ν, als Con-

stanten betrachtet werden. (Man sehe die oben citirten feuilles d'analyse) [*desgl. die Abhandl. S.* 55. *etc.*] Da nun eben diese Gleichungen diejenigen der Tangente am Ende der kürzesten Linie sind, welche wir im Allgemeinen als irgend eine beliebige Linie betrachten, so folgt, dass, den beiden obigen Gleichungen zu Folge, die kürzeste Linie die gegebene Fläche unter rechten Winkeln schneiden muss.

Da das Nemliche auch für die andere Grenze gilt, wenn sie eine Fläche ist, so folgt, dass die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Flächen wiederum eine grade ist, welche den beiden Flächen unter rechten Winkeln begegnet.

Drittes Beispiel. Von der kürzesten Linie auf einer Fläche.

387.

Bis jetzt suchten wir nur die kürzeste Linie die sich zwischen zwei gegebenen Puncten, Linien oder Flächen ziehen lässt. Diese Aufgabe kann auch geometrisch aufgelöset werden, weil man weiss, dass die kürzeste Linie in einer Ebene die grade ist. Verlangt man aber allgemein die kürzeste Linie in irgend einer gegebenen Fläche, so beruht alsdann die Aufgabe wesentlich auf die Variations-Rechnung. Die obigen Formeln lassen sich hier mit der nemlichen Leichtigkeit anwenden.

Die Gleichung der gegebenen Fläche sey

$$[s =] \; F(x, y, z) = 0,$$

Variations-Rechnung.

so giebt dieselbe die variirte Gleichung

$$\frac{ds}{dy}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}+\frac{ds}{dz}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}=0.$$

Verbindet man dieselbe mit der, oben [386. *I. für die kürzeste Linie im Raume*] gefundenen allgemeinen Gleichung des Grössten oder Kleinsten,

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}:v\right)}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}+\frac{d\left(\frac{dz}{dx}:v\right)}{dx}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}=0,$$

so erhält man

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}:v\right)}{dx}\cdot\frac{ds}{dz}-\frac{d\left(\frac{dz}{dx}:v\right)}{dx}\cdot\frac{ds}{dy}=0.$$

[*Da alle, zu solchen Verwandlungen nöthigen Zwischen-Rechnungen keine Schwierigkeit haben, so ist der Raum derselben erspart worden.*]

Diese Gleichung ist diejenige der kürzesten Linie auf der gegebenen Fläche. [*Die Gleichung kann nemlich mit der Gleichung der Fläche* $s = F(x, y, z) = 0$ *verbunden werden und giebt dann zwei Gleichungen zwischen* x *und* y, *und* x *und* z, *welche die kürzeste Linie auf der Fläche vollständig bestimmen.*]

Hierauf ist die Grenzen-Gleichung $\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}}-\frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}}=0$ im gegenwärtigen Falle [*wie oben* 386. *I.*] allgemein

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}}{v},$$

Beispiele zur

und wenn man zugleich die Variation von x in Betracht ziehen will,

$$\frac{\delta u}{\delta w} = \frac{\frac{\delta x}{\delta w} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta y}{\delta w} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\delta z}{\delta w}}{v},$$

wie oben.

II. Man müsste hierin statt $\frac{\delta z}{\delta w}$ seinen Werth aus [*der variirten Gleichung der Fläche*] $\frac{\delta x}{\delta w} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{\delta y}{\delta w} \cdot \frac{dp}{dy} + \frac{\delta z}{\delta w} \cdot \frac{dp}{dz} = o$ setzen. Abstrahirt man indessen auch von der Fläche, so folgt aus dem obigen Ausdrucke von $\frac{\delta u}{\delta w}$ für die Grenzen, Dasselbe wie oben, nemlich, dass die auf die Fläche gezogene kürzeste Linie die sie begrenzende Curve ebenfalls in rechten Winkeln schneiden muss.

III. Die kürzeste Linie auf einer gegebenen Fläche hat eine besondere und characteristische Eigenschaft, vermöge welcher man sie, auch ohne das Minimum zu suchen, finden kann. Diese Eigenschaft besteht darin, dass alle ihre Krümmungs-Halbmesser auf der gegebenen Fläche senkrecht sind. In der That ist klar, dass diese Linie diejenige seyn muss, in welche sich ein, über die Fläche gespannter Faden legt und es ist leicht zu sehen, dass der gespannte Faden nicht anders ins Gleichgewicht kommen kann, als wenn die aus seiner Spannung entstehenden Pressungen, deren Richtungen die der Krümmungs-Halbmesser sind, perpendiculair auf die Fläche wirken. [*Blos*

dass

Variations-Rechnung.

dass die Richtung der Pressung nothwendig diejenige des Krümmungs-Halbmessers ist, bedürfte vielleicht noch des Beweises.]

IV. Um zu sehen, wie diese Eigenschaft aus der oben [*in I.*] für die kürzeste Linie gefundenen Gleichung folgt, bemerke man zunächst, dass die Gleichung der Ebene, welche die Fläche, deren Gleichung $s = F(x, y, z) = 0$ ist, berührt, wie wir oben sahen, [386. *V.*]

$$x\frac{ds}{dx} + y\frac{ds}{dy} + z\frac{ds}{dz} + \alpha = 0$$

ist. Die Functionen $\frac{ds}{dx}, \frac{ds}{dy}, \frac{ds}{dz}$ werden als Constanten betrachtet, eben wie die Grösse α.

Ferner bemerke man, dass wenn

$$x + Ay + Bz + C = 0$$

die Gleichung der Ebene des Krümmungs-Kreises einer Curve doppelter Krümmung ist, diese Gleichung und ihre beiden Abgeleiteten erster und zweiter Ordnung Statt finden müssen, wenn man die Coordinaten x, y, z der Ebene, statt der der gegebenen Curve nimmt und bei der Entwickelung der Ableitungen die Coefficienten A, B, C als Constanten betrachtet. Dieses folgt aus der Theorie der Berührung der Curven, in der Theorie der Functionen.

Man erhält auf diese Weise, wenn man $\frac{dx}{dw} = 1$ setzt, die beiden abgeleiteten Gleichungen:

$$1 + A\frac{dy}{dx} + B\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

Beispiele zur

Die letzte giebt $B = -A\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{d^2z}{dx^2}$ und wenn man Solches in die erste substituirt,

$$A = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}} \text{ und}$$

$$B = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}}.$$

V. Wir bemerken ferner, dass es, wenn der Krümmungs-Halbmesser auf der Fläche senkrecht seyn soll, hinreichend ist, dass die Ebene des Krümmungs-Kreises auf der berührenden Ebene senkrecht steht, weil der Krümmungs-Halbmesser nothwendig auf der in der Fläche gezogenen Curve senkrecht ist.

VI. Nun wird wieder, in der Anwendung der Analysis auf die Geometrie (feuilles d'analyse) gezeigt, dass die Bedingung, unter welcher zwei, durch die Gleichungen

$$x\frac{ds}{dx} + y\frac{ds}{dx} + z\frac{ds}{dz} + \alpha = 0 \text{ und}$$

$$x + yA + zB = 0$$

ausgedrückte Ebenen in rechten Winkeln sich schneiden, in der Gleichung

$$\frac{ds}{dx} + A\frac{ds}{dy} + B\frac{ds}{dz} = 0$$

enthalten ist.

Variations-Rechnung.

Die Gleichung der Fläche $s = F(x, y, z) = 0$ aber giebt auch die Abgeleitete:

$$\frac{ds}{dx} + \frac{ds}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{ds}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

woraus

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{ds}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{ds}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

folgt. Substituirt man dieses in die vorige Gleichung, so erhält man

$$\left(A - \frac{dy}{dx}\right)\frac{ds}{dy} + \left(B - \frac{dz}{dx}\right)\frac{ds}{dz} = 0,$$

welche Gleichung, wenn man darin die oben gefundenen Werthe von A und B setzt,

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}\right)\right)\frac{ds}{dy}$$

$$-\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}\right)\right)\frac{ds}{dz} = 0$$

giebt.

Dividirt man in dieser Gleichung den Coefficienten von $\frac{ds}{dy}$ durch v^3, so erhält man, weil

$$v = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$$

ist, die erste Ableitung von $\frac{dz}{dx} : v$. [*Denn es ist*

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx} : v\right)}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} : v - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} : v^2 \text{ *und weil*}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}}{dx} \textit{ ist},$$

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}:v\right)}{dx} =$$

$$v^2\,\frac{d^2z}{dx^2}:v^3 - \frac{dz}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right):v^3$$

$$=\left(\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right):v^3$$

$$=\left(\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right):v^3,$$

wie oben.] Eben so giebt der Coefficient von $\frac{ds}{dz}$, dividirt durch v^3, die erste Ableitung von $\frac{dy}{dx}:v$. Dividirt man also die Grenzen-Gleichung durch v^3, so lässt sie sich auf die Form

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}:v\right)}{dx}\cdot\frac{ds}{dy} - \frac{d\left(\frac{dy}{dx}:v\right)}{dx}\cdot\frac{ds}{dz} = 0$$

bringen, welche die nemliche ist, die wir oben [*in I.*] für die kürzeste Linie fanden [*woraus also folgt, dass die kürzeste Linie in der Fläche die ist, welche die in (III.) angezeigte Eigenschaft hat*].

VII. Clairaut bemerkte zuerst in den Mémoiren der Academie der Wissenschaften von 1733 dass, welches auch die Figur der Erde seyn mag, die Curve, welche man erhält, wenn man senkrecht auf den Horizont Stangen setzt, die sich decken, wie solches bei der Aussteckung des Perpendikels auf den Meridian von Paris geschehen, allemal die Eigenschaften der kürzesten Linie zwischen allen ihren

Puncten hat. Also hängt die Bestimmung dieser Linie von der oben gefundenen allgemeinen Gleichung ab.

VIII. Setzt man, die Erde sey ein, durch Umwälzung um eine Axe entstehendes Sphäroïd, so ist, wenn man die Axe der Erde zur Axe der x, den Mittelpunct der Erde zum Anfangs-Punct der Coordinaten nimmt und die Ordinaten der Meridian-Curve r nennt,

$$r = \sqrt{(y^2 + z^2)}.$$

Also erhält man, wenn

$$s = F(x, r) = 0$$

die Gleichung der Meridian-Curve ist, die Gleichung der Oberfläche des Sphäroïdes, wenn man darin $\sqrt{(y^2 + z^2)}$ statt r setzt. Und da nun

$$\frac{dr}{dx} = \left(y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx}\right) : r$$

ist, so erhält man $\left[weil\ \frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dr} \cdot \frac{dr}{dy}\ und\ \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}\ ist\right]$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{y}{r} \cdot \frac{ds}{dr} \text{ und [eben so] } \frac{ds}{dz} = \frac{z}{r} \cdot \frac{ds}{dr}.$$

Dadurch geht die Gleichung der kürzesten Linie

$$\left[\frac{d\left(\frac{dz}{dx} : v\right)}{dx} \cdot \frac{ds}{dy} - \frac{d\left(\frac{dy}{dx} : v\right)}{dx} \cdot \frac{ds}{dz} = 0 (VI.)\right]$$

für das Sphäroïd, in

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx} : v\right)}{dx} \cdot z - \frac{d\left(\frac{dz}{dx} : v\right)}{dx} \cdot y = 0$$

über, welche von der zweiten Ordnung ist. Die Stammgleichung dieser Gleichung ist

$$\frac{z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}}{v} = a$$

[*wie leicht zu sehen*] a bedeutet eine beliebige Constante. Nach dieser Gleichung, verbunden mit der Gleichung

$$s = F(x, r) = 0,$$

lässt sich die Curve construiren.

Diese Anfgabe findet man, mit vielen Details, im vierten Bande von Johann Bernoulli's Werken abgehandelt.

Viertes Beispiel. Von der kleinsten Fläche.

388.

Die Aufgabe vön der kürzesten Linie führt von selbst auf die Aufgabe von der kleinsten Fläche.

Wir sahen schon oben [*in* 383.] dass in diesem Falle

$$v = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$$

ist, welches die Variation

$$\frac{\delta v}{\delta w} = \left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d\delta z}{dx\,\delta w} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d\delta z}{dy\,\delta w}\right) : v$$

giebt. Vergleicht man dieselbe mit dem allgemeinen Ausdrucke $\left[\text{von } \frac{\delta v}{\delta w} \text{ in } 384.\right]$

Variations-Rechnung.

$$L\frac{\delta z}{\delta w}+M\frac{d\,\delta z}{dx\,\delta w}+N\frac{d\,\delta z}{dy\,\delta w},$$

so erhält man hier

$$L=0,\ M=\frac{dz}{dx}:v,\ N=\frac{dz}{dy}:v,$$

woraus [*vermöge* 384.] die allgemeine Gleichung [*des Grössten oder Kleinsten*]

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}:v\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{dz}{dy}:v\right)}{dy}=0$$

folgt.

Dieses giebt, wenn man die angezeigten Ableitungen wirklich nimmt,

$$v\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)-\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dv}{dy}\right)=0.$$

Nun erhält man, wenn man $\left[von\ v^2=1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]$ die Ableitungen nach x und nach y nimmt,

$$v\frac{dv}{dx}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}\ \text{und}$$

$$v\frac{dv}{dy}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Multiplicirt man die vorige Gleichung mit v und substituirt alsdann darin die Werthe von v^2 und von $v\frac{dv}{dx}$ und $v\frac{dv}{dy}$, so erhält man, nach den nöthigen Reductionen,

Beispiele zur

$$\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dy^2}-2\,\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}$$
$$+\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

welches die Gleichung der kleinsten Fläche ist.

Monge und Legendre haben durch sinnreiche Verwandlungen die Stammgleichung dieser Gleichung zweiter Ordnung gefunden. Aber wegen Gestalt der Ausdrücke sind dieselben wenig anwendbar. Man sehe die Mémoiren der Academie der Wissenschaften von 1787.

Fünftes Beispiel. Von der Brachystochrone.

389.

Um noch ein andres Beispiel zu geben, wollen wir die so bekannte Aufgabe von der Brachystochrone, oder von der Linie des schnellsten Falles wieder vornehmen. Wir wollen aber die Bewegung in einem, nach der Function der Zeit widerstehenden Mittel setzen.

I. Man nehme die Abscisse x senkrecht, von oben nach unten an, die Ordinate y also horizontal. Bezeichnet g die unveränderliche Schwerkraft, z das Quadrat der Geschwindigkeit und φz die Function der Geschwindigkeit, welche sich wie der Widerstand des Mittels verhält, so erhält man zur Bestimmung von z, nach den Grundsätzen der Mechanik, die Gleichung

Variations-Rechnung.

$$\frac{dz}{dx} - 2g + 2\varphi z \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = 0$$

und die Zeit, welche ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll, wird durch die Stammgrösse von

$$\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\sqrt{z}}$$

ausgedrückt. [*Die Linie nemlich liegt offenbar in einer senkrechten Ebene. Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Puncte ist nach der obigen Bezeichnung* $\sqrt{z}$. *Bewegte sich nun der Körper in einem nicht widerstehenden Mittel und wäre die Geschwindigkeit, welche ein frei fallender Körper, nach einer Secunde Fall, von der Ruhe ab, erlangt, wie oben, gleich g, so wäre bekanntlich*

$$z = 2gx,$$

also

$$\frac{dz}{dx} = 2g.$$

Drückt nun ferner φz *die Geschwindigkeit aus, welche eine Kraft, die dem Widerstande des Mittels gleich ist, in einer Secunde Zeit, von der Ruhe ab, hervorbringen würde, so ist die Wirkung des widerstehenden Mittels, welches in der Richtung der Tangente der Bahn wirkt, für den Raum* $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$, *gleich*

$$2\varphi z \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}.$$

Diese Wirkung ist derjenigen der Schwere entge-

gengesetzt; also ist, wenn sich beide vereinigen,

$$\frac{dz}{dx} = 2g \div 2\varphi z \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)},$$

woraus

$$\frac{dz}{dx} - 2g + 2\varphi z \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = 0$$

folgt, wie oben.

Ferner ist die Zeit gleich dem Raume dividirt durch die Geschwindigkeit, also die erste Ableitung derselben gleich

$$\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} : \sqrt{z},$$

ebenfalls wie oben.]

II. Vergleicht man diesen Ausdruck mit den allgemeinen Ausdrücken [*in* 372 *und* 374.], so erhält man

$$v = \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\sqrt{z}} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, z\right)$$

uud die Function

$$[L =]\ F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, z, \frac{dz}{dx}\right),$$

welche, gleich Null gesetzt, die Bedingungs-Gleichung ausdrückt, ist

$$L = \frac{dz}{dx} - 2g + 2\varphi z \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}.$$

[*Hier also ist ein Fall, wie in* (374.), *wo zugleich auf eine Bedingungs-Gleichung zwischen* y *und* z *mit den Ableitungen von* y *und* z *Rücksicht genommen werden muss.*]

Variations-Rechnung.

III. Man erhält also [*wenn man die Variation von v nimmt*]

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\sqrt{z}} - \frac{\frac{\delta z}{\delta x}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{2z^{\frac{3}{2}}}$$

und [*wenn man die Ableitungen von v nach* $\frac{dy}{dx}$ *und nach z nimmt*]

$$\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\sqrt{z}},\ \frac{dv}{dz} = -\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{2z^{\frac{3}{2}}}$$

Ferner erhält man [*wenn man die Variation von* $L = 0$ *nimmt*]

$$\frac{\delta L}{\delta x} = \frac{d\,\delta z}{dx\,\delta x} + 2 \cdot \frac{d\varphi z}{dz} \cdot \frac{d\,\delta z}{dx\,\delta x}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

$$+ 2\varphi z \frac{\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\,\delta y}{dx\,\delta x}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} = 0.$$

Auch erhält man [*wenn man die Ableitungen von L nach* $\frac{dy}{dx}$, *nach z und nach* $\frac{dz}{dx}$ *nimmt*]

$$\frac{dL}{d\frac{dy}{dx}} = 2\varphi z . \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},$$

$$\frac{dL}{dz} = 2\frac{d\varphi z}{dz} \cdot \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} \text{ und}$$

$$\frac{dL}{d\frac{dz}{dx}} = 1.$$

IV. Hieraus folgt [*weil in* (371.) $Y = \frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} \dots$, $Z = \frac{dv}{dz} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dz}{dx}}}{dx} \dots$, $\overset{1}{Y} = \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} - \dots$,

$\overset{1}{Z} = \frac{dv}{d\frac{dz}{dx}} \dots$ *und in* (374.) $(Y) = \lambda\frac{dL}{dy} - \frac{d\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{dy}{dx}}\right)}{dx} \dots$,

$(Z) = \lambda\frac{dL}{dx} - \frac{d\left(\lambda\frac{dL}{d\frac{dz}{dx}}\right)}{dx} \dots$, $(\overset{1}{Y}) = \lambda\frac{dL}{d\frac{dy}{dx}} \dots$,

$(\overset{1}{Z}) = \lambda\frac{dL}{d\frac{dz}{dx}} \dots$ *ist*:]

$$Y = -\frac{d\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\sqrt{z}}\right)}{dx}, \quad Z = -\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{2z^{\frac{3}{2}}}$$

$$\overset{1}{Y} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\sqrt{z}}, \quad \overset{1}{Z} = 0,$$

$$Y = -\frac{d\left(2\lambda\varphi z\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\right)}{dx},$$

$$(Z) = 2\lambda\frac{d\varphi z}{dz}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} - \frac{d\lambda}{dx},$$

Variations-Rechnung.

$$(\overset{1}{Y}) = 2\lambda\varphi z \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},\ (\overset{1}{Z}) = \lambda.$$

V. Diese Ausdrücke geben die allgemeinen Gleichungen des Grössten und Kleinsten [374.]:

$$Y + (Y) = 0 \text{ und } Z + (Z) = 0$$

und die Grenzen-Gleichung $\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} = 0$, wenn man

$$\frac{\delta u}{\delta x} = (Y + (Y))\frac{\delta y}{\delta x} + (Z + (Z))\frac{\delta z}{\delta x}$$

setzt.

VI. Will man auch noch die Variation von x in Betracht ziehen, so ist

$$\frac{\delta u}{\delta w} = (\overset{1}{Y} + (\overset{1}{Y}))\left(\frac{\delta y}{\delta w} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right)$$

$$+ (\overset{1}{Z} + (\overset{1}{Z}))\left(\frac{\delta z}{\delta w} - \frac{\delta z}{\delta w}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right)$$

$$+ \left[v\frac{\delta x}{\delta w} = \right]\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\sqrt{z}}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}.$$

VII. Die beiden allgemeinen Gleichungen des Grössten und Kleinsten [$Y + (Y) = 0$ *und* $Z + (Z) = 0$] geben, [*wenn man die obigen Werthe von* Y, (Y), Z *und* (Z) *substituirt*]

$$\frac{d\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\sqrt{z}}\right]}{dx} + \frac{d\left[2\lambda\varphi z\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\right]}{dx} = 0,$$

und

$$-\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{2z^{\frac{3}{2}}}+2\lambda\frac{d\varphi z}{dz}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}-\frac{d\lambda}{dx}=0.$$

VIII. Die Stammgleichung der ersten Gleichung ist

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\sqrt{z}}+2\lambda\varphi z\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{a}},$$

wo a eine willkürliche Constante ist.

IX. In dieser Gleichung muss der Werth von λ aus der zweiten allgemeinen Gleichung [*VII.*] substituirt und sodann λ, vermittelst der gegebenen Bedingungs-Gleichung

$$L=\frac{dz}{dx}-2g+2\varphi z\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}=0,$$

eliminirt werden. Die entstehende Gleichung zwischen x und y ist dann die Gleichung der gesuchten Curve [*des schnellsten Falles*].

X. Da z das Quadrat der Geschwindigkeit und die Ableitungs-Gleichung mit z [*die zweite in VII.*] von der ersten Ordnung ist, so wird der aus ihrer Stammgleichung genommene Werth von z eine willkürliche Constante enthaltrn, die von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers im Anfange der Bewegung abhängt.

Man kann also den Werth von z an der ersten Grenze als eine gegebene Function der Anfangs-Coordinaten x und y betrachten. Bezeichnet man diese

Variations-Rechnung.

Function durch das Zeichen Δ, so hat man die Bedingung

$$\overset{0}{z} = \Delta(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}).$$

XI. Der Fall [*der Bewegung im nicht widerstehenden Mittel oder*] im leeren Raum kat keine Schwierigkeit. Denn setzt man $\varphi z = 0$ [*wie es für diesen Fall seyn muss*], so erhält man [*in VIII.*] die Gleichung

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\sqrt{z}} = Const. = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

wo kein λ mehr vorkommt.

Ferner erhält man [*vermöge der Bedingungs-Gleichung $L = 0$*] $\frac{dz}{dx} - 2g = 0$, woraus folgt:

$$z = 2gx + b.$$

Wendet man diese Gleichung auf die erste Grenze an, so erhält man

$$\overset{0}{z} = 2g\overset{0}{x} + b,$$

woraus $b = \overset{0}{z} - 2g\overset{0}{x}$ folgt. Also ist der vollständige Werth von z,

$$z = 2g(x - \overset{0}{x}) + \overset{0}{z}.$$

Endlich giebt [*die vorhin gefundene Gleichung mit* $\frac{dy}{dx}$, $a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = z\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$, *oder*]

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{z}{a-z}},$$

welche Gleichung, wenn man den obigen Werth von z substituirt, die Gleichung der gewöhnlichen Cycloïde giebt.

XII. Man setze [*jetzt wieder für den allgemeinen Fall der Bewegung im widerstehenden Mittel*]

$$\frac{1}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi z = t,$$

so hängt die Aufgabe von der Auflösung folgender drei Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung ab:

$$1.\quad \frac{t\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

[*Dieses ist die Gleichung in (VIII.) nemlich die Stammgleichung von der ersten Gleichung in (VII.) wenn man* $\frac{1}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi z = t$ *setzt*]

$$2.\quad \frac{d\lambda}{dx} - \left(2\lambda\frac{d\varphi z}{dz} - \frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = 0.$$

[*Dieses ist die zweite Gleichung in (VII.)*] und

$$3.\quad \frac{dz}{dx} - 2g + 2\varphi z\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = 0.$$

[*Dieses ist die Bedingungs-Gleichung der Aufgabe,* $L = 0$ *(I.)*]

XIII. Nimmt man die Ableitung von t [$= \frac{1}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi z$], so erhält man

$$\frac{dt}{dx} =$$

Variations-Rechnung.

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{dz}{dx}\left(\frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}} - 2\lambda.\frac{d\varphi z}{dz}\right) + 2\varphi z\frac{d\lambda}{dx},$$

woraus

$$\frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}} - 2\lambda.\frac{d\varphi z}{dz} = \frac{2\varphi z\frac{d\lambda}{dx} - \frac{dt}{dx}}{\frac{dz}{dx}}$$

folgt.

Substituirt man diesen Werth in die obige zweite Gleichung [*XII.*], so erhält man

$$\frac{d\lambda}{dx} + \frac{2\varphi z.\frac{d\lambda}{dx} - \frac{dt}{dx}}{\frac{dz}{dx}}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = 0.$$

Nun giebt die dritte Gleichung [*in XII.*]

$$\frac{dz}{dx} = 2g - 2\varphi z\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}.$$

Setzt man diesen Ausdruck [*von* $\frac{dz}{dx}$] in die zuletzt gefundene Gleichung, nachdem sie mit $\frac{dz}{dx}$ multiplicirt worden [*welches* $\frac{d\lambda}{dx}.\frac{dz}{dx} + \left(2\varphi z\frac{d\lambda}{dx} - \frac{dt}{dx}\right)$ $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = 0$ *giebt*], so erhält man [*wenn man davon die dritte Gleichung in (XII.), nachdem sie in* $\frac{d\lambda}{dx}$ *multiplicirt worden, welches* $\frac{d\lambda}{dx}.\frac{dz}{dx} + 2\varphi z\frac{d\lambda}{dx}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} - 2g.\frac{d\lambda}{dx} = 0.$ *giebt, abzieht*]

$$2g\frac{d\lambda}{dx} - \frac{dt}{dx}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = 0.$$

Beispiele zur

XIV. Nun ist

$$\frac{dt}{dx}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} =$$

$$\frac{d\left(t\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\right)}{dx} - \frac{t\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}$$

und die erste Gleichung [*in XII.*] giebt

$$\frac{t\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

[*folglich*

$$\frac{dt}{dx}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = \frac{d\left(t\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\right)}{dx} - \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{a}}\Bigg]$$

Also giebt die vorhin [*am Ende von (XIII.)*] gefundene Gleichung:

$$2g\cdot\frac{d\lambda}{dx} - \frac{d\left(t\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\right)}{dx} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{a}} = 0,$$

wovon die Stammgleichung,

$$2g\lambda - t\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} + \frac{dy}{dx} : \sqrt{a} = b$$

ist [*b ist eine willkürliche Constante*]. Substituirt man hierin noch den Werth von t aus der ersten Gleichung [*in XII.*], nemlich $t = \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\frac{dy}{dx}\sqrt{a}}$,

Variations-Rechnung.

so erhält man $\left[2g\lambda - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{dy}{dx}\sqrt{a}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{a}} = b,\right.$

oder $2g\lambda - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{dy}{dx}\sqrt{a}} = b,$ *oder*]

$$2g\lambda = \frac{1}{\frac{dy}{dx}\sqrt{a}} + b.$$

So ist also der Werth von λ gefunden, den man nun in den Ausdruck von t und in die erste Gleichung [*in XII.*] setzen kann. Alsdann ist nur noch übrig, diese Gleichung mit der dritten zu verbinden, um z wegzuschaffen [*welches nicht weiter allgemein, sondern nur erst dann angeht, wenn φz einen bestimmten Werth erhält, so dass also die Aufgabe, die Gleichung der Curve zu finden, bis hierher als aufgelöset zu betrachten ist.*]

XV. Wir wollen jetzt die Grenzen-Gleichung $\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} - \frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0$ untersuchen.

Man nehme an, was der gewöhnlichste Fall ist, dass die Grenzen von einander unabhängig sind, so ist, einzeln,

$$\frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{w}} = 0 \text{ und } \frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{w}} = 0.$$

Macht man nun in dem obigen Ausdrucke von $\frac{\delta u}{\delta w}$ [*VI.*] die nöthige Substitution [*der Ausdrücke*

der Grössen $\overset{1}{Y}$, $(\overset{1}{Y})$, $\overset{1}{Z}$ *und* $(\overset{1}{Z})$ *aus (VI.)*], so erhält man [*wie leicht zu sehen*]

$$\frac{\delta u}{\delta w}=\left(\frac{1}{\sqrt{z}}+2\lambda\varphi z\right)\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\left(\frac{\delta y}{\delta x}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right)$$

$$+\lambda\left(\frac{\delta z}{\delta w}-\frac{dz}{dx}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}\right)+\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\sqrt{z}}\cdot\frac{\delta x}{\delta w}.$$

XVI. Dieser Ausdruck reducirt sich, wenn man [*aus der Bedingungs-Gleichung* $L=0$] den Werth von $\frac{dz}{dx}$, nemlich $2g-2\varphi z\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$ setzt, auf

$$\frac{\delta u}{\delta w}=\left(\frac{t}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}-2g\lambda\right)\frac{\delta x}{\delta w}$$

$$+\frac{t\,\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\cdot\frac{\delta y}{\delta w}+\lambda\frac{\delta z}{\delta w},$$

wo t, wie oben, statt $\frac{1}{\sqrt{z}}+2\lambda\varphi z$ gesetzt ist. [*Die nöthigen Zwischenrechnungen, welche keine Schwierigkeit haben, würden zu viel Raum einnehmen.*]

Substituirt man also nun für t den aus der ersten Gleichung [*in XII.*] folgenden Ausdruck, so erhält man, kürzer,

$$\frac{\delta u}{\delta w}=\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}\sqrt{a}}-2g\lambda\right)\frac{\delta x}{\delta w}+\frac{\delta y}{\delta w}:\sqrt{a}+\lambda\frac{\delta z}{\delta w}.$$

Variations-Rechnung.

Dieser Werth von $\frac{\delta u}{\delta w}$ soll also an den beiden Grenzen gleich Null seyn.

XVII. Wie wir [*in X.*] sahen, ist für die erste Grenze, allgemein,

$$\overset{0}{z} = \Delta(\overset{0}{x}, \overset{0}{y})\ [= \eta].$$

Dieses giebt, wenn man die Variationen nimmt,

$$\frac{\delta \overset{0}{z}}{\delta \overset{0}{w}} = \frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}} \cdot \frac{d\eta}{d\overset{0}{x}} + \frac{\delta y}{\delta \overset{0}{w}} \cdot \frac{d\eta}{d\overset{0}{y}},$$

wodurch sich die Grenzen-Gleichung [*XVI.*] in

$$\frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{w}} = \left(\frac{1}{\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\sqrt{a}} - 2g\overset{0}{\lambda} + \frac{d\eta}{d\overset{0}{x}}\lambda\right)\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}}$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{d\eta}{dy}\cdot\lambda\right)\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{x}} = 0$$

verwandelt.

XVIII. Für die zweite Grenze ist auch

$$\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{w}} = 0,$$

in welcher Gleichung man, weil die Variation $\frac{\delta \overset{1}{z}}{\delta \overset{1}{w}}$ unbestimmt bleibt, ihren Coefficienten gleich Null setzen muss. Dieses giebt die Bedingung

$$\overset{1}{\lambda} = 0,$$

[*denn der Coefficient zu* $\frac{\delta z}{\delta w}$ *in der Grenzen-Gleichung (XVI.) ist* λ] welche zur Bestimmung der willkürlichen Constante b in dem, weiter oben [*in XIII.*] gefundenen Werthe von x dient. Diese Bedingung giebt [*in XIII.*]

$$\frac{1}{\frac{\overset{1}{dy}}{\underset{1}{dx}}\sqrt{a}} + b = 0,$$

woraus

$$b = -\frac{1}{\frac{\overset{1}{dy}}{\underset{1}{dx}}\sqrt{a}}$$

folgt.

XIX. Der vollständige Ausdruck von λ [*in XIII.*] ist also

$$2g\lambda = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}} - \frac{1}{\frac{\overset{1}{dy}}{\underset{1}{dx}}}\right),$$

woraus

$$2g\overset{0}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 : \frac{\overset{0}{dy}}{\underset{0}{dx}} - 1 : \frac{\overset{1}{dy}}{\underset{1}{dx}}\right)$$

folgt, welchen Ausdruck man nun in die Gleichung der ersten Grenze [*XVII.*] setzen muss.

XX. Die Gleichung der zweiten Grenze [*in XVI.*] ist, wegen $\overset{1}{\lambda} = 0$, blos

$$\frac{\delta \overset{1}{x}}{\underset{1}{\delta w}} : \frac{\overset{1}{dy}}{\underset{1}{dx}} + \frac{\delta \overset{1}{y}}{\underset{1}{\delta w}} = 0.$$

Variations-Rechnung.

Diese Gleichung ist völlig derjenigen ähnlich, welche wir im ersten Beispiele fanden [385. *III.*] und aus welcher wir daselbst schlossen, dass die kürzeste Linie, die zweite Grenzen-Linie unter einem rechten Winkel schneiden müsse. Das Nemliche findet also auch für die Linie des schnellsten Falles Statt, welches auch das Gesetz des Widerstands des Mittels seyn mag.

XXI. Wir kehren zu der ersten Grenze zurück [*XVII.*]. Substituirt man den Werth von λ aus [*XIX.*], so erhält man

$$\frac{1}{\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}} + \frac{d\overset{0}{\eta}}{d\overset{0}{x}} \cdot \frac{1}{2g}\left(1 : \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}} - 1 : \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{1}{x}}\right)\frac{\delta x}{\delta w}$$

$$+ 1 + \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{y}} \cdot \frac{1}{2g}\left(1 : \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}} - 1 : \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)\frac{\delta y}{\delta w} = 0.$$

Bezeichnet man nun die Ableitung der Ordinate der ersten Grenzen-Curve [*zum Unterschiede von derjenigen der gesuchten Linie*] durch $\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)$, so erhält man, wie wir im ersten Beispiele [*in* 385. *III.*] sahen,

$$\frac{\delta\overset{0}{y}}{\delta\overset{0}{x}} - \left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)\frac{\delta\overset{0}{x}}{\delta\overset{0}{w}} = 0.$$

Setzt man also in die obige Gleichung statt $\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}$ den

Beispiele zur

[*hieraus folgenden*] Werth $\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}} \cdot \frac{\delta\overset{0}{x}}{\delta w}$, so bleibt die Variation $\frac{\delta x}{\delta w}$ unbestimmt, und man muss der Gleichung so genugthun, dass der Coefficient von $\frac{\delta x}{\delta w}$ gleich Null gesetzt wird, welches

$$1 : \frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}} + \frac{d\overset{0}{\eta}}{d\overset{0}{x}} \cdot \frac{1}{2g}\left(1 : \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}} - 1 : \frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\right)$$

$$+ \left(1 + \frac{d\overset{0}{\eta}}{d\overset{0}{y}} \frac{1}{2g}\left(1 : \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}} - 1 : \frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\right) \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) = 0.$$

giebt, welcher Gleichung durch eine der willkürlichen Constanten Genüge gethan werden muss.

XXII. Man setze, welches der einfachste Fall ist, die anfängliche Geschwindigkeit $\sqrt{\overset{0}{z}}$ sey unabhängig von dem Orte des Anfangs der Bewegung, also

$$\overset{0}{z} = a = Const.,$$

so ist

$$\Delta(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}) = \eta = Const. \text{ [X. u. XVII.]}$$

und folglich

$$\frac{d\eta}{d\overset{0}{x}} = 0, \quad \frac{d\eta}{d\overset{0}{y}} = 0.$$

Dieses giebt in der obigen Gleichung [*XXI.*]

$$1 : \frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}} + \left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) = 0, \text{ oder } 1 + \frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) = 0.$$

Variations-Rechnung.

Hier ist $\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)$ die Tangente des Winkels, welchen die Tangente der ersten Grenzen-Curve, in dem Puncte, in welchem sie die Linie des schnellsten Falles durchschneidet, mit der Axe der x macht, $\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}$ hingegen ist die Tangente des Winkels, welchen die Tangente der Linie des schnellsten Falles, an der zweiten Grenze, mit der nemlichen Axe der x macht. Also folgt aus der gefundenen Gleichung, wie wir im ersten Beispiele [*in* 385. *III.*] sahen, dass die Differenz zwischen jenen beiden Winkeln einem rechten Winkel gleich seyn muss. Also muss die Tangente der ersten Grenzen-Curve [*im Durchschnitts-Puncte der beiden Curven*] auf der Tangente der Linie des schnellsten Falles im zweiten Grenzen-Puncte senkrecht stehen. Da wir nun schon sahen, dass diese letzte Tangente auf die Tangente der zweiten Grenzen-Curve [*im Grenzen-Puncte*] senkrecht seyn muss [*XX.*], so folgt, dass die Linie des schnellsten Falles im gegenwärtigen Falle [*wenn die anfängliche Geschwindigkeit constant ist*] die beiden Grenzen-Curven in Puncten begegnen muss, in welchen die Tangenten derselben parallel sind.

XXIII. Soll dagegen die anfängliche Geschwindigkeit diejenige seyn, welche ein Körper erlangen würde, der immer von dem nemlichen Puncte herabfiele, so ist, wenn wir h die Höhe dieses Puncts über der horizontalen Axe der y nennen, $h + \overset{0}{x}$ die

Beispiele zur

der anfänglichen Geschwindigkeit, deren Quadrat $\overset{0}{z}$ ist, entsprechende Fallhöhe, und nach mechanischen Gesetzen ist dann

$$\overset{0}{z} = 2g(h + \overset{0}{x}).$$

Also ist jetzt

$$\eta = \Delta(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}) = 2g(h + \overset{0}{x}),$$

woraus

$$\frac{d\eta}{d\overset{0}{x}} = 2g \text{ und } \frac{d\eta}{d\overset{0}{y}} = 0$$

folgt. Dadurch reducirt sich die erste Grenzen-Gleichung auf —

$$1 : \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}} + \left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) = 0 \text{ oder } 1 + \frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) = 0,$$

welches, wie im ersten Beispiele [385. *III.*], anzeigt, dass die Linie des schnellsten Falles die erste Grenzen-Linie wieder unter einem rechten Winkel schneiden muss. [*Man findet eine Auseinandersetzung der Rechnungen dieser Aufgabe in den oben erwähnten Abhandlungen des Uebersetzers, im zweiten Bande, S.* 150 *etc.*]

XXIV. Man hat die nemlichen Resultate für die Linie des schnellsten Falles im leeren Raume gefunden. (Man sehe den vierten Band der Turiner Mémoiren und die Mémoiren der Academie der Wissenschaften, aus den Jahren 1767. und 1768.) Die obige Rechnung zeigt, dass die Bedingungen, in Rücksicht auf die Grenzen, vom Widerstande des Mittels unabhängig sind.

Variations-Rechnung.

Sechstes Beispiel. Von der Linie der grössten Geschwindigkeit.

390.

I. Verlangte man statt der Curve des schnellsten Falles diejenige, in welcher der bewegte Körper die grösste Geschwindigkeit [*nemlich im widerstehenden Mittel*] erlangt, so müsste das Grösste der Grösse z gesucht werden. Dieses wäre derjenige Fall, in welchem sich, wie wir sahen, die obigen allgemeinen Gleichungen des Grössten und Kleinsten [398. *IV.*] blos auf

$$(Y) = 0 \text{ und } (Z) = 0$$

reduciren [*denn jetzt ist nicht mehr die Zeit, oder die Stammgrösse von v ein Grösstes oder Kleinstes, sondern die Geschwindigkeit z, welche in der Bedingungs-Gleichung $L = 0$ vorkommt. Also fallen Y und Z* (389. *IV.*), *welche von v herrühren, weg und es bleibt in den allgemeinen Gleichungen des Grössten und Kleinsten* (389. *V.*) *blos* (Y) *und* (Z.)]

Es ist also hier blos

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(2\lambda\varphi z \dfrac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}\right)}{dx} = 0 \text{ und} \\ &2\lambda\frac{d\varphi z}{dz}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} - \frac{d\lambda}{dx} = 0 \end{aligned}\right\} [389.\, IV.]$$

welche Gleichung mit der [*Bedingungs*-] Gleichung

Beispiele zur

$$[L=]\frac{dz}{dx}-2g-2\varphi z\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}=0 \quad [389.I.]$$

verbunden werden muss.

II. Die Stammgleichung der ersten Gleichung ist

$$2\lambda\varphi z.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Verfährt man mit diesen drei Gleichungen wie in dem vorigen Beispiele, so erhält man, auf dieselbe Weise, die Gleichung

$$2g\lambda=\frac{1}{\sqrt{a}}:\frac{dy}{dx}+b,$$

welche den Werth von λ giebt. Sodann geben die beiden letzten obigen Gleichungen die Geschwindigkeit $\sqrt{z}$ und diejenige Function von y in x, von welcher die gesuchte Function abhängt.

III. Für die Grenzen erhält man im gegenwärtigen Falle, wenn man x, y und z zugleich sich verändern lässt,

$$\frac{\delta u}{\delta w}=(\overset{1}{Y})\left(\frac{\delta y}{\delta w}-\frac{dy}{dx}.\frac{\delta x}{\delta w}\right)$$
$$+(\overset{1}{Z})\left(\frac{\delta z}{\delta w}-\frac{dz}{dx}.\frac{\delta x}{\delta w}\right)+\frac{dz}{dx}.\frac{\delta x}{\delta w}.$$

Dieser Ausdruck giebt, wenn man darin die Werthe von $(\overset{1}{Y})$, $(\overset{1}{Z})$ und $\frac{dz}{dx}$ substituirt und reducirt,

Variations-Rechnung.

$$\frac{\delta u}{\delta w} = \left(\frac{2\lambda\varphi z}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} - 2g\lambda\right)\frac{\delta x}{\delta w}$$

$$+ 2\lambda\varphi z \frac{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta w}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} + (1+\lambda)\frac{\delta z}{\delta w}.$$

Setzt man hierin noch die Werthe von $2g\lambda$ und $2\lambda\varphi z$ aus den beiden letzten Stammgleichungen, so erhält man zum Resultate:

$$\frac{\delta u}{\delta w} = -b\frac{\delta x}{\delta w} + \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\delta y}{\delta w} + (1+\lambda)\frac{\delta z}{\delta w},$$

so dass die beiden Grenzen-Gleichungen $\frac{\delta \overset{0}{u}}{\delta \overset{0}{x}} = 0$ und $\frac{\delta \overset{1}{u}}{\delta \overset{1}{x}} = 0$:

$$-b\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{w}} + (1+\overset{0}{\lambda})\frac{\delta \overset{0}{z}}{\delta \overset{0}{w}} = 0 \text{ und}$$

$$-b\frac{\delta \overset{1}{x}}{\delta \overset{1}{w}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\delta \overset{1}{y}}{\delta \overset{1}{w}} + (1+\overset{1}{\lambda})\frac{\delta \overset{1}{z}}{\delta \overset{1}{w}} = 0$$

sind.

IV. Die anfängliche Geschwindigkeit, deren Quadrat $\overset{0}{z}$ ist, muss gegeben seyn. Nimmt man sie unabhängig vom Anfangs-Puncte der Bewegung an, so ist $\overset{0}{z}$ eine constante Grösse, deren Variation also gleich Null ist. Also ist in diesem Falle $\frac{\delta \overset{0}{z}}{\delta \overset{0}{w}} = 0$

und die erste [*Grenzen*-] Gleichung [*III.*] reducirt sich auf

$$-b\,\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{w}} = 0.$$

V. Da für die zweite Grenze der Werth von $\frac{\delta \overset{1}{z}}{\delta \overset{1}{w}}$ durch Nichts bestimmt wird, so muss der Coefficient dieser Variation gleich Null seyn, welches

$$\overset{1}{\lambda} + 1 = 0 \text{ und } \overset{1}{\lambda} = -1$$

giebt, welchem Werthe von λ gemäss man die willkürliche Constante b bestimmen muss.

Die zweite Grenzen-Gleichung geht alsdann in

$$-b\,\frac{\delta \overset{1}{x}}{\delta \overset{1}{w}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\delta \overset{1}{y}}{\delta \overset{1}{w}} = 0$$

über.

VI. Wären die beiden End-Puncte der Curve gegeben, so wären die Variationen $\frac{\delta \overset{0}{x}}{\delta \overset{0}{w}}$, $\frac{\delta \overset{0}{y}}{\delta \overset{0}{w}}$, $\frac{\delta \overset{1}{x}}{\delta \overset{1}{w}}$ und $\frac{\delta \overset{1}{y}}{\delta \overset{1}{w}}$ gleich Null und die beiden [*Grenzen*-] Gleichungen würden von selbst erfüllt.

VII. Würde hingegen die Linie gesucht, in welcher ein Körper, von einer gegebenen Curve ausgehend, bis zu einer andern Curve hin, die möglichgrösste Geschwindigkeit erlangt, so erhielte man, wenn man, wie oben, die Tangenten der Winkel, welche die Tangenten der Grenzen-Curven an den beiden

Enden der gesuchten Linie mit der Axe der x machen, durch $\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right)$ und $\left(\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\right)$ bezeichnete, eben wie im ersten Beispiele [385.],

$$\frac{\delta\overset{0}{y}}{\delta w} - \left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) . \frac{\delta\overset{0}{x}}{\delta w} = 0 \text{ und } \frac{\delta\overset{1}{y}}{\delta w} - \left(\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\right) \frac{\delta\overset{1}{x}}{\delta w} = 0$$

[385. *III.*] Verbindet man diese Gleichung mit den beiden obigen [*III.*], so erhält man

$$\left(\frac{d\overset{0}{y}}{d\overset{0}{x}}\right) = b \sqrt{a} \text{ und } \left(\frac{d\overset{1}{y}}{d\overset{1}{x}}\right) = b \sqrt{a},$$

woraus folgt, dass die Tangenten der beiden Grenzen-Curven [*in den Durchschnitts-Puncten derselben mit der gesuchten Linie der grössten Geschwindigkeit*], mit einander parallel seyn müssen, eben wie bei der Linie des schnellsten Falles.

391.

Diese Beispiele werden hinreichen, die Anwendung der obigen allgemeinen Ausdrücke, und besonders der Grenzen-Gleichungen zu zeigen, welche vor der Variations-Rechnung nicht bekannt waren, ohne welche man aber nur unvollständige Ableitungen erhält.

Ende des zweiten Bandes.

Berlin, gedruckt bei G. Hayn.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Buchbinder Schinne

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lagrange, Joseph Louis <<de>>,

J.L. Lagrange's mathematische Werke

Bd.: Zweiter Band

Berlin 1823

Math.u. 91 s-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594044-8